

Lösungen zu den Übungsaufgaben zur Klausur LinA I LA

Dominik Puhst

6. Februar 2011

Themenkomplex 1: Gruppen, Körper

a) Entscheiden Sie, ob es sich im Folgenden um Gruppen handelt. Welche der Gruppen sind abelsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{Q}, \cdot) , (\mathbb{Z}, \cdot) , $(\mathbb{R}, -)$, $(\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot)$, $(\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}, \cdot)$

b) Erstellen Sie Verknüpfungstabellen für $+$ und \cdot , sodass $(\{0, 1, a, b\}, +, \cdot)$ einen Körper bildet. Dabei sei 0 das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation.

c) Zeigen Sie: Das linksneutrale Element einer Gruppe ist stets auch rechtsneutrales Element.

(*Hinweis:* Der Beweis kann zwei Schritte enthalten. Zunächst zeigen Sie, dass ein linksinverses auch rechtsinverses Element ist, dann, dass daraus folgt, dass ein linksneutrales auch rechtsneutrales ist. Wenn Sie einen der beiden Schritte nicht schaffen, versuchen Sie sich am anderen.)

Lösungen

a)

- $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, da es je nach Definition der natürlichen Zahlen keine inversen Elemente oder sogar gar kein neutrales Element gibt. Je nachdem, ob man die 0 als natürliche Zahl ansieht oder nicht.
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe. Das neutrale Element ist die 0, das Inverse zu einem $a \in \mathbb{Z}$ ist $-a$ und Assoziativität ist bekanntermaßen erfüllt. Auch ist die Verknüpfung kommutativ, die Gruppe ist also abelsch.
- (\mathbb{Q}, \cdot) ist keine Gruppe. Das neutrale Element ist 1, aber zu 0 existiert kein inverses Element. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ wäre eine abelsche Gruppe.

- (\mathbb{Z}, \cdot) ist dann klarerweise ebenfalls keine Gruppe. Hier fehlt aber zu jedem Element außer 1 das Inverse.
- $(\mathbb{R}, -)$ ist keine Gruppe, da das Assoziativgesetz verletzt ist. Man betrachte für $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a - b) - c = a - b - c$, aber $a - (b - c) = a - b + c$. Für ein $c \neq 0$ liegt offensichtlich keine Gleichheit vor.
- $(\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot)$ ist keine Gruppe, da es für singuläre Matrizen keine Inverse gibt.
- $(\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe. Das neutrale Element ist die n -dimensionale Einheitsmatrix, die Inversen existieren, da die Matrizen alle regulär sind und die Assoziativität liegt bekanntermaßen auch vor. Diese Gruppe ist aber nicht abelsch.

b) Die gesuchten Verknüpfungstabellen könnten so aussehen:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 + & 0 & 1 & a & b \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & a & b \\
 \hline
 1 & 1 & a & b & 0 \\
 \hline
 a & a & b & 0 & 1 \\
 \hline
 b & b & 0 & 1 & a
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|c|c|c|c}
 \cdot & 0 & 1 & a & b \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 1 & a & b \\
 \hline
 a & 0 & a & b & 1 \\
 \hline
 b & 0 & b & 1 & a
 \end{array}$$

c) Zeigen wir zunächst, dass ein linksinverses auch rechtsinverses Element ist. Sei als a' linksinvers zu a und a'' linksinvers zu a' sowie e das linksneutrale Element bzgl. \circ . Wir wollen nun zeigen, dass $a \circ a' = e$ gilt.

$$a \circ a' = e \circ (a \circ a') = (a'' \circ a') \circ (a \circ a') = a'' \circ (a' \circ a) \circ a' = a'' \circ a' = e$$

Das können wir nun verwenden um zu zeigen, dass dann also auch e rechtsinverses ist.

$$a \circ e = a \circ (a' \circ a) = (a \circ a') \circ a = e \circ a = a$$

Themenkomplex 2: (Äquivalenz-)Relationen, Abbildungen

a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$. Ist f injektiv? (surjektiv? bijektiv?) Begründen Sie!

b) Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$. Kann es eine injektive (surjektive, bijektive) Abbildung von A nach B geben? Kann es eine injektive (surjektive, bijektive) Abbildung von B nach A geben? Begründen Sie!

c) Ist $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ mit

$$(a, b) \sim_R (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc$$

eine Äquivalenzrelation?

d) Zeigen Sie: Zwei Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ sind entweder gleich oder disjunkt.

Lösungen

a)

- f ist surjektiv, da der Bildbereich so eingeschränkt wurde, dass tatsächlich jedes Element des Bildbereiches getroffen wird. Ein echter Beweis hierfür könnte über die Stetigkeit laufen, das ist aber eher Aufgabe der Analysis.
- f ist nicht injektiv, da z.B. $f(0) = f(2\pi)$, aber $0 \neq 2\pi$.
- f ist nicht bijektiv, weil f nicht injektiv ist.

b) Wegen $|A| < |B|$ kann es eine injektive, aber keine surjektive und damit auch keine bijektive Abbildung von A nach B geben.

