Analysis I

I Aufbau des Zahlensystems

Treibende Frage:
Was sind reelle Zahlen?
Welche Eigenschaften haben sie?
Wie kann man sie definieren?

I.1 Motivation und Struktur

L. Kronecker: „Die natürlichen Zahlen
1823–91 hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Addition, Multiplikation ✓

Lösung von Gleichungen $3 + x = 5 \Rightarrow x = 2$

$3 + x = 2$? keine Lösung!

Ausweg: man <u>postuliert</u> die Existenz einer Lösung (außerhalb von $\mathbb{N}$) und nennt sie -1

→ ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Addition, Multiplikation, Subtraktion ✓

Lösung von Gleichungen $3x = 9 \Rightarrow x = 3$

$3x = 10$? keine Lösung!

Ausweg: man <u>postuliert</u> die Existenz einer Lösung (außerhalb von $\mathbb{Z}$) und nennt sie $\frac{10}{3}$

→ rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division ✓

Lösung von Gleichungen $x \cdot x = 9 \Rightarrow x \in \{3, -3\}$

$x \cdot x = 2$? keine Lösung!

Anekdote: Pythagoräer

Ausweg: man postuliert die Existenz einer Lösung (außerhalb von $\mathbb{Q}$) und nennt sie $\sqrt{2}$ oder $2^{1/2}$

→ algebraische Zahlen $\cancel{\mathbb{A}}$ $\mathbb{A} = \cancel{\{x \mid a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{Z}\}}$

Anekdote: Zeno

rechnen, polynomielle Gleichungen lösen ✓

Grenzwerte bilden $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$

$(1 + \frac{1}{n})^n \to$? für $n \to \infty$ keine Lösung!

Ausweg: man postuliert die Existenz von Grenzwerten (außerhalb von $\mathbb{Q}$) (bestimmter Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) und nennt sie $\lim_{n\to\infty} x_n$

→ reelle Zahlen $\mathbb{R}$

rechnen, Gleichungen lösen, Grenzwerte bilden ✓

Gleichungen lösen : $x^2 = 2 \Rightarrow$ ~~x = ±~~ $x = \pm\sqrt{2}$

$x^2 = -1 \Rightarrow$? keine Lösung!

Ausweg: man postuliert die Existenz von Lösungen (außerhalb von $\mathbb{R}$) und nennt sie komplexe Zahlen $i = \sqrt{-1}$

→ komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

I.2 Elementare Logik

Ziel: Aussagen über reelle Zahlen (und Funktionen) zu machen und deren Wahrheit (oder Unwahrheit) nachzuweisen

<u>Def</u>: Eine <u>Aussage</u> ist eine Behauptung, die sinnvoll ~~als~~ entweder wahr oder falsch sein kann.

<u>Bsp</u>:
- $2+3=5$, $1/1 = 0$
- Ana I (Lehramt) im WS 2011/12 an der FU wird von Weise gelesen.
- Ist es kalt? (Fragen sind keine Aussagen)
- Heute 3 · grün! (Blödsinn ist keine Aussage)

<u>Negation</u> (nicht): $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, $\neg A$ ist falsch, wenn A wahr ist

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

<u>Konjunktion $\wedge$ und Disjunktion $\vee$:</u>
(und) (oder)

A B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w w	w	w
w f	f	w
f w	f	w
f f	f	f

Achtung: $\vee$ ist das einschließliche oder!

Äquivalenz $\Leftrightarrow$

(genau dann wenn)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Implikation $\Rightarrow$

(wenn dann)

~~Ist A wahr~~ Gilt $A \Rightarrow B$, so ist B mindestens dann wahr, wenn A wahr ist

<u>Bem</u>: Mathem. Sätze werden häufig als wahre Implikationen oder Äquivalenzen angegeben, z.B.

Ist eine natürliche Zahl n durch 4 teilbar, so auch durch 2.

$4 \mid n \Rightarrow 2 \mid n$ ← Behauptung, Folgerung

↑ Voraussetzung, Annahme

<u>Satz I.2.1</u> Für jede Aussage A gilt

$$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$$

<u>Bew.</u> Nach„rechnen" der Wahrheitstabelle

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$
w	f	w	w
f	w	f	w

immer wahr (Tautologie)

<u>Satz I.2.2</u> (Horoskopsatz) Für jede Aussage gilt

$$A \vee (\neg A)$$

<u>Bew</u>:

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
w	f	w
f	w	w

Satz I.2.3 Es gelten

- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontraposition (Grundlage des indirekten Beweises)
- $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (Grundlage des direkten Beweises)

Beweis: selbst nachrechnen!

I.3 Elementare Mengenlehre

Ziel: Aussagen über bestimmte Zahlen / Funktionen machen – wir müssen angeben, welche.

Menge: ungeordnete Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte (Elemente)

Bsp:
- $\{\}$ die leere Menge $\emptyset$
- $\{1,2,3\}$
- $\{0,1,2,3,4,\dots\}$ die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n/2 \in \mathbb{N}\}$ die geraden Zahlen }

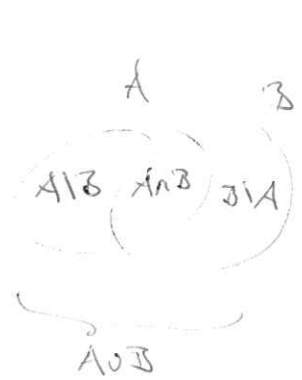
Enthalten: Ist x in X enthalten, schreiben wir $x \in X$, $x \notin X :\Leftrightarrow \neg(x \in X)$

Teilmengen: $X \subset Y :\Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$

