Musterlösung zu Übung 12 in LinA I (LA)

-Dominik Puhst-

Aufgabe 1:

Das Volumen des von den vier gegebenen Vektoren aufgespannten Parallelepipeds entspricht der Determinante der Matrix

$$A=(a_{ij})_{i,j=1,..,4}=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

Um die Determinante zu berechnen könnten wir entweder nach der 4. Spalte entwickeln oder aber Gauss-Umformungen durchführen um an den Stellen a_{21}, a_{32} und a_{43} Nullen zu erzeugen. Dann:

$$det(A)=det(\begin{pmatrix}1&2&3&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix})\overset{Z_2-Z_1}{=}det(\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-1&-3&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix})\overset{Z_3+Z_2}{=}det(\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-1&-3&0\\0&0&-2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix})$$

$$\overset{Z_4+0{,}5Z_3}{=}det(\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-1&-3&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix})=1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 1=2$$

Der aufgespannte Parallelepiped hat also ein Volumen von 2VE.

Aufgabe 2:

Wir sollen eine Berechnungsvorschrift für alle natürlichen Zahlen zeigen. Als Beweisstruktur bietet sich daher die vollständige Induktion an. Dabei ist zunächst festzustellen, dass die Formel nur für $n\geq 2$ definiert ist.

I.A.: $n=2$: z.z.: $det(\begin{pmatrix}1&x_1\\1&x_2\end{pmatrix})=\prod_{1\leq j<i\leq 2}(x_i-x_j)$

l.S.: $det(\begin{pmatrix}1&x_1\\1&x_2\end{pmatrix})=x_2-x_1$

r.S.: $\prod_{1\leq j<i\leq 2}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)$

Wegen r.S. = l.S. ist der Induktionsanfang erfüllt.

I.S.: $n\rightarrow n+1$: z.z.: $det(\begin{pmatrix}1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_{n+1}&x_{x+1}^2&\cdots&x_{n+1}^n\end{pmatrix})=\prod_{1\leq j<i\leq n+1}(x_i-x_j)$

unter der Voraussetzung (I.V.), dass diese Formel für n bereits erfüllt ist.

$$det\left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{Z_k - x_1 \cdot Z_{k-1}, k=2,\ldots,n}{=} det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 & \cdots & x_2^n - x_2^{n-1} x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_{n+1} x_1 & \cdots & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} x_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{ausklammern}}{=} det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \cdots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{nach Determinantenregeln}}{=} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_{n+1} - x_1) \cdot det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{x+1}^{n-1} \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{Entw. nach } Z_1}{=} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_{n+1} - x_1) \cdot det\left(\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}\right)$$

An dieser Stelle haben wir wieder eine nxn-Matrix, die nach I.V. die Formel erfüllt:

$$\overset{\text{IV}}{=} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(n_{n+1} - x_1) \prod_{2 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j)$$

$$\overset{\text{hereinziehen in das Produkt}}{=} \prod_{1 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j)$$

Und das war das zu zeigende.

Aufgabe 3:

Wir verfahren zunächst wie gewohnt und verwenden den Bild-Kern-Algorithmus um den Kern zu bestimmen. Dabei müssen wir uns überlegen, dass Subtraktion nichts anderes als die Addition mit dem Inversen ist. Im Fall des gegebenen Körpers ist also z.B. $-[1]=[2]$. Es bietet sich also an die Additions- und Multiplikationstafel wenigstens vor dem inneren Auge zu haben.

$$\begin{pmatrix} [1] & [1] & [0] \\ [2] & [0] & [1] \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}$$

$$\downarrow S_2 + [2] S_1$$

$$\begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] \\ [2] & [1] & [1] \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} [1] & [2] & [0] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}$$

$$\downarrow S_3 + [2] S_2$$

$$\begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] \\ [2] & [1] & [0] \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} [1] & [2] & [1] \\ [0] & [1] & [2] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}$$

Anhand dieser Umformungen erkennen wir, die das LGS beschreibende Matrix A nennend:

$$ker(A) = span(\begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [1] \end{pmatrix})$$

Wir suchen nun also noch eine spezielle Lösung des LGS mit der gegebenen rechten Seite. Diese können wir allerdings in diesem speziellen Fall ganz leicht ablesen. So erhalten wir:

$$a_p = \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix}$$

Dann ist also die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [1] \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \right\}$$

Da wir nun aber alle Lösungsvektoren explizit kennen wollen, setzen wir für λ einfach nacheinander alle Elemente des zugrundeliegenden Körpers ein. So erhalten wir:

$$a_1 = \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix} + [0] \cdot \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix} + [1] \cdot \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1] \\ [1] \\ [1] \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix} + [2] \cdot \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [2] \\ [1] \\ [2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2] \\ [0] \\ [2] \end{pmatrix}$$

Eine bei solch ungewohnten Rechnungen zu empfehlende Probe bestätigt die Ergebnisse. Wir haben also als finale Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} [0] \\ [2] \\ [0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [1] \\ [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [2] \\ [0] \\ [2] \end{pmatrix} \right\}$$