Blatt 12, 3. Aufgabe, Newtonverfahren

Lösung. (a) Die Tangente an die Funtion $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist durch die Geradengleichung

$$t_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

gegeben.

(b) Durch Auflösen der Bedingung $t_n(x_{n+1}) = 0$ nach x_{n+1} finden wir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

(c) Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 12$ lautet $f'(x) = 3x^2 + 6x - 6$. Für $x_0 = 2$ finden wir $f(2) = -4$ und $f'(2) = 18$. Somit ergibt sich

$$x_1 = 2 + \frac{2}{9} \approx 2,\bar{2}\,.$$

Mit diesem Wert berechnen wir $f(x_1) = \frac{332}{729}$ und $f'(x) = \frac{1794}{81}$ und erhalten

$$x_2 = \frac{17774}{8073} \approx 2,2016598538\,.$$

Schließlich berechet man

$$x_3 \approx 2,2014723537\,.$$

Die von wolframalpha.com berechnete Nullstelle liegt bei $x \approx 2,2014723382$. Die Ergebnisse stimmen also bis zur siebten Nachkommastelle überein.