Mengengleichheit: $X = Y :\Leftrightarrow (X \subset Y \wedge Y \subset X)$

Mengenkonstruktionen

- Vereinigung: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Schnitt: $A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\}$
- Komplement: $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$
- Potenzmenge: $\mathcal{P}(A) := \{Y \mid Y \subset A\}$



Paare und Produkte

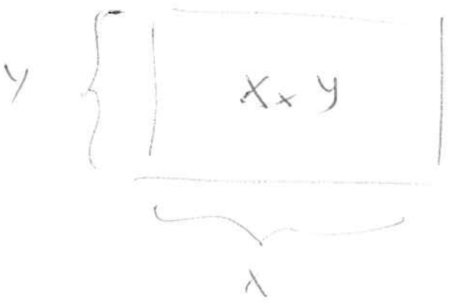
Mengen sind ungeordnet, $\{1,2\} = \{2,1\}$ manchmal werden geordnete „Mengen" gebraucht: Paare bzw Tupel (x_1, x_2) bzw $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Paare sind durch Mengen definierbar:

$$(x_1, x_2) := \{\{x_1, 1\}, \{x_2, 2\}\}$$

Produktmenge: $X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$

$X \times Y \times Z := (X \times Y) \times Z$, wobei wir $((x,y),z)$ mit (x,y,z) identifizieren



Satz I.3.1 $X \times Y = \emptyset \iff (X = \emptyset) \vee (Y = \emptyset)$

Bew zwei Richtungen (wg. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$)

„$\Rightarrow$": zeige $X \times Y = \emptyset \Rightarrow (X = \emptyset) \vee (Y = \emptyset)$ durch Widerspruchsbeweis, also $\neg((X=\emptyset) \vee (Y = \emptyset)) \Rightarrow X \times Y \neq \emptyset$ zeigen

$\neg((X = \emptyset) \vee (Y = \emptyset)) \Leftrightarrow [(\neg(X = \emptyset)) \wedge (\neg(Y = \emptyset))]$

$\Leftrightarrow ((X \neq \emptyset) \wedge (Y \neq \emptyset))$.

Dann existieren Elemente $x \in X$ und $y \in Y$ und damit $(x,y) \in X \times Y \neq \emptyset$.

„$\Leftarrow$" Wiederum durch Kontraposition, also zeige $(X \times Y \neq \emptyset) \Rightarrow [(X \neq \emptyset) \wedge (Y \neq \emptyset)]$

Wegen $X \times Y \neq \emptyset$ existiert $(x,y) \in X \times Y$ mit $x \in X$ und $y \in Y$, also ~~ist~~ weder X noch Y leer. $\square$

I.4 Prädikate und Quantoren

Ist $E(x)$ eine Aussage, die von einem Objekt x abhängt, heißt E Prädikat (Eigenschaft).
Prädikate sind nur auf bestimmten Mengen definiert,
z.B. $E(x)$ = „x ist durch 2 teilbar" auf (natürlichen) Zahlen,
nicht aber auf Farben: $E(\text{blau})$ ist keine Aussage.

Aussagen über alle Elemente einer Menge oder Existenzaussagen formuliert man durch Quantoren:

für alle Elemente gilt E: $\left[\forall x\in X: E(x)\right] :\Leftrightarrow \left(x\in X \Rightarrow E(x)\right)$

es existiert ein Element mit Eigenschaft E: $\left[\exists x\in X: E(x)\right] :\Leftrightarrow \neg\left(x\in X \Rightarrow \neg E(x)\right)$

es ist falsch, daß alle Elemente Eigenschaft E nicht haben

Negation

$$\neg\left(\forall x\in X: E(x)\right) \Leftrightarrow \neg\left(x\in X \Rightarrow E(x)\right) \Leftrightarrow \neg\left(x\in X \Rightarrow \neg(\neg E(x))\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\in X: \neg E(x)$$

anschaulich: „nicht alle Hörer sind weiblich" bedeutet „es gibt ~~eine~~ (mindestens) einen nicht-weiblichen Hörer" (mutmaßlich männlich)
es bedeutet aber nicht „alle Hörer sind männlich"

Also:
$$\neg\,\forall x\in X: E(x) \Leftrightarrow \exists x\in X: \neg E(x)$$
$$\neg\,\exists x\in X: E(x) \Leftrightarrow \forall x\in X: \neg E(x)$$

Bsp Ein Kreter sagt: „Alle Kreter lügen"

x sagt z: $x\to z$ $\quad$ K: Menge der Kreter
x lügt: $L(x)$

$\exists x\in K: x\to\left(\forall y\in K: L(y)\right)$

Negation: $\forall x\in K: \neg\left(x\to\left(\forall y\in K: L(y)\right)\right)$: Kein Kreter behauptet, daß alle Kreter lügen.

I.5 Relationen und Abbildungen

[Beziehungen von Objekten darstellen: Relationen]

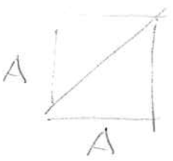
Def I.5.1 Sind A, B Mengen und $R \subset A \times B$. Dann heißt R *Relation* zwischen Elementen aus A und B. Wir schreiben aRb für $(a,b) \in R$.

Bem: eigentlich (A,B,R), aber meist sind A und B klar.

Bsp:
- Sei A die Menge der Tiere und B die Menge der Menschen. Die Beziehung „ist Haustier von" bildet eine Relation zwischen A und B.