Aus gleichem Grunde kann es eine surjektive, nicht aber eine injektive und demnach auch keine bijektive Abbildung von B nach A geben.

Um sich das klarzumachen kann man sich ja mal überlegen, wie denn jedes Element von B getroffen werden soll, wenn jedem Element aus A nur genau ein Element aus B zugeordnet werden darf.

c) Nachzuprüfen sind die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität:

(i) Reflexivität: $(a, b) \sim_R (a, b) \Leftrightarrow ab = ab$, das ist ziemlich klar.

(ii) Symmetrie: $(a, b) \sim_R (c, d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow da = cb \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d) \sim_R (a, b)$

(iii) Transitivität: $(a, b) \sim_R (c, d) \wedge (c, d) \sim_R (e, f) \Rightarrow ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow ad = \frac{bde}{f} \Rightarrow af = be \Rightarrow (a, b) \sim_R (e, f)$

Hier erkennen wir, dass wir Probleme bekommen, falls Nullen auftreten (in diesem Fall für f oder d . Ähnliche Probleme erhalten wir auch für $b=0$.) Deshalb müsste die Äquivalenzrelation, damit es wirklich eine ist, auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definiert werden. Überlegt euch mal woran das liegen könnte :)

d) Wir wollen zeigen, dass wenn $a \sim b$ gilt gerade $[a] = [b]$ ist und wenn $a \not\sim b$ gilt gerade $[a] \cap [b] = \{\}$ ist.

$$\begin{aligned} a \sim b : c \in [a] &\Rightarrow c \sim a \Rightarrow c \sim b \Rightarrow c \in [b] \Rightarrow [a] \subset [b] \\ d \in [b] &\Rightarrow d \sim b \Rightarrow d \sim a \Rightarrow d \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a] \\ &\Rightarrow [a] = [b] \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil führen wir einen Widerspruchsbeweis. Unter der Voraussetzung, dass $a \not\sim b$ gilt, sei nun $c \in [a] \cap [b]$, dann:

$$\begin{aligned} a \sim c \wedge b \sim c &\Rightarrow a \sim b \quad \zeta \\ &\Rightarrow [a] \cap [b] = \{\} \end{aligned}$$

Damit ist, da wir einen vollständigen Fallunterscheid durchgeführt haben, das zu zeigende bewiesen.

Themenkomplex 3: Vektorräume

a) Zeigen Sie, dass der \mathbb{R}^5 ein \mathbb{Q} -VR ist, indem Sie die VR-Axiome nachweisen. Dabei dürfen Sie verwenden, dass \mathbb{R} ein \mathbb{Q} -VR und \mathbb{R}^5 ein \mathbb{R} -VR ist.

b) Zeigen Sie, dass $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bildet!

c) Geben Sie ein Erzeugendensystem des \mathbb{P}^4 (Vektorraum der Polynome bis zum Grad 4) an, das keine Basis ist!

d) Ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$?

e) Sei V ein \mathbb{R} -VR und $\{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von V . Ist dann auch $\{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_1 + a_3$, $b_3 = 3a_1 + 2a_2 + a_3$ eine Basis von V ?

Lösungen

a) (V1): Zu zeigen ist, dass $(\mathbb{R}^5, +)$ eine abelsche Gruppe bildet. Dies ist aber dadurch, dass \mathbb{R}^5 ein \mathbb{R} -VR ist bereits erfüllt.

(V2): Das multiplikativ neutrale Element in \mathbb{Q} ist 1. Dann (mit $a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{R}$):

$$1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_1 \\ 1 \cdot a_2 \\ 1 \cdot a_3 \\ 1 \cdot a_4 \\ 1 \cdot a_5 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbb{R} \text{ ist } \mathbb{Q}\text{-VR}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{Q}: (\lambda \cdot \mu) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \mu \cdot a_1 \\ \lambda \cdot \mu \cdot a_2 \\ \lambda \cdot \mu \cdot a_3 \\ \lambda \cdot \mu \cdot a_4 \\ \lambda \cdot \mu \cdot a_5 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \mu \cdot a_1 \\ \mu \cdot a_2 \\ \mu \cdot a_3 \\ \mu \cdot a_4 \\ \mu \cdot a_5 \end{pmatrix}$$

(V3): Die Distributivgesetze funktionieren ganz genauso (auch $b_1, \dots, b_5 \in \mathbb{R}$):

