FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Übungszettel Nr. 3, Abgabe: 10.11.2010 um 12 Uhr

Lernziel: Gruppen und Körper können nicht „beliebig" konstruiert werden. Die reellen Zahlen sind „überabzählbar". Multiplikation komplexer Zahlen.

Bemerkung zu Aufgabe 2 auf dem zweiten Übungsblatt: In der Vorlesung hatten wir Beweistechniken für das Beweisen einer Implikation kennengelernt (Kontraposition, Widerspruchbeweis), die sich aus den Verknüpfungstafeln der Aussagenlogik ergeben haben. Sie haben nun selber drei weitere noch nicht besprochene Beweistechniken „nachgerechnet". In meinem ganzen Mathestudium und in meinem Beruf habe ich jedoch eigentlich nur direkte und indirekte Beweise, vollständige Induktion (sehr selten) und Ringbeweise verwendet.

Aufgabe 1: a) Zusammen mit welchen der 16 möglichen Verknüpfungstafeln stellt die Menge {0,1} (alternativ {F,W}) eine Gruppe dar? Begründen Sie Ihre Ansicht einzeln für jede Verknüpfungstafel. (*3 Punkte*)
b) Zeigen Sie, dass die Menge {0,1} (alternativ {F,W}) zusammen mit der Verknüpfung „ $\dot\vee$ " als „Addition" und „ $\wedge$ " als „Multiplikation" einen Körper bilden. (*2 Punkte*)

Bemerkung zur Aufgabe 1: Der beschriebene Körper ist der kleinstmögliche endliche Körper. Er trägt auch die Bezeichnung F_2, da Körper auf Englisch „field" heißt. Die binären Operatoren „ $\dot\vee$ " und „ $\wedge$ ", sowie die Negation bilden in der elektronischen Datenverarbeitung wichtige Bauelemente, da alle Verknüpfungstafeln auf diese drei Operationen zurückgeführt werden können:
$A \to B = \bar{A} \dot\vee (A \wedge B),\ A \vee B = A \dot\vee (\bar{A} \wedge B),\ A \leftrightarrow B = \overline{A \dot\vee B}.$

Aufgabe 2: Konstruieren Sie einen Körper mit drei Elementen. Zeigen Sie, dass es sich bei Ihrer Konstruktion wirklich um einen Körper handelt. (*3 Punkte*)

Aufgabe 3: a) Seien Q, R und N Mengen. Angenommen es gibt eine bijektive Abbildung $f\colon Q \to R$ und eine weitere bijektive Abbildung $g\colon Q \to N$. Zeigen Sie dass es dann eine bijektive Abbildung $h\colon R \to N$ gibt. (*3 Punkte*)
b) Die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der reellen Zahlen haben jeweils unendlich viele Elemente. Zeigen Sie, dass es jedoch zwischen diesen beiden Mengen keine bijektive Abbildung gibt (die Menge der reellen Zahlen wird als „überabzählbar" bezeichnet). Lesen Sie in der Literatur dazu das erste und das zweite Diagonalargument von Cantor, gerne auch mal bei Wikipedia:
http://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Diagonalisierung
(*6 Punkte*)

Aufgabe 4: Die komplexen Zahlen sind in der Vorlesung als Zahlenpaare $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ eingeführt worden. Zwei weitere Darstellungen sind die *Normalform* $a = a_x + i a_y$, mit $i^2 = -1$, und die Darstellung in *Polarkoordinaten* $a = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$, wobei r als *Betrag* und ϕ als *Argument* bezeichnet werden. Eine einfachere (als die in der Vorlesung gelernte) Multiplikationsregel von komplexen Zahlen lautet: „Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge und die Argumente addieren sich". In Formeln:

$$\begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s\cos(\psi) \\ s\sin(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,s\cos(\phi+\psi) \\ r\,s\sin(\phi+\psi) \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Formel der Multiplikationsregel aus der Vorlesung entspricht. (*2 Punkte*)
b) Geben Sie mit Hilfe dieser Multiplikationsregel die Inverse a^{-1} (bezüglich der Multiplikation) zu $a = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$ mit $r \neq 0$ an. (*1 Punkt*)