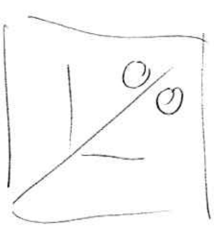
[Relationen zwischen A und A haben besonders viele Anwendungen]

Def I.5.2 Sei A eine Menge und R ~~eine~~ $\subset A \times A$ eine Relation auf A. R heißt

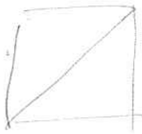


- *reflexiv*, falls gilt $\forall a \in A: aRa$
- *transitiv*, falls gilt: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ $(\forall a,b,c \in A)$
- *symmetrisch*, falls gilt: $aRb \Rightarrow bRa$ $(\forall a,b,c \in A)$

Bsp
- Sei A die Menge der Menschen und R die Relation „ist Nachfahre von". R ist transitiv.
- Sei $A = [0,1]$ und R die Menge der gefärbten Punkte auf einem entlang der Diagonale gefalteten Papierquadrat (Rorschach-Test). Dann ist R symmetrisch
- Sei A die Menge der Bahnhöfe und aRb, wenn einen (mit der Bahn) innerhalb von höchstens einer Stunde von a nach b kommt. Dann ist R reflexiv.



<u>~~Def~~ I.5.3</u> Eine reflexive, transitive und symmetrische Relation $\sim$ auf A heißt <u>Äquivalenzrelation</u>. $[a] := \{ b \in A \mid b \sim a \}$ heißt <u>Äquivalenzklasse</u>, jedes Element $b \in [a]$ <u>Repräsentant</u>. Schließlich heißt $A/\sim \; := \{ [a] \mid a \in A \} \subset P(A)$ <u>Restklassenmenge</u>.



<u>Bsp</u>: • „$=$" $:= \{ (a,a) \mid a \in A \}$ ist eine Äquivalenzrelation mit einelementigen Äquivalenzklassen | Frage: wie sehen die Äquiv.klassen aus?

• Sei $\sim$ als Relation auf $\mathbb{Z}$ definiert durch $n \sim m :\Leftrightarrow n-m$ ist gerade. Dann ist $\mathbb{Z}/\sim \; = \{ [0], [1] \}$, wobei $[0]$ die geraden Zahlen und $[1]$ die ungeraden Zahlen sind.

<u>Def I.5.4</u> Eine reflexive, transitive Relation „$\leq$" auf A heißt <u>Ordnungsrelation</u>, falls sie antisymmetrisch ist, also gilt:

$$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$$

$(A, \leq)$ heißt <u>geordnete Menge</u>.

<u>Bem</u>: Falls klar ist, welche Ordnungsrelation gemeint ist, sagt man auch, A sei eine geordnete Menge.

<u>Bsp</u>: • $(P(A), \subset)$ ist eine geordnete Menge [partiell geordnet]

• $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine geordnete Menge [total geordnet]

• (Menschen, ist Nachfahre von oder identisch mit) ist eine geordnete Menge, [partiell geordnet]

Def I.5.5 Eine Relation f auf den Mengen A und B heißt Abbildungsrelation, falls zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert mit $a f b$. Wir schreiben dafür $f(a) = b$ und nennen f eine Abbildung oder Funktion.

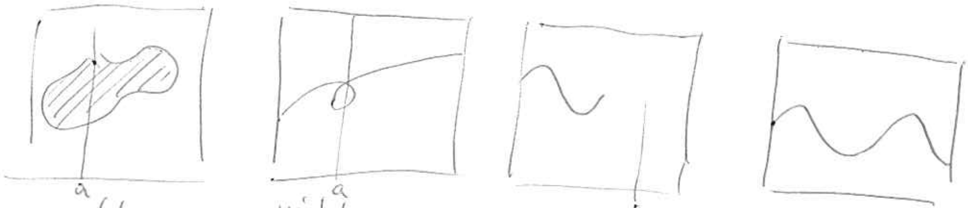
$$f : A \to B$$

A heißt Urbildmenge oder Definitionsbereich, B die Zielmenge oder Wertevorrat.

Bem Am einfachsten stellt man sich Funktionen als Zuordnungsvorschrift vor, die jedem Element aus A genau eines aus B zuordnet:

$$f : A \to B$$
$$a \mapsto f(a) \quad [\text{Zuordnung}]$$

Bsp

- 

nicht eindeutig | nicht eindeutig | nicht für alle a definiert | ✓

- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist Abbildung
- $f(x) = \sqrt{x}$ ist reelle Funktion nur falls

Def I.5.6 Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- injektiv, falls keine zwei Argumente das gleiche Bild haben, also gilt $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- surjektiv, falls jedes Element aus B ein Urbild hat, also gilt $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$
- bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Übung: was bedeutet nicht surjektiv

Bsp 

injektiv | bijektiv | weder in- noch surjektiv | surjektiv

I. 6 Verknüpfungen

[Rechnen mit Zahlen: $a+b$, $a \cdot b$, $a-b$, ...]

Def I.6.1 Eine Abbildung $\square : A \times A \to A$ heißt Verknüpfung.
Wir schreiben $a \square b$ statt $\square(a,b)$. [Für Informatiker: Infix-Notation statt Präfix für Operatoren]

$\square$ heißt

assoziativ, falls $a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$ f.a. $a,b,c \in A$

kommutativ, falls $a \square b = b \square a$ f.a. $a,b \in A$

Existiert $e \in A$ mit

$$e \square a = a \square e = a \qquad \text{f.a. } a \in A,$$

so heißt e neutrales Element.

Bsp.:
- „+" ist assoziative, kommutative Verknüpfung auf $\mathbb{N}$ mit neutralem Element 0
- „−" ist nichtassoziative, nichtkommutative Verknüpfung auf $\mathbb{Z}$ ohne neutrales Element

[Präsenzübung: zeigen Sie, daß „$\cup$" ~~und „$\cap$"~~ Verknüpfung auf $\mathcal{P}(A)$ ist. Bestimmen Sie das neutrale Element. Ist „$\cup$" assoziativ, kommutativ?

