FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Übungszettel Nr. 11, Abgabe: 19.1.2011 um 12 Uhr

Lernziel: Faktormengen. Schnitt(winkel) von Ebenen. Geraden.

Aufgabe 1: Zeigen Sie anhand der entsprechenden Multiplikationstabelle, dass $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ kein Körper ist. (*4 Punkte*)

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen $\mathcal{E}_1$und $\mathcal{E}_2$ mit

$$\mathcal{E}_1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_2: x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 21 = 0$$

parallel sind und berechnen Sie ihren Abstand. (*4 Punkte*)

Aufgabe 3: Die Ebene $\mathcal{E}_1: 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ schneidet die Ebene $\mathcal{E}_2$ mit

$$\mathcal{E}_2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Schnittgerade und berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen. (*6 Punkte*)

b) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der beiden winkelhalbierenden Ebenen. Tipp: Die Normalenvektoren der beiden winkelhalbierenden Ebenen erhält man, indem man zwei (gleichlange!) Normalenvektoren der beiden vorgegebenen Ebenen addiert bzw. subtrahiert. (4 Punkte)

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 mit

$$g_1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g_2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};\ \mu \in \mathbb{R}$$

parallel aber nicht identisch sind. (*2 Punkte*)