FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 5, Abgabe 22.05.2019

Lernziel: Ableitungsregeln (insbesondere Produktregel und Kettenregel) anwenden können. Ableitungen einfacher elementarer Funktionen kennen. Newton-Verfahren verwenden können, Fehlerverstärkung ausrechnen können.

Aufgabe 1: (Produktregel, Kettenregel, einfache Ableitungen)

Bestimmen Sie die Ableitungen $\frac{d}{dx}f(x)$ der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{x^k}{k!}$

b) $f(x) = x^2 + e^x$

c) $f(x) = (\sin(x))^2$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

e) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot sin(x)$

f) $f(x) = \frac{sin(x)}{x} + 1$

g) $f(x) = sin(x) \cdot cos(x)$

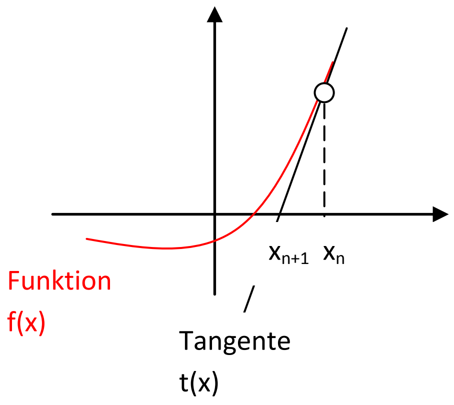
h) $f(x) = tan(x) \quad \left(= \frac{sin(x)}{cos(x)}\right)$

i) $f(x) = yx^2 + sin(y)$

k) $f(x) = x^x \quad \left(= e^{x \cdot ln(x)}\right)$

Zum Lösen dieser Aufgabe müssen Sie nachschlagen, was die Ableitung einzelner hier vorkommender, elementarer Funktionen ist, z.B. sin, cos, ln, e^x.

Aufgabe 2: (Newton-Verfahren zum Lösen von Gleichungen des Typs "f(x)=0")



Wir haben auf dem 4. Übungszettel kennen gelernt, dass manche Probleme in der Mathematik von Fixpunktiterationen gelöst werden. Hier werden wir sehen, wie sich eine entsprechende Fixpunktiteration $x_{n+1} = \phi(x_n)$ konstruieren lässt. Gesucht ist z.B. die Nullstelle einer Funktion $f(x)$. Das könnte z.B. ein Polynom sein, von dem wir eine Nullstelle ausrechnen wollen. Gegeben ist ein Näherungswert für diese

Nullstelle x_n. Diesen gilt es nun iterativ zu verbessern. Dazu wird die Tangente t(x) an die Funktion in dem Punkt (x_n,f(x_n)) gebildet. In der Grafik oben ist der Punkt als kleiner Kreis dargestellt. Die Nullstelle der so konstruierten Tangente ist eine bessere Näherung für die Nullstelle von f(x) (liegt näher dran), sie wird mit x_{n+1} bezeichnet. Jetzt wird das obige Verfahren mit x_{n+1} anstelle von x_n fortgesetzt.

Die Steigung a der Tangente hat den gleichen Wert, wie die Steigung von f in dem Punkt (x_n,f(x_n)), also den Wert $a = f'(x_n)$. Da die Tangente eine Gerade ist, kann man die Steigung von t auch als Differenzenquotient schreiben:

$$f'(x_n) = a = \frac{t(x_n) - t(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}}.$$

Da gemäß Konstruktion: $t(x_n) = f(x_n)$ und $t(x_{n+1}) = 0$, gilt also:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}.$$

Formen Sie diese Gleichung nach x_{n+1} um! Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration die Form

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

hat.

Jetzt erklärt sich auch die "Zauberformel" aus der vierten Vorlesung: Bestimmen Sie nach dem beschriebenen Verfahren eine Näherung für die dritte Wurzel aus zwei, also eine Lösung der Gleichung $x^3 - 2 = 0$. Nehmen Sie dazu als Startwert $x_0 = 1{,}5$ und berechnen Sie x_1 und x_2.

Aufgabe 3: ((Mess-)Fehlerfortpflanzung)

Wie in Aufgabe 2 lässt sich eine Funktion lokal (in der Nähe von einem Punkt x_0) recht gut durch Ihre Tangente approximieren. Es gilt also:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Durch geschicktes Erweitern lässt sich diese "ungefähr"-Gleichung umformen zu

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)}\right| \approx \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} x_0\right| \cdot \left|\frac{x - x_0}{x_0}\right|.$$

Ist also x_0 der "wahre Wert" und x der fehlerbehaftete Messwert, dann drückt der letzte Term den relativen Fehler der Messung aus. Der erste Term ist der relative Fehler eines Funktionswertes, der sich ergibt, wenn man den fehlerhaften x-Wert in f einsetzt. Der Faktor

$$\kappa_{rel} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} x_0\right|$$

bestimmt also, um welchen Wert der relative Fehler der Messung verstärkt wird, wenn man die Funktion f auf die Messungen anwendet. Er wird als *relative Konditionszahl* von f bezeichnet.

Sie haben in vier Experimenten folgende Messwerte x ermittelt, die jeweils einen versuchsbedingten relativen Messfehler von 2% aufweisen. Also:

Messung 1	Messung 2	Messung 3	Messung 4
0,5 · (1 ± 0,02)	1,0 · (1 ± 0,02)	2,0 · (1 ± 0,02)	10,0 · (1 ± 0,02)

Nehmen wir an, Sie müsste, um die eigentlich beabsichtigte physikalische Größe zu berechnen, jeweils zu den Messwerten ihr Quadrat addieren, also $f(x) = x^2 + x$.

a) Schreiben Sie die Formel für die Fehlerverstärkung (relative Konditionszahl) bezüglich dieser Funktion auf.

b) Schreiben Sie die Ergebnisse f(x) Ihrer Rechnung und die jeweils damit verbundenen (ungefähren) relativen Fehler ε in der Form "f(x) · (1 ± ε)" auf.

c) Welches Rechenergebnis wird den größten absoluten Fehler aufweisen?

d) Verwenden Sie $|f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)| \cdot |x - x_0|$ um eine *absolute Konditionszahl* einer Funktion f zu definieren, die mit κ_{abs} bezeichnet wird.

Aufgabe 4: **(Ableitung von trigonometrischen Funktionen bestimmen)**

In dem You-TubeVideo unter https://www.youtube.com/watch?v=FeCNIXoPF5M wird gezeigt, wie man die Ableitung der Sinusfunktion ausrechnen kann. Dieses Video zeigt ungefähr, wie diese Ableitung auch von Netwon und Leibniz bestimmt wurde. Können Sie eine ähnliche Erklärung dafür finden, wie man den Cosinus graphisch ableiten kann und dabei als Resultat auf den negativen Sinus kommt?

Viel Erfolg!