Tutoriumsaufgabe: dasselbe für „$\cap$"]

I.7 Natürliche Zahlen

[Bisher alle Objekte aus Mengen konstruiert (minimale Annahmen / Axiome), das wollen wir beibehalten]

Zahlen durch Mengen definieren:

$$0 := \{\}$$
$$1 := \{0\}$$
$$2 := \{1\}$$
$$\vdots$$

Def I.7.1 Es sei $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Bem: Daß diese Definition überhaupt eine Menge beschreibt, ist nicht klar. Wir setzen die Existenz dieser Menge einfach voraus (Axiom).

(N1) Es sei $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ durch $\nu(n) := \{n\}$ gegeben. Offenbar ist ν injektiv [Bem. zu offenbar / trivial], denn $\nu(n) = \nu(m) \Leftrightarrow \{n\} = \{m\} \Leftrightarrow n = m$. ~~Zudem nehmen wir an, dass ν surjektiv ist (das läßt sich nicht zeigen – Axiom).~~

~~[illegible]~~ $\nu(n)$ heißt Nachfolger von n.

(N2) Zudem nehmen wir folgendes an (Axiom): Ist $A \subset \mathbb{N}$ mit $0 \in A$ und $\forall n \in A : \nu(n) \in A$, so ist $A = \mathbb{N}$. [Mit Durchzählen erwischen wir alle Zahlen]

Def I.7.2 Auf $\mathbb{N}$ definieren wir Verknüpfungen „+" und „·" durch

$$n + 0 = n \qquad n \cdot 0 = 0$$
$$n + \nu(m) = \nu(n+m) \qquad n \cdot \nu(m) = n \cdot m + n$$

Satz I.7.3 „+" und „·" sind wohldefiniert, zudem assoziativ, kommutativ, und haben neutrale Elemente 0 bzw. 1. Es gilt das Distributivgesetz $n \cdot (m+k) = n \cdot m + n \cdot k \ \forall n, k, m$

[Zum Beweis benötigen wir die Beweismethode der vollständigen Induktion.]

Satz I.7.4 (Induktionsprinzip)

Es sei E ein Prädikat auf $\mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$.

Es gelte

(i) $E(n_0)$ ist wahr (Induktionsvoraussetzung)

(ii) Für alle $n \geq n_0$ gilt: Ist $E(n)$ wahr, so auch $E(\nu(n))$ (Induktionsschluß/-schritt)

Dann ist $E(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

[Bem. Rekursion]

Anders ausgedrückt: Es gilt

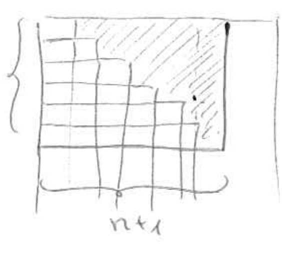
$$\left[E(n_0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \left(E(n) \Rightarrow E(\nu(n)) \right) \right] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : E(n)$$

Bew: Sei $A := \{ n \in \mathbb{N} \mid E(n + n_0) \}$. Wegen (i) gilt $0 \in A$.
Wegen (ii) gilt $\forall n \in A : (n \in A \Rightarrow \nu(n) \in A)$.
Nach Induktionsaxiom (N2) ist $A = \mathbb{N}$, also gilt E für alle $n \geq n_0$. □

Bem: Hier sorgt das Induktionsaxiom dafür, daß $\mathbb{N}$ nicht „zu groß" ist, daß also beim Durchzählen jede Zahl erwischt wird.

Bsp: Kleines Gauß: $\overbrace{\sum_{i=1}^{n} i}^{= 1+2+\dots+n} = \frac{n(n+1)}{2}$

Bew: anschaulich



Gesamtzahl Kästchen: $n(n+1)$
weiße: die Hälfte

induktiv

Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ ✓

Induktionsschritt: Induktionsannahme $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ($E(n)$)

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{E(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \quad (E(n+1))$$

~~Bew von Satz I.7.3~~

Lemma I.7.5 $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist surjektiv.

Bew: Induktionsanfang: $1 = \nu(0) \in \mathrm{Im}(\nu)$

Induktionsschritt: Aus $n \in \mathrm{Im}(\nu)$ (Induktionsannahme) folgt $n \in \mathbb{N}$ wg $\mathrm{Im}(\nu) \subset \mathbb{N}$. Also ist $\nu(n) \in \mathrm{Im}(\nu)$ (Induktionsaussage).

Nach Induktionsprinzip I.7.4 gilt f.a. $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: $n \in \mathrm{Im}(\nu)$ □

Bew von Satz I.7.3 (nur für +)

(i) „+" ist wohldefiniert:
- $n+m$ muß für jedes Paar n,m definiert sein
- die Definition muß eindeutig sein

~~Seien $n,m \in \mathbb{N}$. Ausschließliche Fallunterscheidung~~
~~(a) ist $m=0$, so ist $n+m = n$ definiert. (eindeutig weil (b) nicht zutrifft)~~

~~(b) ist $m \neq 0$, so existiert~~

Sei $n,m \in \mathbb{N}$. Induktionsbeweis über m

Induktionsanfang $m=0$: $n+m=n$ ist definiert, zudem eindeutig, weil 0 keinen Vorgänger hat

Induktionsschritt: Voraussetzung: $n+m$ ist eindeutig definiert.
Schluß: $n+\nu(m) = \nu(n+m)$ eindeutig, weil 0 keinen Vorgänger hat und $n+m$ eindeutig definiert ist.

