Musterlösung zu Übung 9 in LinA I (LA)

-Dominik Puhst-

Aufgabe 1:

a) Ich berechne hier jeweils den Spaltenrang. Zeilenrang ginge selbstverständlich ebenso.

$$rg(A) = rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right) = rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$rg(B) = rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right) = rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

b) Nach Aufgabenteil a) ist der von den drei Vektoren, die die Spalten von A bilden, aufgespannte Vektorraum zweidimensional. Da $b \notin \mathrm{im}(A)$, kann b nicht aus den Spalten von A, also den drei gegebenen Vektoren, erzeugt werden, ist also nicht als Linearkombination dieser darstellbar. Somit erhöht sich die Dimension durch Hinzunahme von b um eins. Die gesuchte Dimension ist demnach 3.

c) Wäre der gegebene Vektor <u>nicht</u> im Bild von A, so müsste die Dimension der Matrix B aus Aufgabenteil a) nach den Erkenntnissen aus Aufgabenteil b) um eins höher sein als die Dimension der Matrix A. Dies ist nicht der Fall. Demnach muss er im Bild von A liegen.

Aufgabe 2:

Man berechne zunächst die Dimension des Bildes von A, um zu wissen aus wie vielen Elementen die Basis bestehen muss. Den Zeilenrang kann man direkt ablesen. Er beträgt 2, also muss a um einen weiteren Vektor $b \in \mathrm{im}(A)$ ergänzt werden, sodass a und b linear unabhängig sind. (Eine Basis ist ja ein maximal linear unabhängiges System bzw. minimales Erzeugendensystem. Wegen $dim(A) = 2$ benötigen wir also 2 linear unabhängige Vektoren aus dem Bild). Nach diesen Vorüberlegungen wäre $span(a, b)$ (mit b aus den Spalten von A) genau dann eine Basis, wenn:

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vee b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Aufgabe 3:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sie $dim\, V = m,\, m \in \mathbb{R}$. Wir machen jetzt der Einfachheit halber einen Fallunterscheid.

Fall 1: sei $m > n$. Eine Basis von V besteht dann aus m Elementen und ist per definitionem ein linear unabhängiges System. D.h. es gibt ein linear unabhängiges System von m Elementen. Entfernen wir nun m-n Elemente aus dem System, so bleibt die lineare Unabhängigkeit erhalten. Es gibt also insbesondere ein linear unabhängiges System von n Elementen.

Fall 2: sei $m = n$. Eine Basis von V besteht wieder aus m Elementen und ist demnach sofort ein linear unabhängiges System von n Elementen.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Diese Richtung ergibt sich aus dem Basisergänzungssatz und der Definition von Basis.

Fall 1: Das linear unabhängige System mit n Elementen ist bereits maximal. Dann handelt es sich um eine Basis und $\dim V = n$.

Fall 2: Das linear unabhängige System mit n Elementen ist nicht maximal. Dann lässt es sich durch Hinzunahme von geeigneten Elementen aus V zu einer Basis erweitern. Es folgt $\dim V > n$

Aufgabe 4:

Sei $B_V := \{v_1, v_1\}$ die gegebene Basis von V und $B_W := \{w_1, w_2, w_3\}$ die gegebene Basis von W. Aus $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, $f(v_1) = w_1 + w_2$, $f(v_2) = w_2 + w_3$ und mit der Information, dass f linear ist, können wir $f(v)$ allgemein wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \\ &= \lambda_1 (w_1 + w_2) + \lambda_2 (w_2 + w_3) \\ &= \lambda_1 w_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) w_2 + \lambda_2 w_3 \end{aligned}$$

Die Abbildung f bildet also einen Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{B_V}$ auf einen Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{B_W}$ ab. Dann ist die f zugeordnete Matrix bezüglich der Basen B_V und B_W gerade

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(1): Warum klappt das bei diesen beiden Vektoren? In diesem Fall mögen das einige noch „sehen“, im allgemeinen Fall muss nachgewiesen werden, dass a und b linear unabhängig sind. Die notwendige Rechnung führe ich hier für das erstgenannte b beispielhaft durch. Wir erinnern uns dazu, dass Vektoren linear unabhängig sind, wenn der Nullvektor nur als triviale Linearkombination aus ihnen erzeugt werden kann (also, wenn für λ_1 und λ_2 <u>nur</u> 0 in Frage kommt):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$