Musterlösung zu Übung 11 in LinA I (LA)

-Dominik Puhst-

Aufgabe 1:

Die geforderte Multiplikationstabelle sieht folgendermaßen aus:

·	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

Wie sind wir nun darauf gekommen. Ich rechne das anhand eines Beispieles vor:

$$[2]\cdot[2]:(4\mathrm{k}+2)\cdot(4\mathrm{l}+2)=16\mathrm{kl}+8\mathrm{k}+8\mathrm{l}+4=4(4\mathrm{kl}+2\mathrm{k}+2\mathrm{l}+1)\in[0],k,l\in\mathbb{Z}$$

Anhand der Multiplikationstabelle können wir nun z.B. erkennen, dass die Gleichung $[2]\cdot x=[3]$ keine Lösung besitzt. In einer Gruppe wäre dies aber der Fall. Das liegt daran, dass es kein linksinverses Element zu [2] gibt (das linksneutrale Element ist ja [1]).

Aufgabe 2:

Zwei Ebenen sind parallel, wenn deren beiden Normalenvektoren linear abhängig sind. Wir bringen dazu beide(!) Ebenen in die HNF und vergleichen die Normalenvektoren. Um später eine Aussage zum Abstand machen zu können, normieren wir die Normalenvektoren.

Zunächst zu Ebene1. Finden wir zunächst einen Normalenvektor, also eine Basis des eindimensionalen (!) Kerns der von den Richtungsvektoren aufgespannten Zeilenmatrix.

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ -2 & -3 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 1 & -0{,}5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Hier können wir nun einen senkrechten Vektor ablesen, der leider noch nicht die Länge 1 hat. Um ihn zu normieren teilen wir jede Komponente durch die aktuelle Länge und erhalten:

$$n_1=\begin{pmatrix}1/3\\ 2/3\\ 2/3\end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun Ebene2. Den senkrechten Vektor können wir bereits ablesen, er setzt sich einfach aus den Faktoren der x_i zusammen. Wenn wir auch diesen normieren erhalten wir:

$$n_2=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

Nun können wir schon feststellen, dass die beiden Ebenen parallel zueinander liegen, da die normierten Normalenvektoren gleich sind.
Um eine Aussage zum Abstand machen zu können stellen wir nun die HNF auf. Dazu müssen wir nur die jeweiligen rechten Seiten herausfinden. Dies erreichen wir, indem wir bei Ebene1 den Stützvektor skalar mit dem Normalenvektor multiplizieren und bei Ebene2, indem wir die bereits vorhandene Gleichung durch 3 teilen. So erhalten wir:

$$E_1: n_1^T x=2, \qquad E_2: n_2^T x=-7$$

Wegen $n_1=n_2$ beträgt der Abstand der beiden Ebenen gerade 9LE. (Um vom Ursprung zu Ebene1 zu gelangen benötigt man $2n_1$, um vom Ursprung zu Ebene2 zu gelangen $-7n_2$. Also liegen die Ebenen bezogen auf den Ursprung „gegenüber“ und die Beträge der Abstände addieren sich.)

Aufgabe 3:

Um a) und b) sinnvoll bearbeiten zu können, versuchen wir zunächst beide Ebenengleichungen in die HNF zu bringen. Insbesondere benutzen wir Normalenvektoren der Länge 1.
Bei Ebene1 hat der Normalenvektor noch die Länge 3, also schreiben wir um zu:

$$E_1: \frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=-\frac{1}{3}$$

Um Ebene2 in die entsprechende Form zu bringen, benutzen wir wieder den Bild-Kern-Algorithmus. Das Verfahren erfolgt analog zu Aufgabe 2:

$$\begin{pmatrix}-3&4&-1\\1&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&4/3&2/3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&4/3&-1/3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&4/3&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&4/3&-1\\0&1&-1/2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor wäre als die rechte Spalte der umgeformten Einheitsmatrix. Dieser hat aber offenbar nicht die Länge 1, sondern die Länge 1,5. Entsprechendes stauchen liefert:

$$n_2=\begin{pmatrix}-2/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}$$

Also sieht die HNF so aus: $E_2: -\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=d$, wobei d noch gesucht wird. Einsetzen des Aufpunktes liefert:

$$d=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad E_2: -\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=\frac{1}{3}$$

Nun können wir uns endlich den Aufgaben widmen.

a) $$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 = -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad -\frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 = \frac{1}{3} \right\}$$

Gesucht ist also wieder die allgemeine Lösung eines LGS. Dazu berechnen wir zunächst den Kern der zugehörigen Matrix A:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen als Basiselement des Kerns die mittlere Spalte der umgeformten Einheitsmatrix. Nun benötigen wir noch eine partikuläre Lösung. Dabei sei die umgeformte Einheitsmatrix von nun an mit R bezeichnet.

$$AR \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung wäre z:B: $y_1 = -0{,}5,\, y_2 = 0,\, y_3 = 0$. Dann ist eine Lösung des Ausgangsproblems:

$$x_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Ry = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Gleichungen als Probe ergibt, dass wir uns nicht verrechnet haben. Die Parametergleichung der Schnittgerade ist also:

$$g_{E_1 \cap E_2} : \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Der Schnittwinkel ϕ errechnet sich jetzt sehr leicht. Er ist einfach der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren.

$$\cos(\phi) = \frac{n_1^T n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{-\frac{4}{9} - \frac{1}{9} + \frac{4}{9}}{1} = -\frac{1}{9}$$

Hieraus erhalten wir zunächst $\phi \approx 96{,}38°$ bzw. $\phi' \approx 83{,}62°$.

b) Nun suchen wir die beiden winkelhalbierenden Ebenen. Das geht nun recht schnell: Die Normalenvektoren ergeben sich durch Addition bzw. Subtraktion der (normierten) Normalenvektoren von Ebene1 und Ebene2 und der Aufpunkt der Schnittgerade liegt mit Sicherheit in beiden winkelhalbierenden Ebenen. So erhalten wir direkt:

$$E_{W1} : \frac{4}{3} x_3 = 0$$

$$E_{W2} : -\frac{4}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 = \frac{2}{3}$$

Diese sind jetzt zwar nicht normiert, doch das stört auch nicht weiter, da wir mit ihnen nicht weiterrechnen müssen.

Aufgabe 4:

Zunächst zur Parallelität: Zwei Geraden sind parallel, wenn der zugehörige eindimensionale Unterraum bei beiden gleich ist, also wenn gilt:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schon durch mittelscharfes Hinsehen können wir erkennen, dass dieses λ gerade -0,5 ist und folglich existiert.

Die beiden Geraden sind nun identisch, wenn durch die Gleichungen derselbe affine Unterraum beschrieben wird, also wenn die Differenz der Aufpunkte im Unterraum liegt, oder formal:

$$\exists \mu \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall, weswegen die Geraden nicht identisch sein können.