(ii) „+" ist assoziativ: $(n+m)+k = n+(m+k) \quad \forall\, n,m,k \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang $k=0$: $(n+m)+0 = n+m = n+(m+0)$

Induktionsschritt: Voraussetzung: $(n+m)+k = n+(m+k)$

$$(n+m)+\nu(k) = \nu((n+m)+k) \overset{\checkmark}{=} \nu(n+(m+k))$$
$$= n+\nu(m+k) = n+(m+\nu(k))$$

(iii) „+" ist kommutativ: $n+m = m+n$ f. a. $n,m \in \mathbb{N}$

in ~~...~~ 3 Schritten

(a) Es gilt $n+1 = \nu(n)$ f. a. $n \in \mathbb{N}$

wegen $n+1 = n+\nu(0) = \nu(n+0) = \nu(n)$

(b) Es gilt $n+1 = 1+n$ f. a. $n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang: $0+1 = 0+\nu(0) = \nu(0+0) = \nu(0) = 1 = 1+0$

Induktionsschritt: Voraussetzung $n+1 = 1+n$

Schluß $\nu(n)+1 = (n+1)+1 = (1+n)+1$

$\overset{\text{assoz}}{=} 1+(n+1) = 1+\nu(n)$

(c) Es gilt $n+m = n+m$ f. a. $n,m \in \mathbb{N}$ Induktion über m.

Induktionsanfang: $n+0 = 0+n$ zeigen

(α) $0+0 = 0+0$

(β) $\nu(k)+0 = (k+1)+0 = k+1 = 1+k$

$= (1+0)+k = (0+1)+k$

$= 0+(1+k) = 0+(k+1) = 0+\nu(k)$

Induktionsschritt: Voraussetzung $n+m = m+n$

Schluß $n+\nu(m) = n+(m+1) = (n+m)+1$

$\overset{\text{ind}}{=} (m+n)+1 = 1+(m+n)$

$= (1+m)+n = (m+1)+n$

$= \nu(m)+n$ $\square$

(ii)

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c)

I.8 Ganze Zahlen

Ziel: Lösbarkeit von Gleichungen $a+x=b$
auch wenn $a > b$

Versuch: $x := (b,a) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Aber: $\left.\begin{array}{l} a+x = b \\ (a+1)+y = (b+1) \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$ angestrebt, doch $(b,a) \neq (b+1,a+1)$!

Abhilfe: (b,a) und $(b+1,a+1)$ als ~~äquivalent~~ gleich auffassen

~~Da~~ dafür $(b,a) \sim (b+1,a+1)$ und
$[(b,a)] = [(b+1,a+1)]$ (von Äquivalenz zur Gleichheit)

Def I.8.1 Sei die Äquivalenzrelation „$\sim$" auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gegeben durch $(b,a)\sim(b',a') :\Leftrightarrow b+a' = a+b'$.
Dann ist $\mathbb{Z} := (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ die Menge der ganzen Zahlen. ~~Die Abbildung $I:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $n\mapsto[(n,0)]$ ist in~~ Wir schreiben n für $[(n,0)]$ und $-n$ für $[(0,n)]$.

Bem: Sind $n,m\in\mathbb{N}$ und $n\neq m$, so gilt $(n,0)\not\sim(m,0)$ und $(0,n)\not\sim(0,m)$. Die Schreibweise ist also eindeutig.

Addition:
$$\left.\begin{array}{l} a+x=b \\ c+y=d \\ \hline (a+c)+(x+y)=(b+d)\end{array}\right\} \Rightarrow [(b,a)]+[(d,c)] := [(b+d,a+c)]$$

Multiplikation:
$$\left.\begin{array}{l} x=b-a \\ y=d-c\end{array}\right\} xy=(b-a)(d-c) = bd-ad-bc+ac$$
$$\Rightarrow ad+bc+xy = bd+ac$$
$$\rightarrow [(b,a)]+[(d,c)] := [(bd+ac, ad+bc)]$$

Satz I.8.2 Die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ sind wohldefiniert, assoziativ, kommutativ. Zu jedem $z\in\mathbb{Z}$ gibt es ein Inverses Element $-z$ der Addition, so daß $z+(-z)=0$.

Bew: (nur für „+")
[Wohldefiniertheit immer problematisch, wenn über Repräsentanten definiert wird. Sicherstellen daß für äquivalente Repräsentanten das gleiche herauskommt: ~~Bsp~~: $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $[(b,a)]\mapsto b+a$]

Sei $(b,a)\sim(b',a')$ und $(d,c)\sim(d',c')$. Dann ~~gilt $[(b,a)]+[(d,c)] = [(b+d,a+c)]$~~
gilt
$$(b+d)+(a'+c') = (b+a')+(d+c')$$
$$= (b'+a)+(d'+c)$$
$$\text{Äquivalenz} \quad = (b'+d')+(a+c)$$
also $(b+d,a+c)\sim(b'+d',a'+c') \Rightarrow [(b+d,a+c)] = [(b'+d',a'+c')]$.

Assoziativität und Kommutativität vererben sich von $\mathbb{N}$:

~~$(n+m)+k = ([(n,0$~~

$$\left([(b,a)]+[(d,c)]\right)+[(f,e)] = [(b+d,\, a+c)]+[(f,e)]$$
$$= [(b+d+f,\, a+c+e)]$$
$$= [(b,a)] + [(d+f,\, c+e)]$$
$$= [(b,a)] + \left([(d,c)]+[(f,e)]\right)$$

$$[(b,a)]+[(d,c)] = [(b+d,\, a+c)]$$
$$= [(d+b,\, c+a)]$$
$$= [(d,c)]+[(b,a)]$$

Neutrales Element ist offenbar $[(0,0)]$.

