FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Übungszettel Nr. 9, Abgabe: 5.1.2011 um 12 Uhr

Lernziel: Basen von Vektorräumen. Lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen als Matrixmultiplikation schreiben.

Kolloquium: Es gibt einige unter Ihnen, die ich für die Zulassung zur Klausur im Februar (bzw. für die Erstellung eines Teilnahmescheines) vorher noch gern persönlich sprechen möchte. Daher plane ich am 10., 11. und 13. Januar 2011 jeweils pro Person ein 20-minütiges Kolloquium zu veranstalten. Zu diesem Kolloquium melden sich bitte alle Studierenden an, die

a) in den Vorlesungen / Übungen nicht regelmäßig anwesend sein konnten, oder

b) in den ersten 6 Übungszetteln weniger als 58 Punkte erreicht haben (die didaktische Aufgabe auf ÜZ 6 ausgenommen) oder

c) zur Klausurzulassung einen Teilnahmeschein aus einer anderen Veranstaltung vorbringen möchten.

Bitte suchen Sie sich rechtzeitig einen Termin pro Person bei Doodle aus (Sie brauchen nicht Ihren Namen anzugeben, ein selbsterfundenes Kürzel reicht aus).

<<…>>

Versuchen Sie, Überschneidungen mit dem eigenen Tutorium zu vermeiden. Bei Terminschwierigkeiten schicken Sie mir bitte eine eMail mit eigenen Terminvorschlägen. Das Kolloquium findet in meinem Büro (Zimmer 4035, Konrad-Zuse-Zentrum ZIB, 2.OG, Rundbau) in der Takustraße 7 („Hinterhof des pi-Gebäudes der Mathematik“) statt.

Ich weise jetzt schon darauf hin, dass es ein zweites Kolloquium geben wird (für diejenigen, die ich ein zweites Mal sprechen möchte, die weniger als 50% der Übungspunkte haben oder die in den Übungsgruppen nicht vorrechnen konnten). Dieses Kolloquium wird vermutlich am 7.Februar anstatt der Vorlesung durchgeführt.

Mit freundlichen Grüßen
Marcus Weber

JETZT ZU DEN AUFGABEN:

Aufgabe 1: a) Bestimmen Sie den Rang (Dimension des Bildes) der folgenden beiden Matrizen: (*3 Punkte*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Welche Dimension hat der Vektorraum $span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b\right)$, wobei $b \in \mathbb{R}^3$ mit $b \notin im\ A$? (*3 Punkte*)

c) Wie können Sie aufgrund des Resultats aus den Teilen a)+b) auf die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der folgenden Aussage schließen? (*1 Punkt*)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \in im\ A.$$

Bemerkung: *In der Vorlesung hatten Sie als Lösbarkeitsbedingung für ein lineares Gleichungssystem Ax=b gelernt, dass $b \in im\ A$ gelten muss. Eine äquivalente Formulierung für diese Bedingung wird in der Literatur häufiger angegeben: Der Rang der Matrix A und der Rang der „erweiterten" Matrix B (die Matrix A erweitert um die rechte Seite b der Gleichung) müssen gleich sein. In Aufgabe 1 wird die Bedingung $b \in im\ A$ (siehe 1c) mit der Rangbedingung in Verbindung gebracht.*

Aufgabe 2: Das Bild einer Matrix A wird durch die Spalten(vektoren) erzeugt. Anders formuliert: Die Spalten einer Matrix bilden ein Erzeugendensystem von *im A*. Betrachten Sie folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in im\ A$ stellt ein linear unabhängiges System in dem Vektorraum *im A* dar. Nach dem Basisergänzungssatz kann er durch Hinzunahme von Vektoren aus einem Erzeugendendensystem von *im A* (also: aus den Spalten von A) zu einer Basis von *im A* ergänzt werden. Wählen Sie Vektoren (einen, mehrere?) aus den Spalten von A aus, so dass Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von *im A* ergänzen. Zeigen Sie, dass es sich wirklich um eine Basis des (gesamten) Vektorraums *im A* handelt.
(*4 Punkte*)

Aufgabe 3: Mit dem Dimensions-Theorem und mit dem Basisergänzungssatz beweisen Sie bitte folgendes Korollar. (*5 Punkte*)

Korollar: Es sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist äquivalent:
(i) $\dim V \geq n$.
(ii) Es existiert in V ein linear unabhängiges System von n Vektoren.

Aufgabe 4: Es seien zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W gegeben. V habe eine Basis bestehend aus den beiden Vektoren $v_1, v_2 \in V$ und W habe eine Basis bestehend aus $w_1, w_2, w_3 \in W$. Ein beliebiger Vektor $v \in V$ lässt sich schreiben als $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ mit eindeutig bestimmten Linearfaktoren $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Analoges gilt für W, also $w = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \mu_3 w_3$. Nun soll $f: V \to W$ eine lineare Abbildung sein, für die gilt $f(v_1) = w_1 + w_2$ und $f(v_2) = w_2 + w_3$.

Wie sieht das Bild $f(v)$ für einen beliebigen Vektor $v \in V$ aus? Können Sie eine Matrix angeben, die die so definierte lineare Abbildung $f: \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$ darstellt?

(*4 Punkte*)

Bemerkung: *Bisher haben wir in der Vorlesung gelernt, dass die Matrixmultiplikation eine lineare Abbildung ist. Man könnte meinen, dass sie „nur“ ein Beispiel für eine lineare Abbildung ist. Aber wer das Verfahren aus Aufgabe 4 durchschaut hat, wird feststellen, dass jede lineare Abbildung zwischen zwei endlich erzeugten Vektorräumen durch eine Matrixmultiplikation dargestellt werden kann. Um die Matrix zu finden, muss man nur wissen, wie die Basisvektoren von V auf W abgebildet werden. Das ist eine extrem wichtige Erkenntnis der Linearen Algebra.*

Wer hier noch etwas „Nachhilfe benötigt“ möge sich das Kapitel 7.2 „Die Matrix einer linearen Abbildung“ in dem Springer-Buch „Lineare Algebra“ (2003) von Gilbert Strang anschauen (Vorlesungs-Homepage, Bibliothek!!!). Hier taucht auch wieder die Ableitung (aus den Übungszetteln 7 und 8) als Beispiel für eine lineare Abbildung auf und zudem noch die Integration (als schlau konstruierte „Inverse“, obwohl es die „echte“ Inverse zur Ableitung gar nicht gibt, wie Sie sich vielleicht schon klargemacht haben).