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)a_1 \\ (\lambda + \mu)a_2 \\ (\lambda + \mu)a_3 \\ (\lambda + \mu)a_4 \\ (\lambda + \mu)a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_1 \\ \lambda a_2 + \mu a_2 \\ \lambda a_3 + \mu a_3 \\ \lambda a_4 + \mu a_4 \\ \lambda a_5 + \mu a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \\ \lambda a_4 \\ \lambda a_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu a_2 \\ \mu a_3 \\ \mu a_4 \\ \mu a_5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \right) &= \lambda \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \\ a_4 + b_4 \\ a_5 + b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + b_1) \\ \lambda(a_2 + b_2) \\ \lambda(a_3 + b_3) \\ \lambda(a_4 + b_4) \\ \lambda(a_5 + b_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \lambda a_2 + \lambda b_2 \\ \lambda a_3 + \lambda b_3 \\ \lambda a_4 + \lambda b_4 \\ \lambda a_5 + \lambda b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \\ \lambda a_4 \\ \lambda a_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \\ \lambda b_3 \\ \lambda b_4 \\ \lambda b_5 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Offensichtlich handelt es sich um 3 Vektoren des 3-dimensionalen Vektorraums \mathbb{R}^3 . Um zu sehen, ob der ganze Vektorraum aufgespannt wird kann man zeigen, dass das Bild der von den drei Spaltenvektoren aufgespannten Matrix 3-dimensional ist, also die Matrix Rang 3 hat.

$$Rg\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}\right) = 3$$

c) Hier ist es am einfachsten einfach eine Basis zu nehmen und um weitere Vektoren aus \mathbb{P}^4 (der übrigens 5-dimensional ist) zu ergänzen. Dann ist das Erzeugendensystem noch gewährleistet, die lineare Unabhängigkeit aber definitiv verloren. Ein solches System wäre dann also:

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4, 3x\}$$

d) Es wird geschaut, ob es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gibt, die das folgende LGS lösen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das finden wir heraus z.B. indem wir den Gaußalgorithmus anwenden:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \zeta$$

Der Widerspruch ergibt sich direkt aus den letzten beiden Zeilen, da λ_2 gleichzeitig $\frac{4}{5}$ und -3 sein müsste. Also folgt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

e) Wegen $b_3 = 2b_1 + b_2$ sind die drei Vektoren nicht linear unabhängig und können demnach keine Basis bilden. Wenn man das nicht sieht, dann kann man die $b_i, i = 1, 2, 3$

als Vektoren bezüglich der Basis aus $a_i, i = 1, 2, 3$ darstellen und sich dann den Rang der Matrix anschauen, die aus ihnen (spaltenweise) entsteht:

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2 < 3 = \dim V$$

Demnach sind die $b_i, i = 1, 2, 3$ definitiv keine Basis, da sie nur einen zweidimensionalen Unterraum von V aufspannen.

Themenkomplex 4: Lineare Gleichungssysteme

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Machen Sie eine begründete Aussage zu $\operatorname{def}(A)$!

b) Bestimmen Sie $\operatorname{im}(A)$ und $\ker(A)$!

c) Zeigen Sie, dass $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{im}(A)$ und bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $Ax = b_1$!

von $Ax = b_1$!

d) Nennen Sie einen Vektor $b_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{im}(A)$ und bestimmen Sie, sofern möglich, eine Näherungslösung zu $Ax = b_2$!

e) Geben Sie alle Lösungen in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ an zu:

$$\begin{pmatrix} [2] & [0] & [1] \\ [1] & [1] & [3] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4] \\ [2] \end{pmatrix}$$

f) Geben Sie ein LGS in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ an, das folgende Lösungsmenge besitzt:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{pmatrix} \right\}$$

Lösungen

a) Wir betrachten zunächst die Matrix A und erkennen, dass sie vier Spalten aber nur drei Zeilen hat. Da $\operatorname{Zeilenrang} = \operatorname{Spaltenrang}$ gilt, muss sicher gelten $\operatorname{Rg}(A) \leq 3$ und aus dem Dimensionssatz folgt dann direkt: $\operatorname{def}(A) \geq 1$
(Es gilt ja $\operatorname{Rg}(A) + \operatorname{def}(A) = \text{Anzahl d. Spalten}$)

b) Wir führen wie gewohnt den Bild-Kern-Algorithmus durch, um eine Basis des Bildes und eine Basis des Kerns abzulesen.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -3 & -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \\
 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \\
 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\
 -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

So können wir nun ablesen:

$$\text{im}(A) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad \text{ker}(A) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

c) b_1 liegt in $\text{im}(A)$, wenn man $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ findet, die die Gleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Anhand der ersten und zweiten Zeile können wir schon ablesen, dass $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ und $\lambda_2 = 1$ gelten muss. Diese erfüllen auch die dritte Zeile. Also liegt b_1 tatsächlich in $\text{im}(A)$.