Inverses Element:

~~(i) Sei $z = [(b,a)]$ mit $b \geq a$.~~

Sei $z = [(b,a)]$. Dann ist $-z = [(a,b)]$,

denn $z + (-z) = [(b+a,\, a+b)] = [(0,0)] = 0$. □

Satz I.83 Die Abbildung $z : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n,0)]$ ist injektiv und mit der Addition ~~verträglich~~, Mult. und Ordnung ~~der~~ verträglich, d.h. es gilt

$$z(n) + z(m) = z(n+m)$$
$$z(n)\cdot z(m) = z(n\cdot m) \qquad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$$
$$z(n) \leq z(m) \iff n \leq m \qquad \text{Interpretiere } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Bew: (nur „+", „·") Injektivität:

$$z(n) = z(m) \iff [(n,0)] = [(m,0)] \iff (n,0) \sim (m,0)$$
$$\iff n+0 = m+0 \iff n = m$$

Verträglichkeit:
$$z(n)+z(m) = [(n,0)]+[(m,0)]$$
$$= [(n+m,\, 0)]$$
$$= z(n+m)$$

$$z(n)\cdot z(m) = [(n,0)]\cdot[(m,0)]$$
$$= [(n\cdot m + 0\cdot 0,\, n\cdot 0 + m\cdot 0)]$$
$$= [(nm, 0)] = z(nm)$$ □

Def. I.8.4 Zwei Mengen A, B heißen <u>gleichmächtig</u>, wenn es eine bijektive Abbildung $f: A \to B$ gibt. Eine zu $\mathbb{N}$ gleichmächtige Menge heißt <u>abzählbar unendlich</u>.

Bsp.: $\{0,1,2\}$, $\{2,3,4\}$ sind gleichmächtig
$\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich (denn $\mathbb{N}$ ist zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig durch $n \mapsto n$)

[Frage: gibt es mehr ganze als natürliche Zahlen?]

Satz I.8.5 $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich.

Bew.: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $z \mapsto \begin{cases} 2z, & z \geq 0 \\ -2z-1, & z < 0 \end{cases}$ ist bijektiv

I.9 Rationale Zahlen

Ziel: Lösbarkeit von Gleichungen $ax = b$ auch wenn a kein Teiler von b ist. $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Leftrightarrow ba' = ab'$ $\qquad \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})$

Def. I.9.1 Es sei $\sim$ als Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \setminus \{(b,0) \mid b \in \mathbb{N}\}$ durch $(b,a) \sim (b',a') :\Leftrightarrow ba' = ab'$. Dann ist $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\setminus\{0\})/\sim$ die Menge der rationalen Zahlen. Wir schreiben $\frac{b}{a}$ für $[(b,a)]$ und definieren

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} := \frac{bc+ad}{ac} \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}.$$

[Präsenzaufgabe: zu zweit diskutieren, was schief geht, wenn man $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ verwendet]

Satz I.9.2 Durch „+“ und „·“ sind ~~Verk~~ wohldefinierte Verknüpfungen auf $\mathbb{Q}$ mit neutralen Elementen $\frac{0}{1}$ bzw. $\frac{1}{1}$. Durch $q: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $z \mapsto \frac{z}{1}$ ist eine injektive Abbildung gegeben, die mit „+“ und „·“ ~~und „≤“~~ verträglich ist:

[Achtung! Wieder über Repräsentanten definiert!]

$$q(z) + q(y) = q(z+y)$$
$$q(z) \cdot q(y) = q(zy)$$
$$\cancel{q(z) \leq q(y) \Leftrightarrow z \leq y}$$

Jedes $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq \frac{0}{1}$, hat genau ein multiplikatives Inverses p^{-1} mit $p\,p^{-1} = p^{-1}p = \frac{1}{1}$. Es gilt $\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \frac{a}{b}$.

Zudem gilt das Distributivgesetz $p(q+r) = pq + pr \;\; \forall p,q,r \in \mathbb{Q}$

Bew (teilweise)

Inverses Element: Wegen $ab \cdot 1 = 1 \cdot ba \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = [(ab, ba)] = [(1,1)] = \frac{1}{1}$.

Bem: Wegen der Injektivität und Verträglichkeit von $q: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ können wir $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ auffassen und schreiben z für $\frac{z}{1}$.

Def I.9.3 Sei $(K, „+“, „\cdot“)$ eine Menge mit zwei darauf definierten assoziativen und kommutativen Verknüpfungen mit neutralen Elementen $0 \in K$ bzw $1 \in K$. Zu jedem $k \in K$ existiere ein inverses Element $-k$ bezüglich der Addition „+“. Zu jedem $k \neq 0$ existiere ein inverses Element k^{-1} der Multiplikation „·“. Zudem gelte das Distributivgesetz $k(p+q) = kp + kq \quad \forall k,p,q \in K$. Dann heißt $(K, „+“, „\cdot“)$ ein <u>Körper</u>.

Ist $(K, \leq)$ eine total geordnete Menge und gilt

$\cancel{0 \leq 1, \quad a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b-a \quad \text{f.a. } a,b \in K}$

$x \leq y \Rightarrow \forall z \in K: x+z \leq y+z \qquad$ f.a. $x,y \in K$,

$x,y > 0 \Rightarrow xy > 0$

so heißt K ein geordneter Körper

Bem Wegen $(-b,-a) \sim (b,a) \quad \forall (b,a) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})$
können wir stets annehmen, daß in $\frac{b}{a}$ der Nenner a positiv ist.
Genauer: Wir können uns auf Repräsentanten (b,a) mit positivem Nenner a beschränken.
Konvention: Soweit nicht anders gesagt, sei in $\frac{b}{a}$ der Nenner stets positiv.

