Musterlösung zu Übung 6 in LinA I (LA)

-Dominik Puhst-

Aufgabe 1:

Wir erstellen eine Matrizengleichung auf, die das LGS beschreibt, zunächst zu einer unbestimmten Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Nun formen wir nach Gauß äquivalent um und erzeugen Nullen in der ersten Spalte unter der 2, indem wir das doppelte der ersten Zeile von der zweiten abziehen bzw. die erste zur dritten addieren:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2\mathrm{b}_1 \\ b_3 + b_1 \end{pmatrix}$$

Als nächstes muss in der dritten Zeile in der zweiten Spalte eine weitere Null erzeugt werden:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2\mathrm{b}_1 \\ (b_3 + b_1) - (b_2 - 2\mathrm{b}_1) \end{pmatrix} \quad (☼)$$

Setzen wir nun die Werte $b_1=2$, $b=8$ und $b_3=10$ ein, so erhalten wir das spezifische LGS:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Hier sind wir soweit die Lösungen einfach abzulesen und erhalten $x_3=2$, $x_2=2$ und $x_1=-1$.

Aufgabe 2:

a) Zum Glück haben wir Aufgabe 1 zunächst unbestimmt behandelt. So können wir nun (☼) verwenden und setzen die entsprechenden rechten Seiten ein:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}75 \\ -2{,}75 \\ 0{,}75 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}75 \\ 1{,}25 \\ -0{,}25 \end{pmatrix} \text{ sowie}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

b) Sieht man sich die erhaltenen Lösungen an, kann man sich schnell klarmachen, dass man die Inverse zur gegebenen Matrix A einfach erhält, indem man die Lösungen der Gleichungssysteme in Aufgabenteil a spaltenweise in eine Matrix bringt. (Man überlege sich wie die Spalten einer Produktmatrix entstehen.)

So erhalten wir:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 6{,}75 & -2{,}75 & 0{,}75 \\ -2{,}75 & 1{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}75 & -0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

(Wem das nicht klar ist, der berechne einfach $A*A^{-1}$ und vergleiche mit den Rechnungen aus 2a)

<u>Aufgabe 3:</u>

Um die Gültigkeit der Formel nachzuweisen berechnen wir schlicht zunächst die linke, dann die rechte Seite und vergleichen die ausmultiplizierten Ergebnisse.

Linke Seite: $$a\times(b\times c)=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_2c_3-b_3c_2 \\ -b_1c_3+b_3c_1 \\ b_1c_2-b_2c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(-b_1c_3+b_3c_1) \\ -a_1(b_1c_2-b_2c_1)+a_3(b_2c_3-b_3c_2) \\ a_1(-b_1c_3+b_3c_1)-a_2(b_2c_3-b_3c_2) \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren nun aus und sortieren die Summanden aufsteigend nach den Indizes der a_i bzw. bei Gleichheit nach den Indizes der b_i oder c_i.

$$=\begin{pmatrix} a_2b_1c_2-a_2b_2c_1+a_3b_1c_3-a_3b_3c_1 \\ -a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_3b_2c_3-a_3b_3c_2 \\ -a_1b_1c_3+a_1b_3c_1-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2 \end{pmatrix}$$

Rechte Seite: $$(a^Tc)b-(a^Tb)c=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)*\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)*\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1b_1c_1+a_2b_1c_2+a_3b_1c_3-a_1b_1c_1-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1+a_2b_2c_2+a_3b_2c_3-a_1b_1c_2-a_2b_2c_2-a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1+a_2b_3c_2+a_3b_3c_3-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3 . a_3b_3c_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_2b_1c_2-a_2b_2c_1+a_3b_1c_3-a_3b_3c_1 \\ -a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_3b_2c_2-a_3b_3c_2 \\ -a_1b_1c_3+a_1b_3c_1-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2 \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun die rechte und die linke Seite vergleichen, stellen wir fest, dass sie identisch sind. Damit wäre die Aussage bewiesen.