Dieses Ergebnis und das Ergebnis aus Aufgabenteil b) können wir verwenden, um die allgemeine Lösung zu bestimmen. Da wir den Kern schon kennen, benötigen wir nur noch eine spezielle Lösung. Dazu suchen wir zunächst eine spezielle Lösung für $ARy = b_1$. (R sei die umgeformte Einheitsmatrix aus b))

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nach unseren Vorüberlegungen erfüllt zum Beispiel $y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ diese Gleichung.

Wir erhalten unsere spezielle Lösung für das Ausgangssystem durch $Ry = x$.

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist also die allgemeine Lösung (bzw. eine mögliche Darstellung dieser):

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left(\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

d) Leicht zu konstruieren ist z.B. $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die zu überprüfende Gleichung (eben jene aus Aufgabenteil c)) liefert aus den ersten beiden Zeilen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, wodurch die dritte Zeile einen Widerspruch erzeugt. Um eine Näherungslösung zu erhalten lösen wir nun also das LGS $A^T Ax = A^T b_2$:

$$\begin{aligned} & A^T Ax = A^T b_2 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 18 & 18 & -6 & -6 \\ 18 & 21 & 0 & -3 \\ -6 & 0 & 14 & 8 \\ -6 & -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das sieht doch ganz nett aus. Wir führen nun mal Gauß-Umformungen durch.

$$\begin{pmatrix} 18 & 18 & -6 & -6 & | & 9 \\ 18 & 21 & 0 & -3 & | & 13 \\ -6 & 0 & 14 & 8 & | & 5 \\ -6 & -3 & 8 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 18 & -6 & -6 & | & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & | & 4 \\ 0 & 6 & 12 & 6 & | & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 18 & -6 & -6 & | & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Hier erkennen wir das Problem mit Näherungslösungen. Wir haben Glück gehabt, dass wir b_2 so gewählt haben, dass es hierfür eine/mehrere Näherungslösungen gibt. Es hätte auch passieren können, dass wir keine Näherungslösung finden. Für uns sind in diesem Fall die Näherungslösungen gleichwertig, deshalb reicht eigentlich eine spezielle Lösung dieses LGS. (wie in der Vorlesung erwähnt gibt es Bereiche in der Mathematik, in denen dann die betragsmäßig kleinste aller Näherungslösungen als *die* Näherungslösung

bezeichnet wird, das machen wir jetzt aber nicht) Eine Lösung wäre nun also $x = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) Wir nutzen zunächst den Bild-Kern-Algorithmus, um den Kern der Matrix zu bestimmen. Dafür sollten wir stets die Verknüpfungstabellen parat haben, um zu wissen, dass z.B. $[1] + [2][2] = [0]$ gilt.

$$\begin{pmatrix} [2] & [0] & [1] \\ [1] & [1] & [3] \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [2] & [0] & [0] \\ [1] & [1] & [0] \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}$$

Demnach entspricht der Kern dem Span der dritten Spalte der umgeformten Einheitsmatrix. Eine spezielle Lösung ist leicht zu sehen. Wer diese nicht durch *hingucken* erkennt, verwende das Verfahren, was in Aufgabenteil c) angewendet wurde. Wir erhalten:

$$a_p = \begin{pmatrix} [2] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} [2] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} [2] \\ [0] \\ [1] \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{Z} \setminus 5\mathbb{Z} \right\}$$

Setzen wir nun nacheinander für λ die 5 Elemente des zugrundeliegenden Körpers ein, so erhalten wir als Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} [2] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [4] \\ [0] \\ [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [0] \\ [2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [3] \\ [0] \\ [3] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [4] \end{pmatrix} \right\}$$

e) Das ist gar nicht so schwer, obwohl die Aufgabe rot gekennzeichnet ist. Wir erkennen, dass die erste und zweite Komponente fest bleiben müssen und nur die dritte Komponente variabel ist. So wäre eine mögliche Lösung (man kann das LGS beliebig verkomplizieren):

$$\begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] \\ [1] & [1] & [0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1] \\ [0] \end{pmatrix}$$

Themenkomplex 5: Lineare Abbildungen, Matrizen

a) Ist $\varphi_1: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_3 \\ a_4 - 3a_5 \end{pmatrix}$ linear?

b) Seien der \mathbb{R}^3 mit der Basis $B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und der \mathbb{R}^2 mit der Basis $B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ gegeben. $\varphi_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei linear mit:

$$\varphi_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie sieht dann ein allgemeines $\varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right)$ aus?

Geben Sie die darstellende Matrix von φ_2 bzgl. der Basen B_1 und B_2 an!

c) Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$!

d) Sei $\varphi_3: V \rightarrow W$ lineare Abbildung und $\dim V = n < \infty$. Zeigen Sie: $\dim V \geq \dim \text{im}(\varphi_3)$!

