Analysis I

Martin Weiser

Organisatorisches

Scheinkriterien

- Klausurzulassung
  - wöchentliche Übungszettel (10-12 Punkte/Zettel):
    50% der Punkte in der ersten Semesterhälfte
    50% der Punkte in der zweiten Semesterhälfte
  - aktive Teilnahme an den Übungen
- 50% der Klausurpunkte (90 min Klausur)

Webseite

`http://www.zib.de/weiser/AnaI-2011/`

- wöchentliche Übungszettel
- Themenplanung
- Literaturhinweise
- aktuelle Ankündigungen (Raumwechsel)
- Scheinkriterien
- Klausurtermine

Organisatorisches

Vorlesungsablauf

- 5min Wiederholung des Stoffes der vorigen Vorlesung (durch Teilnehmer: 10 Übungspunkte Bonus)
- Vorlesung (mitdenken, ggf. auch mitschreiben)
- unregelmäßig klausurtypische Präsenzaufgaben (ca 10min)

Übungsablauf

- Klärung von Fragen, insbesondere Verständnisfragen
- Übung und Vertiefung des Stoffes anhand von Tutoriumsaufgaben (Kleingruppen)
- Präsentation und Diskussion der Lösungen von Übungsaufgaben

Organisatorisches

Team

- Vorlesung: Martin Weiser
- Übungsaufgaben: Martin Weiser & Nikolai Beck (+ Irmin Mentz)
- Tutorien: Martin Karl & Nikolai Beck

Tutorieneinteilung

- Tutorium A: Fr 10-12
- Tutorium B: Fr 14-16
- Tutorium C:

Was ist Analysis?

I. Achilles und die Schildkröte

Zenons Paradoxon: Der Wettlauf von Achilles und der Schildkröte

(i) Achilles läuft 10m/s
(ii) die Schildkröte läuft 1m/s
(iii) und erhält 10m Vorsprung

Achilles kann die Schildkröte niemals einholen, denn
- sobald er die 10m Vorsprung eingeholt hat, ist die Schildkröte einen Meter weiter
- sobald er den einen Meter gelaufen ist, ist die Schildkröte 10cm weiter
- sobald er die 10cm gelaufen ist, ist die Schildkröte 1cm weiter
- sobald er 1cm gelaufen ist, ist die Schildkröte 1mm weiter
- sobald er 1mm gelaufen ist, ist die Schildkröte 100µm weiter
- sobald er 100µm gelaufen ist, ist die Schildkröte 10µm weiter

Zenon von Elea
490-430 v. Chr.

Wieso überholt Achilles die Schildkröte doch?

Freie Universität Berlin

ZIB

II. Hauptsatz der Differenzen- und Summenrechnung

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Zahlen und $x'_i := x_{i+1} - x_i, i = 1, \ldots, n-1$ deren Differenzen. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x'_i = x_n - x_1$$

