FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 3, Abgabe 08.05.2019

Lernziel: Komplexe Zahlen als Körper verstehen und solche Zahlen in beide Darstellungsformen (kartesisch, polar) umrechnen können. Die n n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl ausrechnen können. Die Begriffe "Betrag", "Real- und Imaginärteil" verstehen. Den Zusammenhang zwischen komplexen Zahlen und 2D-Geometrie kennen und einfache Beispiele von Ursprungs-Rotationen (Multiplikation), Translationen (Addition) und x-Achsen-Spiegelungen (Konjugation) rechnen können.

Aufgabe 1: (Rechenregeln für komplexe Zahlen)

a) Berechnen Sie jeweils die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotient der folgenden komplexen Zahlen w und z. Stellen Sie das Ergebnis in der kartesischen Form x+iy dar:

$z = 2 + 4i, \quad w = 3 - i$

und

$z = 2e^{i\pi/3}, \quad w = \frac{1}{2}e^{i\pi/2}$

Hinweis: Zahlen in kartesische Darstellungsform bringen, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Berechnen Sie alle Lösungen w der Gleichung

$$w^3 = \frac{8\sqrt{3}}{2} + 4i.$$

Hinweis: Am besten rechnen Sie zunächst die rechte Seite der Gleichung in Polarkoordinaten um. Danach berechnen Sie alle dritten Wurzeln gemäß der entsprechenden Formel.

c) Nennen Sie den Betrag, den Real- und den Imaginärteil, sowie die konjugiert komplexe Zahl von $2e^{i\pi/3}$ und von $\frac{2+4i}{3-i}$.

Aufgabe 2: (Umkehrung der Exponentialfunktion, komplexer Logarithmus)

Berechnen Sie alle Lösungen w der Gleichung:

$$e^w = \sqrt{3} - i.$$

Hinweis: w muss eine komplexe Zahl sein, also $w = x + iy$. Damit gilt $e^w = e^x e^{iy}$. Also: e^x muss der Betrag der komplexen Zahl auf der rechten Seite sein und y ihr Argument (beachten Sie die 2π-Periodizität des Arguments). Was ist also x und was ist y?

Aufgabe 3: (Die verallgemeinerte Kreisgleichung)

Man kann einen Kreis auf verschiedene Weisen durch eine algebraische Gleichung ausdrücken. In der Schule lernt man vielleicht die Gleichung (aus dem Satz des Pythagoras abgeleitet):

$$(x - m_x)^2 + \left(y - m_y\right)^2 = r^2.$$

Die gegebenen reellen Zahlen $m_x, m_y \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ geben dabei die Koordinaten des Kreismittelpunktes und seinen Radius an. Die reellen Lösungspaare (x, y) der Gleichung sind dann alle Punkte, die auf der Kreislinie liegen (die vom Mittelpunkt den Abstand r haben). Mit Hilfe der komplexen Zahlen gibt es weitere Darstellungsmöglichkeiten. Eine lautet:

$$|z - m| = r,$$

wobei $z, m \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Eine andere (Parameterform):

$$z = m + r \cdot e^{i\alpha},$$

für $z, m \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $0 < \alpha \leq 2\pi$. Machen Sie sich geometrisch klar, dass z in den beiden Formeln auf einer Kreislinie liegt!

Es gibt noch eine weitere Kreisformel. Sie lautet:

$$ez\bar{z} + f\bar{z} + \bar{f}z + g = 0,$$

wobei $z, f \in \mathbb{C}$ und $e, g \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $m = -\frac{f}{e}$ und Radius $r = \frac{\sqrt{f\bar{f} - eg}}{|e|}$. Diese Gleichung wird besonders in der Geometrie verwendet, da man mit ihrer Hilfe Achsen- und Kreisspiegelungen gut darstellen (und auf dem Rechner durchführen) kann. Stellen Sie einen Kreis mit Mittelpunkt $m = 1 + 0i$ und Radius $r = 1$ in allen vier oben gegebenen Formeln dar!

Aufgabe 4: (Zusammenhang von Geometrie und komplexen Zahlen) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass ein Dreieck mit den Ecken $a, b, c \in \mathbb{C}$ (die Ecken müssen im mathematisch positiven Sinn $a \to b \to c$ sortiert sein, sonst klappt es nicht) genau dann gleichseitig ist, wenn gilt

$$a + b \cdot \omega + c \cdot \omega^2 = 0,$$

wobei $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck mit den Ecken $a = -i,\ \ b = \frac{1}{\sqrt{3}},\ c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ gleichseitig ist.

b) Drehen Sie das Dreieck aus a) um $\frac{\pi}{2} = 90°$ (Drehzentrum = 0). Welche Koordinaten hat das neue Dreieck (als komplexe Zahlen)? Zeigen Sie, dass das gedrehte Dreieck gleichseitig ist.

c) Spiegeln Sie das Dreieck aus a) an der "x"-Achse (reelle Achse). Welche Koordinaten hat das neue Dreieck (als komplexe Zahlen)? Zeigen Sie, dass das gespiegelte Dreieck gleichseitig ist. Hinweis: Haben Sie den "mathematisch positiven Sinn" im Sinn.

Viel Erfolg!