Geben Sie je ein Beispiel für $\dim V = \dim \text{im}(\varphi_3)$ und für $\dim V < \dim \text{im}(\varphi_3)$ an!

e) Wie sähe die φ_2 zugehörige darstellende Matrix bezüglich B_1 und B_3 aus, wenn $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ als Basis des \mathbb{R}^2 vorausgesetzt würde?

Lösungen

a) Man prüfe einfach, ob $\varphi_1(\lambda a + b) = \lambda\varphi_1(a) + \varphi_1(b)$ gilt.

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \right) &= \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 \\ \lambda a_2 + b_2 \\ \lambda a_3 + b_3 \\ \lambda a_4 + b_4 \\ \lambda a_5 + b_5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 + \lambda a_2 + b_2 \\ 2\lambda a_3 + 2b_3 \\ \lambda a_4 + b_4 - 3\lambda a_5 - 3b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + a_2) + b_1 + b_2 \\ \lambda 2a_3 + 2b_3 \\ \lambda(a_4 - 3a_5) + b_4 - 3b_5 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_3 \\ a_4 - 3a_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ 2b_3 \\ b_4 - 3b_5 \end{pmatrix} = \lambda \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \right) + \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

b) Sei $v \in \mathbb{R}^3$, dann lässt sich v schreiben als LK der Basiselemente. Dann ist:

$$\varphi_2(v) = \varphi_2 \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu diesem Zeitpunkt ist es sinnvoll die Bilder der Basiselemente des \mathbb{R}^3 als LK der Basiselemente des \mathbb{R}^2 darzustellen:

$$= \lambda_1 \left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \left(- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (2\lambda_1 - \lambda_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A , die φ_2 bzgl. der gegebenen Basen zugeordnet ist, ist demnach:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Wir verfahren wie gewohnt, schreiben neben die Matrix die Einheitsmatrix und führen parallel Umformungen durch, um aus der Ausgangsmatrix die Einheitsmatrix zu erhalten. Dann steht auf der rechten Seite die entsprechende inverse Matrix:

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}$$

d) *Möglichkeit 1*: Man kann einfach über die darstellenden Matrizen argumentieren. Die Dimension des Bildes ist gerade der Rang dieser Matrix. Die Dimension von V ist gerade

die Spaltenzahl. Daraus ergibt sich direkt das zu zeigende.

Problem: Sollte W unendlich-dimensional sein können wir gar keine Matrix erstellen.

Möglichkeit 2: Wir behaupten: Sei $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Basis von V , dann ist $\{\varphi_3(a_1), \dots, \varphi_3(a_n)\}$ zumindest ein Erzeugendensystem von $\text{im}(\varphi_3)$. Der Beweis dazu verläuft wie auf dem Übungszettel zum Dualraum:

$$\begin{aligned} \text{sei } w \in \text{im}(\varphi_3) &\Rightarrow \exists v \in V : w = \varphi_3(v) \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : w = \varphi_3(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \\ &\Rightarrow w = \lambda_1 \varphi_3(a_1) + \dots + \lambda_n \varphi_3(a_n) \end{aligned}$$

Also handelt es sich tatsächlich um ein Erzeugendensystem. Gegebenenfalls ließe es sich noch zu einer Basis reduzieren. Mit Sicherheit ist die Dimension jetzt aber nicht größer als n .

Für die Beispiele betrachten wir Abbildungen aus dem \mathbb{R}^2 in den \mathbb{R}^2 . Als Basis verwenden wir die triviale Basis. Dann ist die Dimension des Urbildes offenbar 2. Sei nun φ_i definiert durch $\varphi_i \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die identische Abbildung, dann ist die Dimension des Bildes offenbar auch 2. Alternativ hat z.B. φ_{ii} definiert durch $\varphi_{ii} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ nur ein eindimensionales Bild.

e) Wir können genauso verfahren wie in Aufgabenteil b). Nur müssen wir jetzt schauen, dass wir die Bilder der Elemente aus B_1 jetzt als Linearkombinationen der Elemente aus B_3 darstellen. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus den Linearfaktoren ergibt sich direkt die Matrix:

$$A_{B_1, B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Themenkomplex 6: Determinanten

a) Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind: (es seien E die Einheitsmatrix, $A, B, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Q orthogonal, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $a_i \in \mathbb{R}^n$ die i -te Spalte von A)

1. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
2. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
3. $\det(E) = 1$
4. $\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$
5. $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$
6. $\det(A^2) = 2 \det(A)$
7. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
8. $\det(A^T) + \det(A) = 0$
9. $(\det(Q))^3 = 1$
10. $\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j + \lambda a_i, \dots, a_n)$
11. $\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_n)$
12. a_1, \dots, a_n linear unabhängig $\Rightarrow \det(a_1, \dots, a_n) = 1$
13. a_1, \dots, a_n linear abhängig $\Rightarrow \det(a_1, \dots, a_n) = 0$
14. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

b) Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) Berechnen Sie das Volumen des von $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelepeds!

d) Beweisen oder widerlegen (durch Gegenbeispiel) Sie die Aussagen aus Aufgabenteil a) beginnend mit Aussage 4. Beziehen Sie sich bei den Beweisen auf die Definition der Determinante (multilinear, alternierend, normiert) und vorherige (weiter oben stehende) Aussagen!

