FU Berlin: WiSe 2019/20 (Mathematik 2, Weber)

Übungszettel Nr. 9, Abgabe 07.01.2020 um 8:00 Uhr

Lernziele: Lösung von homogenen linearen DGL, Taylorformel

Aufgabe 1: (homogenes lineares DGL-System mit konstanten Koeffizienten)

Es sollen alle Funktionen $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angegeben werden, die folgendes lineares Differentialgleichungssystem lösen:

$$\dot{y}_1 = 4y_1 + 4y_2$$

$$\dot{y}_2 = 3y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\dot{y}_3 = -2y_2 + 4y_3$$

Schreiben lässt sich dieses in Matrix-Form als $\dot{y} = Ay$ mit einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Bevor wir uns an dieses schwierige Problem begeben: Machen Sie sich zunächst klar, dass ein entsprechendes Gleichungssystem der Form $\dot{z} = \Lambda z$ einfach zu lösen wäre, wenn Λ eine Diagonalmatrix wäre! Wie sähe die *allgemeine* Lösung dieses einfachen Systems aus? Hinweis: Trennung der Variablen bzw. exakte DGL

b) Nach a) wird vielleicht klar: Man löst allgemeine Differentialgleichungen des Typs $\dot{y} = Ay$, indem man die Matrix A diagonalisiert. Mit der entsprechenden Eigenvektor-Matrix X gilt dann nämlich $X^{-1}AX = \Lambda$ bzw. $A = X\Lambda X^{-1}$ (siehe Aufgabe 3 auf dem 7. Übungszettel). Mit diesem Trick geht die Gleichung $\dot{y} = Ay$ über in $\mathrm{X}^{-1}\dot{y} = \Lambda \mathrm{X}^{-1} y$, bzw., indem man $z = X^{-1}y$ setzt, in $\dot{z} = \Lambda z$. Dieses veränderte System ist einfach allgemein zu lösen. Die Lösung der ursprünglichen DGL bekommt man durch $y = Xz$. Finden Sie mit Hilfe dieses Verfahrens die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = By$ mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Eigenwerte und Eigenvektoren von B siehe Aufgabe 1 auf Zettel Nr. 7 oder hier.

c) Die Matrix A aus dem obigen Aufgabentext erlaubt den Trick aus b) nicht. Es gibt nur einen Eigenvektor $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum (algebraisch) dreifachen Eigenwert 4 (siehe

Aufgabe 3 auf dem 7. Übungszettel). Wir ergänzen diesen einen Eigenvektor zu einem Orthogonalsystem:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und damit } X^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie $\Lambda = X^{-1}AX$. Dieses ist keine Diagonalmatrix. Dennoch versuchen Sie jetzt das Differentialgleichungssystem $\dot{z} = \Lambda z$ zu lösen. Fangen Sie mit der Gleichung für z_3 an! Das müsste sehr einfach sein. Bei der Lösung für z_2 müssen Sie sich an Mathematik I erinnern. Eine Lösungsformel für lineare Differentialgleichungen finden Sie in Aufgabeteil 3c) auf dem 12. Übungszettel von Mathematik I.

Hinweis für Leute, die es vollständig haben wollen: Die Lösung von z_1 ersparen wir uns... das geht genauso. Wie geht es weiter? Nachdem man das allgemeine z gefunden hat, ist wieder $y = Xz$.

Aufgabe 2: (Newton-Bewegungsgleichung)

"Kraft ist Masse mal Beschleunigung." so lautet ein (klassisches) Bewegungsgesetz von Newton. Mathematisch: $F = m\ddot{x}$. Nehmen wir an, x sei eine eindimensionale Größe (z.B. positive sowie negative Abweichung der Ausdehnung einer Feder von ihrem "entspannten Zustand") und die Kraft wäre abhängig von dieser Größe, z.B. $F = -kx$ mit der (Hookeschen) Federkonstanten k.

Um die zeitliche Bewegung $x(t)$ der Feder zu verfolgen, müssten wir die Differentialgleichung $-kx = m\ddot{x}$ lösen. Das ist nun die Aufgabe.

Eine lineare Differentialgleichung der Ordnung 2 lässt sich in ein Differentialgleichungssystem mit 2 Unbekannten in der Form aus Aufgabe 1 umwandeln (ein gern genutzter Trick). Wir setzen dazu $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$. Damit bekommt die Gleichung die Form $\dot{y} = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Machen Sie sich zunächst klar, wie diese Matrix A zustande kommt! Vielleicht, indem Sie $\dot{y} = Ay$ als zwei Gleichungen aufschreiben.

b) k und m sind positive Zahlen. Welche zwei Eigenwerte und Eigenvektoren hat also A? Finden Sie die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe der Methode in Aufgabe 1) b)!

c) Die allgemeine Lösung aus Teil b) ist komplexwertig. Können Sie eine spezielle reellwertige Lösung konstruieren, indem Sie die Eulerformel $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ ausnutzen? Tipp: Sie können auch der Einfachheit wegen $\frac{k}{m} = 1$ setzen.

Aufgabe 3: (Taylorentwicklung in mehreren Dimensionen)

In Aufgabe 2 haben wir die Schwingung einer Feder gesehen. Die wirkende Federkraft haben wir in Abhängigkeit von der Auslenkung der Feder berechnet. Der Zusammenhang war linear $F = -kx$.

Auch für Moleküle kann man die Normal-Schwingungen über eine Gleichung der Form $\ddot{x} = Hx$ ausrechnen. Hier ist jedoch x ein mehrdimensionaler Vektor (pro Atom 3 Raum-Dimensionen) und H eine entsprechende Matrix. Obwohl die Kräfte, die zwischen den Atomen wirken, i.A. nicht linear sind (es sind halt keine Federn), benutzt man die lineare Abbildung Hx für die Kraft. Wie kommt man an diese Matrix?

Dazu muss man wissen, dass die Kraft der negative Gradient einer Energie-Funktion ist (also gegeben durch die partiellen Ableitungen einer Funktion, $F = -\nabla f$). Ist die Funktion f quadratisch, dann ist die Ableitung, also die Kraft, tatsächlich linear.

Man möchte eine mehrdimensionale Funktion durch eine quadratische Funktion annähern.... das Problem kennen wir doch schon für den eindimensionalen Fall. Mit Hilfe der Taylorentwicklung konnten wir komplizierte Funktionen durch Polynome (z.B. Parabeln) annähern. Die Formel lautete

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Das geht bei mehrdimensionalen Funktionen auch:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T Hess_f(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

[Die Bausteine dz und d²z dieser Formel finden Sie auch in Aufgabe 1 auf dem 8. Zettel wieder.] Es gilt:

$$\nabla f(x) \approx \nabla f(\bar{x}) + Hess_f(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

Bestimmen Sie nach diesen Formeln eine Näherung für $f(x)$ und $\nabla f(x)$ der Funktion

$$f(x) = f\binom{x_1}{x_2} = \cos(x_1) + x_1 x_2 + x_2{}^3, \qquad \bar{x} = \binom{0}{0}.$$

Viel Erfolg!