Musterlösung zu Übung 8 in LinA I (LA)

-Dominik Puhst-

Aufgabe 1:

a) Wir schreiben wie gewohnt die gegebene Matrix A links neben die 4-dimensionale Einheitsmatrix und führen Spaltenoperationen derart durch, dass wir eine linke untere Dreiecksmatrix erhalten.

$$\text{A}\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \leftarrow \text{E}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{A*R}\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \leftarrow \text{E*R}$$

Hier können wir eine Basis des Bildes und des Kerns ablesen und erhalten (1):

$$im(A)=span(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}), ker(A)=span(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix})$$

b) Zunächst machen wir uns klar, dass b im Bild von A liegt. Das ist der Fall. Das bedeutet, dass das LGS lösbar, nicht aber eindeutig lösbar ist. Wir benötigen nun also eine spezielle Lösung x. Um $A*x=b$ zu lösen können wir auch $A*R*y=b$ lösen, um dann x durch $R*y=x$ zu erhalten.
Wir können ablesen, dass $y_1=4$ und $y_2=18/3$ gelten muss. y_3 und y_4 sind beliebig, wir setzen sie für die spezielle Lösung einfach jeweils 0. Dann erhalten wir x wie folgt:

$$x=R*y=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}4\\18/3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\6\\0\\0\end{pmatrix}$$

So bekommen wir die allgemeine Lösung über das spezielle x und den Kern als

$$L=\left\{\begin{pmatrix}-8\\6\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}:\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\right\}$$

Aufgabe 2:

a) Wir versuchen die Funktion durch ein Polynom dritten Grades zu interpolieren. Dann erhalten wir dieses Polynom als Lösung des folgenden – zugegebenermaßen hässlichen - linearen Gleichungssystems, welches massiv gegaußt wird:

$$\begin{pmatrix} 1{,}7^3 & 1{,}7^2 & 1{,}7 & 1 \\ 1{,}9^3 & 1{,}9^2 & 1{,}9 & 1 \\ 2{,}1^3 & 2{,}1^2 & 2{,}1 & 1 \\ 2{,}3^3 & 2{,}3^2 & 2{,}3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}56 \\ 1{,}67 \\ 1{,}73 \\ 1{,}9 \end{pmatrix}$$

So etwas muss man einfach mal gemacht haben. Als Hinweis sei noch angemerkt, dass es an manchen Stellen[(2)] hilfreich sein kann eine ganze Zeile mit einem Skalar zu multiplizieren (also zu erweitern). So kann man Brüche oder unelegante „Kommazahlen" in der Matrix vermeiden.
Man erhält dann als Lösung:

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ -157/8 \\ 1163/30 \\ -19203/800 \end{pmatrix}$$

b) Wie in der Aufgabenstellung angegeben betrachten wir die Formel von rechts nach links.

Was ist $M^{-1}*b$?

M ist die Matrix aus a) und b die rechte Seite. Dann gilt ja $M*a=b$. Multiplizieren wir nun das Inverse von M von links heran (das Inverse existiert, da der Rang voll ist) erhalten wir $M^{-1}*M*a=M^{-1}*b$ und somit $a=M^{-1}*b$. Folglich wird durch $M^{-1}*b$ gerade das Interpolationspolynom beschrieben.

Was ist $A*M^{-1}*b$?

A sei die Matrix aus der dritten Aufgabe des letzten Übungszettels, also die Matrix, die von links an ein Polynom heranmultipliziert gerade die Ableitung dieses Polynoms bildet. Dann ist $A*M^{-1}*b=A*a=a'$.

Was ist $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}*A*M^{-1}*b$?

Das ist einfach das Skalarprodukt des Vektors mit der Ableitung des Interpolationspolynoms. Wer sich das mal vorstellt erkennt schnell, dass wir dann einfach in a' für x^3 8, für x^2 4, für x 2 und für 1 eben 1 einsetzen. Somit handelt es sich einfach um die erste Ableitung des Interpolationspolynoms an der Stelle 2.

Aufgabe 3:

Es müssen beide Richtungen gezeigt werden. Also $f\ injektiv \Rightarrow ker(f)=\{0\}$ [(3)] und $f\ injektiv \Leftarrow ker(f)=\{0\}$

" $\Rightarrow$ " Sei $a\in ker(f)$, $b\in V$
dann gilt: $f(a+b)=f(a)+f(b)=0+f(b)=f(b)$
und weil f injektiv ist: $f(a+b)=f(b) \Rightarrow a+b=b \Rightarrow a=0$

" $\Leftarrow$ " Hier führen wir mal einen Beweis durch Kontraposition. Dann ist zu zeigen:

$$f\ nicht\ injektiv \Rightarrow ker(f) \neq \{0\}$$

Sei also $f\ nicht\ injektiv$, dann $\exists a, b \in V : a \neq b \wedge f(a) = f(b)$ und weil f ja linear ist: $f(a-b) = f(a) - f(b) = 0$ (4), also gilt offenbar $(a-b) \in ker(f)$, aber wegen $a \neq b$ ist das gerade nicht der Nullvektor. Der Kern besteht demnach nicht nur aus dem Nullvektor.

q.e.d.

(1): Dass eine Basis des Bildes von A gerade 2 Elemente enthält, kann man schon durch Betrachten der Ausgangsnatrix A herausfinden, da ja die Dimension des Bildes einer Matrix gerade ihrem Rang entspricht und Zeilenrang und Spaltenrang stets gleich sind. Sieht man sich nun also die Zeilen von A an, so erkennt man, dass die dritte Zeile keine bahnbrechenden neuen Informationen enthält, die ersten beiden aber linear unabhängig sind.

(2): Das ist natürlich grundsätzlich Geschmackssache. Ich habe deswegen an manchen Stellen geschrieben, weil es durchaus auch vorkommen kann, dass sich Brüche ganz ausgezeichnet zum Weiterrechnen eignen und durch die Erweiterung die Einträge der Matrix unhandlich groß werden.

(3) Mit der 0 ist stets der jeweilige Nullvektor gemeint. Bei Betrachtung des Kerns soll die Null also für den Nullvektor aus V stehen, betrachten wir das Bild (also z.B. f(a)-f(b)=0), dann ist mit 0 der Nullvektor aus W gemeint.

(4) (a-b) ist hierbei die Kurzschreibweise für a+(-b), wobei (-b) das additiv inverse Element zu b ist, das stets existiert, da (V,+) ja eine abelsche Gruppe bildet. Man kann (-b) auch schreiben als (-1)*b, mit (-1) als additiv Inversem des multiplikativ neutralen Elements des zugrundeliegenden Körpers K. Wenn man das so schreibt, dann kann man sich klar machen, warum auch f(a-b)=f(a)-f(b) gelten muss, denn jetzt beziehen wir uns nur noch auf die bekannten Verknüpfungen der Addition und Multiplikation.