Beweis

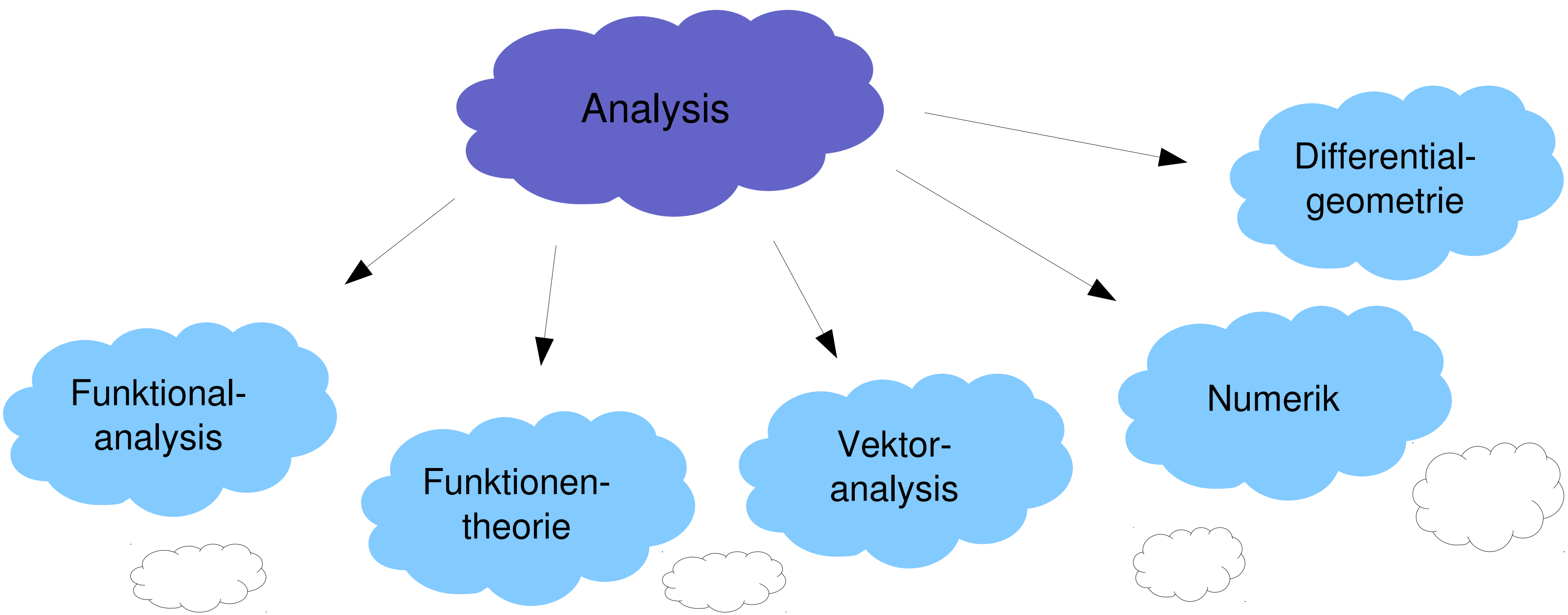
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} x'_i &= \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{x'_{n-1}} + \underbrace{(x_{n-1} - x_{n-2})}_{x'_{n-2}} + \cdots + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{x'_1} \\ &= x_n + \underbrace{(-x_{n-1} + x_{n-1})}_{=0} + \cdots + \underbrace{(-x_2 + x_2)}_{=0} - x_1 \\ &= x_n - x_1\end{aligned}$$

Geht das auch mit unendlich vielen Zahlen?

Was ist Analysis?

Analysis: Lehre von den Grenzwerten und ihrer Anwendung auf reelle Funktionen zur Differential- und Integralrechnung.

Analysis als (ein) Grundpfeiler der Mathematik



Was ist Analysis?

Analysis: Lehre von den Grenzwerten und ihrer Anwendung auf reelle Funktionen zur Differential- und Integralrechnung.

Analysis als Sprachsystem und Hilfswissenschaft:

Analysis liefert den sprachlichen Rahmen zur quantitativen Beschreibung von Sachverhalten (funktionale Abhängigkeiten) in

- Physik
- Biologie
- Chemie
- Ökonomie
- Ingenieurwissenschaften
- Medizin

„Mathematik ist ein zu scharfes Werkzeug – nichts für kleine Kinder.“

-- S. Banach --

Was ist Analysis?

Analysis: Lehre von den Grenzwerten und ihrer Anwendung auf reelle Funktionen zur Differential- und Integralrechnung.

Analysis als Kunst und Erbauung:

- Schönheit & Eleganz (z.B. von Beweisen) ... oder halt auch nicht
- Denkschule (Abstraktion, Modellbildung, funktionale Zusammenhänge): das Studium der Mathematik ändert Ihre Sicht auf die Welt

„Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz.“

-- G. H. Hardy --

Was lernen Sie hier?

genauer: Was sollen Sie hier lernen?

