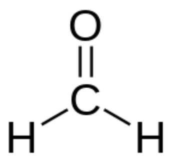
FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 2, Abgabe 24.04.2019

Lernziel: Wissen, was eine Gruppe (ein Körper) ist und verstehen, warum man *alle* Gruppen-(Körper-)Eigenschaften benötigt, um einfache (lineare) Gleichungen zu lösen. Distributivgesetz (z.B. binomische Formeln) anwenden können, um aus Summen Produkte oder aus Produkten Summen zu machen. Mathematische Terme umformen können.

Aufgabe 1: (Symmetriegruppen)

Formaldehyd hat folgende Lewis-Formel:



a) Formaldehyd hat eine bestimmte Molekül-Symmetrie. Diese Symmetrie wird in Form einer Symmetriegruppe mit einer entsprechenden Verknüpfungstafel (Hintereinanderausführen der Symmetrieoperationen) ausgedrückt. Füllen Sie die Verknüpfungstafel vollständig aus:

+	**1**	**s_h**	**s_v**	**d_{180}**
1	**1**	s_h	s_v	d_{180}
s_h	s_h		d_{180}	
s_v	s_v			
d_{180}	d_{180}			

(1=Identität, s_h=Spiegelung an der "Papierebene", s_v=Spiegelung an der Ebene, die orthogonal zum Papier verläuft, d_{180}=Drehung um 180° mit Drehachse entlang der C=O-Bindung)

b) Ist die entstandene Symmetriegruppe abelsch? Begründen Sie!

c) Lösen Sie die Gleichung $s_h + x = s_v$ durch Umformung nach x auf. Schreiben Sie bei jedem Schritt der Umformung auf, welche Eigenschaft einer Gruppe Sie dabei verwendet haben. Wo verwenden Sie das Assoziativgesetz?

Aufgabe 2: (Körper)

Gegeben ist ein Körper mit vier Elementen {[0], [1], [2], [3]} und folgenden Verknüpfungstafeln:

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[0]	[3]	[2]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[2]	[1]	[0]

·	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[3]	[1]
[3]	[0]	[3]	[1]	[2]

Lösen Sie in diesem Körper durch Umformungen folgende Gleichungen. Zeigen Sie bei a), welche Rechengesetze des Körpers Sie benötigen:

a) $[2]\cdot \boldsymbol{x} + [\mathbf{1}] = [2] + \boldsymbol{x}\cdot[3]$ **b)** $\boldsymbol{x} + [\mathbf{2}] = [2]\cdot \boldsymbol{x}$

Aufgabe 3: (mathematische Terme vereinfachen)

Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) $\frac{z^3-3z^2-3z-4}{z^2-z-12}$ **b)** $(a+b)^2-(a-b)^3$

c) $\sqrt{\frac{4a}{ax^2+2axy+ay^2}}$ **d)** $\frac{a^2x+a^2y}{x+y}+\frac{2axb+2ab}{x+1}-(a+b)^2$

e) $\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\,y^k}$ **(Tipp: nach "Binomialkoeffizient" googeln)**

f) $\left(\frac{x^3y^{-4}}{y^{-5}y^2}\right)^{-2}$

Als Faustregel für solche Ausdrücke gilt: Wenn Sie die obigen mathematischen Ausdrücke vereinfachen wollen, dann überlegen Sie sich zunächst, welche Rechenoperation Sie *als letztes* ausführen würden, wenn Sie den Ausdruck ausrechnen wollten (und für alle Variablen auch Zahlenwerte vorliegen würden). **Regel 1:** Handelt es sich bei der letzten Aktion um eine Addition/Subtraktion, dann versuchen Sie, mittels "Klammern auflösen" (Distributivgesetz bzw. binomische Formeln) möglichst viele Additionen bzw. Subtraktionen zu erzeugen, um dann

Summanden sich gegenseitig aufheben zu lassen. Evtl. Vorzeichenumkehr beachten. Beispiel:

$$-(a+b)^2+2ab$$

Lägen Werte für a und b vor, dann würde man zunächst den Ausdruck $-(a+b)^2$ ausrechnen, danach $2ab$ und als *letzte Aktion* beides addieren. Also muss man laut Regel 1 viele Summen erzeugen.

$$-(a+b)^2+2ab=-(a^2+2ab+b^2)-2ab=-a^2-2ab-b^2+2ab=-a^2-b^2$$

Regel 2: Handelt es sich bei der letzten Aktion um eine Multiplikation, Division oder Wurzel, dann versuchen Sie mittels "Klammern erzeugen" (Distributivgesetz bzw. binomische Formeln, Polynomdivision/faktorisierung, ggT) möglichst alles als Multiplikation von Klammerausdrücken zu schreiben und danach z.B. gleiche Faktoren aus Brüchen zu kürzen. Hinweis: x+y kann man auch als $1\cdot(x+y)$ schreiben. Beispiel:

$$\frac{x+y}{x^2-y^2}=\frac{1\cdot(x+y)}{(x+y)\cdot(x-y)}=\frac{1}{x-y}$$

Hat man eine Summe von Brüchen zu vereinfachen, dann kann man zunächst jeden Bruch einzeln nach obiger Regel 2 vereinfachen. Bleiben Brüche übrig, fasst man sie zu einem großen Bruch zusammen (Nenner gleichnamig machen) und wendet erneut die Regel 2 an. Bleiben nur Summanden übrig, gilt entsprechende Regel 1.

Aufgabe 4: (Gleichungen nach einer Variablen umstellen)

a) Lösen Sie die Nernst-Gleichung (bekannt aus der Elektrochemie) nach a_{red} auf:

$$E=E^o+\frac{RT}{z_0F}\ln\left(\frac{a_{ox}}{a_{red}}\right).$$

b) Lösen Sie Formel für die Dispersionswechselwirkung zweier Atome (London-Formel) nach I_B auf:

$$E_{AB}^{disp}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{I_AI_B}{I_A+I_B}\cdot\frac{\alpha^A\alpha^B}{R^6}.$$

c) Zeigen Sie, dass der Ausdruck $2\cdot\frac{I_AI_B}{I_A+I_B}$ in der obigen Formel dem harmonischen Mittelwert der beiden Größen I_A und I_B entspricht.

Faustregel: Wenn Sie Gleichungen nach einer Variablen umstellen sollen, dann schauen Sie sich zunächst den Teil der Gleichung an, in dem die entsprechende Variable steht. Wie in Aufgabe 3 ermitteln Sie wieder die letzte Rechenoperation, die auf dieser Seite der Gleichung ausgeführt werden muss, um deren Wert zu errechnen. Diese Rechenoperation können Sie "umkehren", indem Sie bei einem

Produkt z.B. durch die entsprechende Größe teilen oder bei einer Summe den entsprechenden Term abziehen. Logarithmieren und Radizieren lassen sich auch entsprechend durch Exponieren und Potenzieren umkehren. WICHTIG: Führen Sie diese Aktion stets auf beiden Seiten der Gleichung durch. Lesen Sie sich auch zum Lösen die Logarithmen-Gesetze durch. Mit Hilfe des Klammern-Auflösens bzw. Klammer-Erzeugens (Distributivgesetze), können Sie versuchen, auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche "Struktur" (Multiplikation/Addition) zu erzeugen, das hilft oft. ÜBEN SIE DAS UMSTELLEN VON GLEICHUNGEN!!!!!!

Viel Erfolg!