FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Übungszettel Nr. 8, Abgabe: 15.12.2010 um 12 Uhr

Lernziel: Bild-Kern-Algorithmus. Mathematische Probleme in Matrix-multiplikationsaufgaben umschreiben.

Aufgabe 1: a) Bestimmen Sie mit dem Bild-Kern-Algorithmus den Kern und das Bild der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(*2 Punkte*)

b) Geben Sie die allgemeine Lösung für das Gleichungssystem Ax=b mit der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$ an. (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Die Ableitung einer unbekannten (vielleicht nur als Computerprogramm vorliegenden) Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle x=2 soll näherungsweise bestimmt werden. Es sind vier Funktionswerte bekannt, f(1.7)= 1.56, f(1.9)=1.67, f(2.1)=1.73, f(2.3)=1.9.

a) Bestimmen Sie über die Lösung eines linearen 4x4-Gleichungssystems Ma=b ein Polynom 3.Grades $a \in P^3$, das f in den gegebenen Punkten *interpoliert* (mit f an den gegebenen Punkten übereinstimmt). Verwenden Sie die Darstellung eines Polynoms $a \in P^3$ als Koeffizientenvektor (wie auf dem letzten Zettel). Tipp: Lesen Sie sich die Anwendungsbeispiele auf folgender Internetseite durch: http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/1_gauss.htm (*5 Punkte*)

b) Erläutern Sie, warum die Formel $\lambda = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T AM^{-1}b$ die näherungsweise Ableitung $\lambda \in \mathbb{R}$ der Funktion f an der Stelle x=2 darstellt, wobei A die Matrix aus Aufgabe 3)a) auf dem 7.Zettel und M die Matrix aus dem Teil a) dieser Aufgabe ist. Tipp: Lesen Sie die Formel „von hinten nach vorne". Was ist $M^{-1}b$? Was ist $AM^{-1}b$?…(*3 Punkte*)

Bemerkung: *Löst man die Formel in 2)b) auf, dann kommt raus:*

$$\lambda = \frac{f_1 - 27f_2 + 27f_3 - f_4}{24\,\varepsilon},$$

wobei f_1, f_2, f_3, f_4 die Funktionswerte an den 4 Punkten sind. Die Punkte haben jeweils den Abstand ε voneinander und sind symmetrisch um x angeordnet. Bestimmt man mit dieser Formel zum Beispiel die Ableitung von cos(x), wobei wie oben $\varepsilon = 0.2$, so erhält man das richtige Ergebnis bis zur fünften Nachkommastelle. Sogenannte „numerische Differentiation" ist ein wichtiger Bestandteil vieler computerbasierter Verfahren.

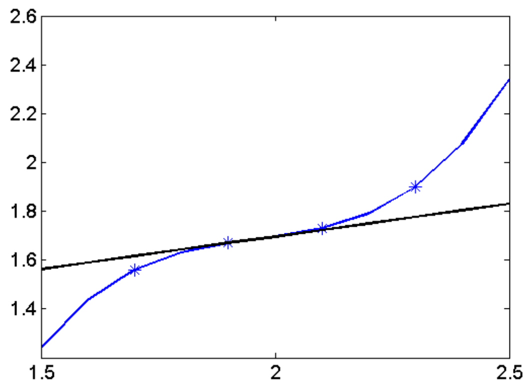

Abb.: Die nebenstehende Abbildung verdeutlich die Situation in Aufgabe 2). Es sind die vier gegebenen Funktionswerte (als Sternchen) zu sehen, das „Interpolationspolynom" (blaue Linie) und die daraus resultierende Ableitung an der Stelle x=2 (als schwarze Tangente).

Aufgabe 3: Beweisen Sie: Eine lineare Funktion $f: V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$. Tipp: Was ist f(a-b) für lineare Funktionen? (*3 Punkte*)

Aufgabe 4: (didaktische Aufgabe, getrennte Abgabe) Versetzen Sie sich in die Rolle eines Lehrers (Tutors), der folgende Lösungsvorschläge der Aufgabe 3 zur Bewertung von den Studierenden erhalten hat. Wie würden Sie die Lösungsvorschläge kommentieren? *(4 Punkte)*

LÖSUNGSVORSCHLAG 1: Für den Kern von f gilt ja immer f(x)=0. Alle Elemente aus dem Kern werden auf Null abgebildet. Sei also jetzt x aus dem Kern von f, dann ist x=0 wegen ker f={0}. Also wird nur die Null auf die Null abgebildet. Diese Abbildung ist injektiv. Die eine Richtung der Äquivalenz ist also bewiesen. Rückrichtung: Für jede lineare Abbildung gilt f(0)=f(0+0)=2 f(0), daher gilt immer f(0)=0. Für eine injektive lineare Abbildung darf also nur Null auf Null abgebildet werden, d.h. ker f={0}.

LÖSUNGSVORSCHLAG 2: Die Aufgabe ist falsch. Hier ein Gegenbeispiel: Für lineare Abbildungen gilt bekanntlich f(a-b)=f(a)-f(b). Jetzt soll (a-b) aus dem Kern von f sein, dann ist also 0=f(a-b), also 0=f(a)-f(b), also f(a)=f(b). Die Abbildung ist also nicht injektiv!

LÖSUNGSVORSCHLAG 3: Für lineare Abbildungen gilt f(a-b)=f(a)-f(b). Sei jetzt angenommen dass f(a)=f(b). Zu zeigen ist, dass daraus a=b folgt. Das geht so: Aus 0=f(a)-f(b)=f(a-b) folgt, dass a-b im Kern von f liegt. Also laut Voraussetzung ist a-b=0, da nur die Null im Kern von f liegt. Also folgt a=b. Daher ist f injektiv.