Lösungen

a) Hier wird erstmal nur über wahr und falsch entschieden. Die Begründungen folgen ja dann in Aufgabenteil d):

1. falsch
2. wahr

3. wahr
4. falsch
5. falsch
6. falsch
7. wahr
8. falsch
9. falsch
10. wahr
11. falsch
12. falsch
13. wahr
14. wahr

b) Ich entwickle nach der ersten Spalte. Dann erhalten wir:

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 4(-4) - 1(1 - 6) = -16 + 5 = -11$$

c) Zu berechnen ist die Determinante der von den Spaltenvektoren aufgespannten Matrix. zur Determinantenberechnung forme ich die Matrix in ZSF um:

$$\begin{aligned} V &= \left| \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = |1 \cdot (-12) \cdot \frac{7}{6} \cdot 1| = |-14| = 14 \end{aligned}$$

d)

4. Gegenbsp:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq -1 = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Gegenbsp:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \text{ aber } \det(2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 2$$

6. Gegenbsp:

$$\det(E^2) = \det(E) = 1 \neq 2\det(E) = 2$$

7. Wir verwenden 2.:

$$1 = \det(E) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass im Nenner ja lieber keine Nullen auftreten sollten. Dieses Problem stellt sich hier aber nicht, denn für $\det(A) = 0$ ist diese Berechnungsvorschrift sowieso nicht definiert, da A^{-1} gar nicht existiert.

8. Gegenbsp:

$$\det(E^T) = \det(E) = 1 \Rightarrow \det(E) + \det(E^T) = 2 \neq 0$$

9. Sei Q eine orthogonale Matrix mit Spiegelung, dann gilt: $\det(Q) = -1 \Rightarrow (\det(Q))^3 = -1 \neq 1$. Eine Solche Matrix wäre z.B. $Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Hier arbeiten wir mit der Multilinearität:

$$\begin{aligned} \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j + \lambda a_i, \dots, a_n) &= \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, a_i, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) \\ &= \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) + \lambda \cdot \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) \\ &= \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) + \lambda \cdot 0 = \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \end{aligned}$$

11. Ähnliches Verfahren wie in 10. (Ich gebe hier jetzt kein Gegenbeispiel, sondern einen Beweis für die i.A. herrschende Ungleichheit)

$$\begin{aligned} \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_n) &= \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, a_i, \dots, \lambda a_j, \dots, a_n) \\ &= 0 + \lambda \cdot \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \neq \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \end{aligned}$$

12. Gegenbsp:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2, \quad \text{obwohl} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ lin. unabh.}$$

13. Wenn (a_1, \dots, a_n) lin. abh., dann existiert also ein $a_k, 1 \leq k \leq n$, dass sich als Linearkombination der anderen darstellen lässt. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} \det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) &= \det(a_1, \dots, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1} + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \dots + \lambda_n a_n, \dots, a_n) \\ &= \det(a_1, \dots, \lambda_1 a_1, \dots, a_n) + \dots + \det(a_1, \dots, \lambda_{k-1} a_{k-1}, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, \lambda_{k+1} a_{k+1}, \dots, a_n) \\ &\quad + \det(a_1, \dots, \lambda_n a_n, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Bis auf Skalare haben wir hier nun in jeder Determinante zwei gleiche Spalten. Diese Determinanten sind also nach der Determinantendefinition 0. Die Summe lauter Nullen ist dann auch klar.

14. Multiplizieren wir eine Matrix mit einem Skalar, so multiplizieren wir ja jeden Eintrag. Dann:

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) = \lambda \det(a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) = \lambda^n \det(a_1, \dots, a_n) = \lambda^n \det(A)$$

Alternativ kann man hier auch geometrisch argumentieren: Strecken wir z.B. bei einem Würfel jede Seite um den Faktor 2, so erhalten wir das 8-fache Volumen. Strecken wir nun alle Seiten eines n-dimensionalen Parallelepipeds um λ , so wird das Volumen dessen gerade λ^n mal so groß.