Satz I.9.4 Durch

$$\frac{b}{a} \le \frac{d}{c} \quad :\Leftrightarrow \quad cb \le ad$$

wird $\mathbb{Q}$ zum geordneten Körper

Bew (nur Ordnung) (i) Wohldefiniertheit: Sei $(b,a) \sim (b',a') \Leftrightarrow ba' = b'a$
und $(d,c) \sim (d',c') \Leftrightarrow dc' = d'c$
sowie ~~OBdA~~ $b \ge 0 \Rightarrow b' \ge 0$
und $d \ge 0 \Rightarrow d' \ge 0$
(Die anderen Fälle zeigt man (fast) genauso)
Dann gilt

$$cb \le ad \Leftrightarrow b'a \cdot dc' \cdot cb \le ba' \cdot d'c \cdot ad$$
$$\Leftrightarrow b'c' \le a'd'$$

(ii) Reflexivität: Wegen $ab \le ab$ gilt $\frac{b}{a} \le \frac{b}{a} \quad \forall \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$.

(iii) Transitivität: $\frac{b}{a} \le \frac{d}{c} \wedge \frac{d}{c} \le \frac{f}{e} \Leftrightarrow cb \le ad \wedge de \le cf$

$$\overset{e>0,\ a>0}{\Leftrightarrow} cbe \le ade \wedge dea \le cfa$$

Transitivität von „$\le$" auf $\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow cbe \le cfa \overset{c>0}{\Leftrightarrow} be \le fa \Leftrightarrow \frac{b}{a} \le \frac{f}{e}$$

(iv) Antisymmetrie $\frac{b}{a} \le \frac{d}{c} \wedge \frac{d}{c} \le \frac{b}{a} \Leftrightarrow cb \le ad \wedge ad \le cb$

Antisymmetrie von $\le$ in $\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow cb = ad \Leftrightarrow (b,a) \sim (d,c) \Leftrightarrow [(b,a)] = [(d,c)]$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

[$\le$ ist Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$]

(v) total geordnet: zu zeigen: $\forall \frac{b}{a}, \frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$ ~~gilt~~ gilt: $\left(\frac{b}{a} \le \frac{d}{c} \vee \frac{d}{c} \le \frac{b}{a}\right)$

Seien $\frac{b}{a}, \frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$ beliebig. Ist $\frac{b}{a} \le \frac{d}{c}$, so sind wir fertig.

Sei also $\neg\left(\frac{b}{a} \le \frac{d}{c}\right) \Leftrightarrow \neg(cb \le ad) \Rightarrow ad \le cb$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{c} \le \frac{b}{a}$$

So kommt man auf den Beweis.

Wegen $(\neg A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \vee B$ folgt ~~da~~ $\frac{b}{a} \le \frac{d}{c} \vee \frac{d}{c} \le \frac{b}{a}$ $\square$

so ist es logisch elegant.

<u>Def I.9.5</u> Sei $(X, \le)$ eine geordnete Menge und $A \subset X$ nichtleer. Dann heißt A

<u>nach oben beschränkt</u> $:\Leftrightarrow \exists s \in X: \forall a \in A: a \le s$

Bem: manchmal findet man bei geschachtelten Quantoren Schreibweisen wie
$\exists s \in X: a \le s \; \forall a \in A$ (z.B. Amann/Escher S.27)
Heißt das $\exists s \in X: (\forall a \in A: a \le s)$
oder $\forall a \in A: (\exists s \in X: a \le s)$?
Achtung, Verwechselungsgefahr!

<u>nach unten beschränkt</u> $:\Leftrightarrow \exists s \in X: \forall a \in A: s \le a$

<u>beschränkt</u>, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.

Ist A nach oben beschränkt, so heißt jedes $s \in X$ mit $\forall a \in A: a \le s$ <u>obere Schranke</u> von A.

Existiert eine obere Schranke $a \in A$ von A, so heißt a das <u>Maximum</u> $\max(A)$ von A. [analog Minimum etc]

Existiert eine kleinste obere Schranke $\min\{s \in X : \forall a \in A: a \le s\}$, so heißt diese <u>Supremum</u> von A. [Größte untere Schranke: Infimum]

Bsp

- $\mathbb{Q}$ ist unbeschränkt: Annahme: $q \in \mathbb{Q}$ sei obere Schranke (also Maximum). Dann ist $q+1 > q$ im Widerspruch zur Annahme
- $[0,1]$ ist beschränkt mit Maximum ~~gr~~ (und Supremum) 1.
- $]0,1[$ ist beschränkt mit Supremum 1 (1 liegt nicht in $]0,1[$, kann also kein Maximum sein). Es existiert auch kein Maximum, denn wäre $q \in]0,1[$ Maximum, so gilt $q < 1$ und daher $1 > \frac{q+1}{2} > q$, also $\frac{q+1}{2} \in]0,1[$, ~~schlicht~~ im Widerspruch zur Annahme.

ab hier
Di: Jentzsch Di: Demirkan Tut

$(1+q)^n \geq nq$
Aussagen nur für $q \geq -1$.

Def I.9.6 Ein geordneter Körper heißt ordnungsvollständig, falls jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

Satz I.9.7 $\mathbb{Q}$ ist nicht Ordnungsvollständig.

Bew: siehe Übungen

[Bem: fehlende Ordnungsvollständigkeit ist offenbar ein Manko von $\mathbb{Q}$]

I.10 Folgen in $\mathbb{Q}$

Def I.10.1 Sei M eine Menge. Eine Abbildung $x: \mathbb{N} \to M$ heißt Folge (in M). Statt $x: \mathbb{N} \to M$ und $x(i)$ schreiben wir $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und x_i.

[Man kann sich Folgen als lange Zahlenkette vorstellen.]

Bsp
- $x_i = i$ Folge der natürlichen Zahlen
- $x_i = q^i$ geometrische Folge
- $x_n = \frac{1}{n}$ harmonische Folge

[Spannend wird's erst, wenn man Abstände messen kann]

Def I.10.2 Für einen angeordneten Körper K (z.B. $\mathbb{Q}$) definieren wir eine Funktion $|\cdot|: K \to K$,

$$x \longmapsto |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases},$$

den Betrag.

