FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Übungszettel Nr. 4, Abgabe: 17.11.2010 um 12 Uhr

Lernziel: Etwas Algebra und Analytische Geometrie mit Hilfe komplexer Zahlen. Beispiele für Vektorräume. Matrixmultiplikation. Beweise im Unterricht.

Aufgabe 1: a) Sie haben in Aufgabe 4 auf dem 3.Übungszettel eine Formel gelernt, mit der man zwei komplexe Zahlen a und b miteinander multipliziert. Nutzt man diese Rechenregel geschickt aus, dann kann man diese Formel verwenden, um Punkte im $\mathbb{R}^2$ um den „Ursprung zu drehen“ (Addition der Argumente). Nehmen Sie ein Dreieck mit den Eckpunkten

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und drehen Sie dieses um 60° um den Ursprung. Welche Koordinaten hat das neue Dreieck? Anmerkung: cos(60°)=1/2, sin(60°) = $\sqrt{3}/2$. (*4 Punkte*)

b) Die Gleichung $a^2 + 2a + 2 = 0$ lässt sich für reelle Zahlen a nicht lösen. Geben Sie alle Lösungen $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ der Gleichung im Körper der komplexen Zahlen an. Um eine solche Gleichung zu lösen, muss man erst einmal die reelle Zahl 2 als komplexe Zahl $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ schreiben und alle Additionen/Multiplikationen in $\mathbb{R}$ durch die Additions-/Multiplikationsregeln in $\mathbb{C}$ ersetzen. Man erhält zwei (nichtlineare) Gleichungen mit zwei Unbekannten, die zu lösen sind. (*4 Punkte*)

Bemerkung: *Wir haben gelernt, dass $\mathbb{R}^2$ die algebraische Struktur eines Körpers hat (die komplexen Zahlen). In der Literatur verwendet man fast ausschließlich die Normalform ($a=a_x+ia_y$) für die Elemente a, wenn man betonen will, dass man $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ als Körper auffasst. Die „Vektorform“ $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ für Elemente aus $\mathbb{R}^2$ benutzt man hingegen dann, wenn man $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum sehen möchte. Im Folgenden werden wir uns auch daran halten.*

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass
a) die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit den körpereigenen Rechenregeln einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen bilden (*1Punkt*) und
b) die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ jedoch keinen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen darstellen. (*1 Punkt*)

c) Zeigen Sie, dass die Menge aller (reellen) Zahlentripel $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, die das lineare

Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +3z & = & 0 \\ 4x & +5y & +6z & = & 0 \\ 7x & +8y & +9z & = & 0 \end{array}$$

lösen, einen Vektorraum über den reellen Zahlen darstellen. Um dieses zu zeigen, müssen Sie das Gleichungssystem *nicht* lösen. (*2 Punkte*)

Bemerkung: *Wir haben $\mathbb{R}^3$ als Vektorraum kennengelernt. In Aufgabe 2 betrachten wir nicht die ganze Menge $\mathbb{R}^3$, sondern schränken diese (echt) durch eine Nebenbedingung ein. Wir erhalten eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$, die auch ein Vektorraum ist. Ein solcher Vektorraum heißt „**Untervektorraum zu** $\mathbb{R}^3$“.*

Aufgabe 3: Um das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 2 tatsächlich zu lösen (das ist in Aufgabe 2 nicht nötig!), könnte der erste Schritt darin bestehen, das (minus4)-fache der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung zu addieren und somit x aus der zweiten Gleichung zu eliminieren. Dieser Schritt heißt „Elementarumformung“ und kann mittels Matrixmultiplikation (von links) dargestellt werden. Finden Sie (z.B. durch Ausprobieren) eine 3x3-Matrix L, die folgende Elementarumformung macht:

$$L \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(*4 Punkte*)

Aufgabe 4 (didaktische Aufgabe, getrennte Abgabe): Beweise können auch im Schulunterricht stattfinden. Geben Sie je ein Beispiel für eine Aussage mit Beweis aus einem Schulbuch (Literaturnachweis) an, die

a) direkt bewiesen werden kann.

b) indirekt bewiesen werden kann.

c) durch vollständige Induktion bewiesen werden kann. (*4 Punkte*)