Themenkomplex 7: Euklidische Geometrie

Gegeben sei der \mathbb{R} -VR \mathbb{R}^5 sowie

$$\mathcal{H}_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{H}_2 : x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + 16 = 0$$

- Begründen Sie, dass es sich hierbei um Hyperebenen handelt!
- Bestimmen Sie den Abstand von \mathcal{H}_2 zum Ursprung!
- Bestimmen Sie $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$! Was für eine algebraische Struktur erwarten Sie?
- Bestimmen Sie auch den Schnittwinkel α zwischen \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 !
- Geben Sie eine Gerade g an, die in \mathcal{H}_1 , nicht aber in \mathcal{H}_2 liegt!
- Zeigen Sie allgemein: Zwei nicht parallele Hyperebenen schneiden sich!

Lösungen

a) Im \mathbb{R}^5 muss eine Hyperebene ein 4-dimensionaler affiner Unterraum sein. Schon an der Konstruktion ist diese Eigenschaft bei \mathcal{H}_1 erkennbar. \mathcal{H}_2 ist in der Normalenform geschrieben. Damit es einen eindeutigen Normalenvektor gibt, muss der zugehörige Unterraum aber mindestens auch 4-dimensional sein. Somit handelt es sich bei beiden um Hyperebenen.

b) Aus der Gleichung können wir einen Normalenvektor ablesen: Es ist: $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Den Abstand erhalten wir nur, wenn wir einen normierten Vektor haben. Dazu berechnen wir die Länge von n_1 :

$$|n_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4 + 1 + 9} = \sqrt{16} = 4$$

Division der Normalengleichung durch 4 ergibt als Abstand $|-4| = 4$.

c) Zunächst zu unserer Erwartung. Wenn wir \mathcal{H}_1 in Normalenform umschreiben, dann haben wir als Schnitt die Lösungsmenge eines LGS mit 2 Gleichungen und 5 Unbekannten. Wenn die Gleichungen unabhängig sind, dann ist der Rang der Matrix 2, also ihr Defekt 3. Demnach sollte als Schnitt ein 3-dimensionaler affiner Unterraum entstehen. Falls die Gleichungen nicht unabhängig sind, erhalten wir entweder eine leere Lösungsmenge oder die Ebenen sind identisch.

Nun schreiben wir erstmal \mathcal{H}_1 um. Dazu nutzen wir den BKA:

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
 -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \\
 -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \\
 -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\
 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \\
 -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\
 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \\
 -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -1 \\
 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\
 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Endlich können wir einen Normalenvektor ablesen. $n_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir sehen schnell, dass

auch gilt $|n_2| = 4$. Einen normierten Vektor brauchen wir aber eigentlich gar nicht. Einsetzen von dem Aufpunkt liefert nun $\mathcal{H}_1 = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = -6$ Die

meiste Vorarbeit ist damit gemacht. Wir lösen jetzt folgendes LGS, welches den Schnitt beschreibt:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Dazu bestimmen wir zunächst wieder den Kern und dann eine spezielle Lösung, (die wir einfach konstruieren können). Also zum Kern (BKA):

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & -3 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Den Kern haben wir also. Eine Spezielle Lösung wäre z.B. $a_p = (-5 \ 0 \ 0 \ 9 \ 0)$. So erhalten wir endlich:

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

d) Das ist nach der ganzen Vorarbeit jetzt fast schon geschenkt. Der Winkel errechnet sich aus:

$$\cos(\alpha) = \frac{|n_1^T n_2|}{|n_1||n_2|} = \frac{2}{16} = 0,125 \Leftrightarrow \alpha \approx 82,82^\circ$$

e) Auch das ist nicht so schwer. Ihr habt hier ja praktisch freie Hand. Am einfachsten ist es sich eine Richtungsvektor für die Gerade zu nehmen, der offensichtlich in \mathcal{H}_1 ist

aber nicht senkrecht auf dem Normalenvektor n_2 steht. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt diese Anforderungen.

Nun brauchen wir noch einen Aufpunkt, der in \mathcal{H}_1 liegt, wofür sich der Aufpunkt von \mathcal{H}_1 perfekt anbietet. Eine solche Gerade wäre also:

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

f) Wir legen einen n -dimensionalen Raum zugrunde mit $n \geq 2$. Für den Fall $n = 1$ können wir Punkte als parallel betrachten. Wir können uns unserer Erfahrungen der vorherigen Aufgabenteile bedienen. Zwei Hyperebenen sind stets als Normalengleichung darstellbar. Der Schnitt ist dann die allgemeine Lösung eines Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und n Unbekannten. Dieses LGS hat (wegen $n \geq 2$) nur dann keine Lösung, wenn durch Gauss-Umformungen eine *falsche* Nullzeile entsteht (also Nullzeile und auf der rechten Seite eine Nichtnull). Da die Normalenvektoren aber unabhängig sind, die Hyperebenen sind ja nicht parallel, entsteht keine Nullzeile. Demnach ist das LGS lösbar, also schneiden sich die Hyperebenen. Noch besser: Der Schnitt ist immer ein affiner $n - 1$ -dimensionaler UR.