I. Analysis (klar):
- Grenzwerte
- reelle Zahlen
- Funktionen
- Stetigkeit
- Ableitung
- Integral

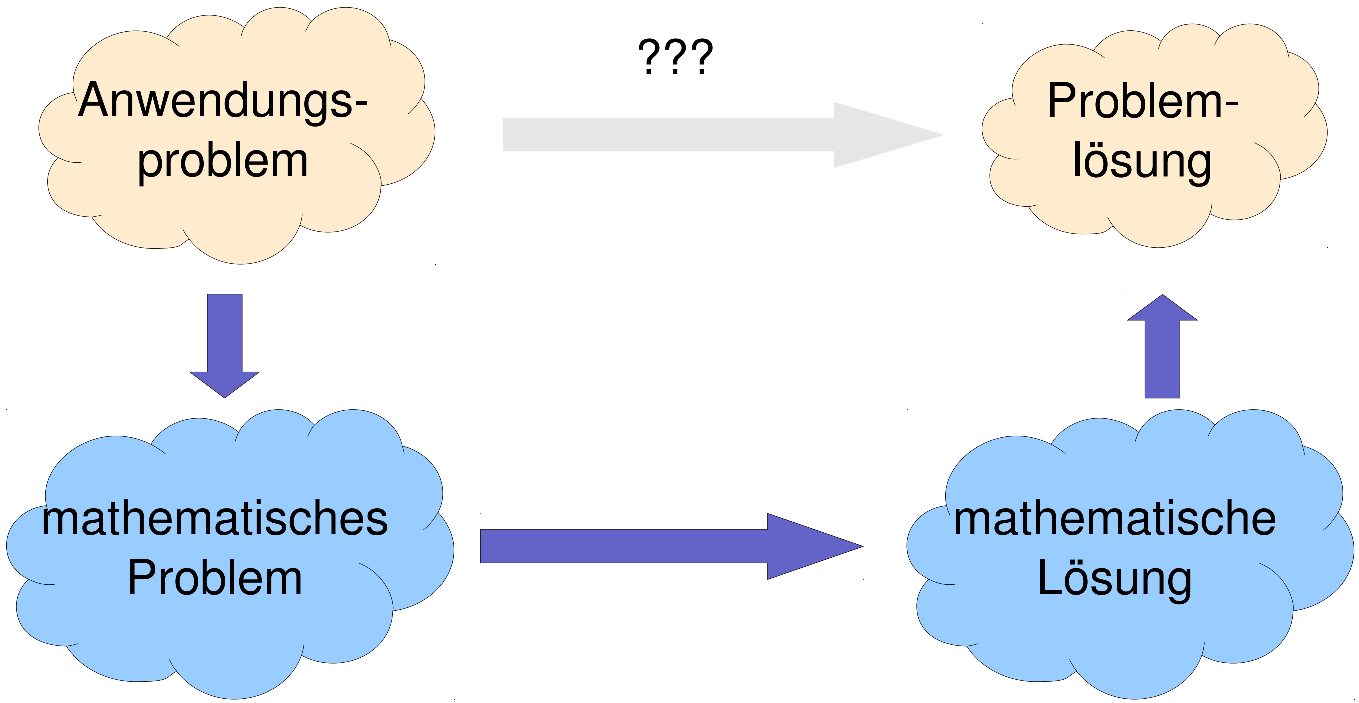
„Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse.

-- R. Descartes --

Was lernen Sie hier?

genauer: Was sollen Sie hier lernen?

II. Mathematische Sprache, Notation und den Übersetzungsprozeß



„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsbald etwas ganz anderes.“

-- J.W. Goethe --

Was lernen Sie hier?

genauer: Was sollen Sie hier lernen?

III. Beweisführung

Beweis: nachvollziehbar fehlerfreie Kette von logischen Schlüssen, die aus den Voraussetzungen die Aussage folgert.

- nachvollziehbar: verständliche Darstellung
  (wer beweisen will, hat die Bringschuld)
- logische Schlüsse: Argumentation genügt den Gesetzen der Logik
  (Ein Kreter sagt: „Alle Kreter lügen.“)
- Voraussetzungen: müssen vollständig und hinreichend sein
  (ggf. stillschweigend – siehe nachvollziehbar)

„Ein Beweis ist eine Argumentation, die einen Fachmann überzeugt.“
-- C. Schulz --

Was lernen Sie hier?

genauer: Was sollen Sie hier lernen?

IV. Beweismethoden

- direkter Beweis
- Widerspruchsbeweis
- vollständige Aufzählung
- vollständige Induktion
- ...

Beweis ohne Widerspruch: „Wer das nicht glaubt, kriegt keinen Schein.“