

Übungszettel Nr. 6, Abgabe: 1.12.2010 um 12 Uhr

Lernziel: Verwendung des Gauß-Algorithmus zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Invertieren von Matrizen. Offene Aufgaben stellen.

Bemerkung: Das dritte Produkt in Aufgabe 1 auf dem 5. Übungszettel, in dem zwei Vektoren miteinander multipliziert werden, ist kein Skalarprodukt (da ja der zweite und nicht der erste Vektor transponiert wurde). Folgt man streng der Definition der Matrixmultiplikation, so ergibt dieses spezielle Produkt eine 3x3-Matrix. Eigentlich bräuchte man für das Produkt kein neues Symbol einzuführen, es wird aber oft in der Literatur als „dyadisches Produkt“ bezeichnet und hat als Symbol „ $a \otimes b$ “.

Aufgabe 1: Lösen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}2x + 4y - 2z &= 2 \\4x + 9y - 3z &= 8 \\-2x - 3y + 7z &= 10\end{aligned}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2: a) Lösen Sie mit Hilfe des Gaußalgorithmus das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2x + 4y - 2z &= e_1 \\4x + 9y - 3z &= e_2 \\-2x - 3y + 7z &= e_3\end{aligned}$$

wobei Sie für die „rechte Seite“ als Vektoren $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ einmal $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, einmal $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und einmal $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwenden. Versuchen Sie dabei, wenn es geht, sich die Sache so einfach wie möglich zu machen. (6 Punkte)

b) Die Inverse A^{-1} einer quadratischen Matrix A ist eine solche Matrix, für die gilt $A \cdot A^{-1} = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist (alle Elemente sind 0, bis auf die Diagonalelemente, die alle 1 sind). Können Sie mit Hilfe der Lösungen aus a) die Inverse der folgenden Matrix angeben? Machen Sie die Probe. (4 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Das dreidimensionale Vektorprodukt ist nicht assoziativ. Die Graßmann-Identität (Hermann Günter Graßmann ist der „Erfinder“ der Vektorräume, 1844) für das wiederholte Kreuzprodukt von drei dreidimensionalen Vektoren a, b , und c , lautet

$$a \times (b \times c) = (a^T c) b - (a^T b) c.$$

Zeigen Sie, dass diese Formel gilt. (3 Punkte)

Aufgabe 4 (didaktische Aufgabe, getrennte Abgabe):

Im Buch “Der Spagat zwischen fördern und fordern” von Ingvelde Scholz (Hg.) wird der Begriff Offene Aufgabe auf Seite 129ff. erklärt und mit Beispielen verdeutlicht:

http://books.google.de/books?id=3EgkeRGtdkwC&pg=PA131&lpg=PA131&dq=%F6ffnungsgrad+von+aufgaben&source=bl&ots=XEdtFy5wL&sig=VC0yW0Lfvhy553RijklN1ISJ4&hl=de&ei=mGnQTKFVi5GzBr_prKgC&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2&ved=0CBsQ6AEwAQ#v=onepage&q=%C3%B6ffnungsgrad%20von%20aufgaben&f=false

Geben Sie eine Offene Aufgabe und Ihre erwarteten Lösungswege an, deren Thema “Vektorraum“ ist. (4 Punkte)