Themenkomplex 8: Sonstiges

a) Zeigen Sie, dass $a = \frac{2x^2+8x-4}{x^3-3x^2-4x} \in \text{span} \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x+1}, \frac{1}{x-4} \right)$ und stellen Sie a als Vektor mit reellwertigen Komponenten dar!

b) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom $f \in \mathbb{P}^3$ mit $f(-1) = 1$, $f(0) = -4$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$!

ci) Geben Sie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ an, die maximal eine 0 enthält und weisen Sie nach, dass es sich bei ihrer Konstruktion tatsächlich um eine orthogonale Matrix handelt!

cii) Enthält Ihre Matrix eine Spiegelung?

ciii) Geben Sie Q^{-1} an!

civ) Zeigen Sie allgemein: Q orthogonal $\Leftrightarrow Q^T$ orthogonal!

d) Weisen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel nach, dass man guten Gewissens folgende Beweisstruktur verwenden kann:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Zeigen Sie auch, dass die Rückrichtung nicht für einen Beweis taugt!

Lösungen

a) Wir suchen $a, b, c \in \mathbb{R}$, sd. $\frac{2x^3+8x-4}{x^3-3x^2-4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4}$:

$$\begin{aligned}\frac{2x^3+8x-4}{x^3-3x^2-4x} &= \frac{a'}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4} = \frac{a'(x+1)(x-4) + bx(x-4) + cx(x+1)}{x^3-3x^2-4x} \\ &= \frac{(a'+b+c)x^2 + (-3a'-4b+c)x - 4a'}{x^3-3x^2-4x}\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das zu lösende LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist $a' = 1$. Dann erhalten wir auch schnell: $b = -2$, $c = 3$. Also ist

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Gesucht ist eine Funktion f definiert durch $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, die an gegebenen Stellen die gegebenen Werte hat. Das Problem wird beschrieben durch folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Da wir nach Vandermonde wissen, dass dieses Problem eindeutig lösbar ist, verwenden wir Gauss-Umformungen anstelle des BKA:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Jetzt können wir einfach von unten nach oben ablesen und erhalten:

$$d = -4 \Rightarrow c = \frac{7}{6} \Rightarrow b = \frac{9}{2} \Rightarrow a = -\frac{5}{3}$$

Das lösende Polynom f sieht also so aus: $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{6}x - 4$.

ci) Wähle Q so, dass jede Spalte skalar mit sich selbst multipliziert 1 ergibt und jede Spalte skalar mit einer anderen multipliziert 0 ergibt. Eine solche Matrix wäre:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Die Prüfung geht eigentlich im Kopf. Entweder prüfe man die Eigenschaften, die oberhalb der Matrix hier genannt wurden oder man berechnet $Q^T Q$ und zeigt, dass dann E herauskommt. Das ist hier der Fall.

cii) Ob die Matrix eine Spiegelung enthält erkennt man daran, ob die Determinante +1 oder -1 beträgt. Gilt $\det(Q) = -1$, so enthält sie eine Spiegelung, andernfalls nicht. Berechne also $\det(Q)$. Ich entwickle dabei nach der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{18}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{18}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{18}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{18}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

Sie enthält also eine Spiegelung.

ciii) Nun, da Q ja orthogonal ist, ist insbesondere $Q^T Q = E$, also $Q^{-1} = Q^T$. Dann können wir die Inverse ganz einfach angeben:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

civ) Da orthogonale Matrizen stets regulär sind, können wir uns einfach auf Aufgabe 1a und 1c berufen. Reguläre Matrizen bilden nämlich mit der Multiplikation eine Gruppe und dort sind linksinverse immer auf rechtsinvers. Hier ist die transponierte Matrix die inverse und deshalb gilt $Q^T Q = Q Q^T = E$. Also formal gilt:

$$Q \text{ orthogonal} \Rightarrow Q^T Q = E \Rightarrow Q Q^T = E \Rightarrow Q^{T^T} Q^T = E \Rightarrow Q^T \text{ orthonobal}$$

d)

A	B	C	$(A \rightarrow B)$	\wedge	$(B \rightarrow C)$	\rightarrow	$(A \rightarrow C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f	f	f
w	f	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	w	f	w	w
f	f	f	f	w	f	w	f

Anhand der Tabelle erkennen wir, dass die Aussage tatsächlich wahr ist. Für die Gegenrichtung reicht es z.B. die dritte Zeile zu betrachten. Dort ist die Rückrichtung nicht erfüllt.

Ich hoffe das stimmt alles soweit, wer aber dennoch Fehler findet, darf und soll sie gerne an Herrn Dr. Weber, Tine oder mich weiterleiten.

Ich wünsche euch noch ganz viel Spaß bei der weiteren Vorbereitung und noch viel mehr Erfolg für die Klausur.

Euer Dominik