Satz I.10.3 Ist K ein angeordneter Körper, so gilt für alle $x, y \in K$

(i) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$

(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$ (Homogenität)

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

Bew (nur (iii)) zunächst gilt $x \leq |x| \; \forall x \in K$ nach Definition sowie $|-x| = |x|$

(a) $x+y \geq 0$: $\quad |x+y| = x+y \leq |x| + |y|$

(b) $x+y < 0$: $\quad |x+y| = -(x+y) = -x + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$ $\square$

in $\mathbb{Q}$ (oder K)

<u>Def I.10.4</u> Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>konvergent</u> gegen den <u>Grenzwert</u> (Limes) a, falls

$$\cancel{\forall \varepsilon>0 : \exists \delta\in\mathbb{Q} : \forall}$$

$$\forall \varepsilon>0 : \exists n\in\mathbb{N} : \forall m\geq n : \; |x_m - a| \leq \varepsilon .$$

Wir schreiben $x_n \to a$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Eine nicht konvergente Folge heißt <u>divergent</u>.

<u>Bsp</u>
- $x_i = 1$ (konstante Folge) konvergiert gegen 1
- $x_i = (-1)^i$ (alternierende Folge) ist divergent
- $x_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0 (Nullfolge):

  Sei $\varepsilon>0$ und $\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil := \min\{n\in\mathbb{N} : n\geq\frac{1}{\varepsilon}\}$.

  Dann gilt $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ f.a. $m\geq n$ und $|x_m - 0| = \frac{1}{m} \leq \varepsilon$.

alle x_i für $i \geq n_\varepsilon$ liegen in diesem Streifen

<u>Def I.10.5</u> Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>Cauchy-Folge</u>, falls gilt:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N\in\mathbb{N} : \forall m,n\geq N : |x_m - x_n| \leq \varepsilon$$

Grenzwert a tritt nicht auf!

Bsp $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ist Cauchy-Folge, denn

$$x_m - x_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \le \frac{2(m-n)}{m(n+1)}$$

Beweis: Induktion über m

Anfang: $m = n$ klar (beide Seiten 0)

Schritt: Vorauss. $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \le \frac{2(m-n)}{m(n+1)}$

Schluß: $\sum_{k=n+1}^{m+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(m+1)^2}$

$$\le \frac{2(m-n)}{m(n+1)} + \frac{1}{(m+1)^2} \le \frac{2(m-n)}{m(n+1)} + \frac{1}{m(m+1)}$$

$$= \frac{2(m+1)(m-n) + (n+1)}{m(m+1)(n+1)}$$

$$= \frac{2m(m-n) + 2(m-n) + n + 1}{m(m+1)(n+1)}$$

$$= \frac{2(m-n)}{(m+1)(n+1)} + \frac{2m-n+1}{(m+1)(n+1)m}$$

$$\le \frac{2(m-n) + 2 - \frac{(n-1)}{m}}{(m+1)(n+1)}$$

$$\le \frac{2(m-n)+2}{(m+1)(n+1)} = \frac{2(m+1-n)}{(m+1)(n+1)}$$

Bsp $\cdot\ x_n := \frac{1}{n}$ ist Cauchyfolge, denn $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$
$\le \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \le \frac{2}{\min(n,m)} \le \varepsilon$ f.a. $n,m \ge \lceil \frac{\varepsilon}{2} \rceil$

- $x_n = (-1)^n$ ist keine Cauchyfolge, denn $|x_n - x_{n+1}| = 2$ f.a. n

- $x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 2^{-n}, & x_n^2 < 2 \\ x_n - 2^{-n}, & \text{sonst} \end{cases}$ ist Cauchy-Folge,

denn $|x_m - x_n| = |\pm 2^{-(m-1)} \pm 2^{-(m-2)} \pm \dots \pm 2^{-n} + x_n - x_n|$ oBdA $m \ge n$

$$\le \sum_{i=n}^{m-1} 2^{-i} = 2^{-n} \underbrace{\sum_{i=0}^{m-n-1} 2^{-i}}_{\le 2} \le 2^{-(n-1)} < \varepsilon$$ für n hinreichend groß.

24a

Satz I.10.6 Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Bew Sei $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m \ge n_\varepsilon : |x_m - a| \le \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $n, m \ge n_{\varepsilon/2}$. Dann gilt

$$|x_m - x_n| \le |x_m - a + a - x_n| \le |x_m - a| + |a - x_n|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Achtung: Umkehrung gilt nicht (unbedingt)!

Bsp: ~~$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 2^{-n}, & x_n^2 < 2 \\ x_n - 2^{-n}, & x_n^2 > 2 \end{cases}$~~

$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} > 0$

Betrachte zunächst $y_n := x_n^2 = \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\right)^2 = \frac{x_n^2}{4} + 2\frac{x_n}{2}\cdot\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}$

Dann gilt $y_0 \in [1,3]$ $\qquad = \frac{y_n}{4} + 1 + \frac{1}{y_n}$

$y_n \in [1,3] \Rightarrow y_{n+1} \in [1,3]$, denn

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{4} + 1 + \frac{1}{y_n} \le \frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{1} < 3$$
$$\ge \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{3} > 1$$

induktiv: $y_n \in [1,3]$ f.a. n

Damit erhalten wir $x_n \ge 1$.

Weiterhin gilt ~~$|y_{n+1} - y_n| = \left|\frac{y_n}{4} + 1 + \frac{1}{y_n} - y_n\right|$~~

$$|y_{n+1} - 2| = \left|\frac{y_n}{4} + 1 + \frac{1}{y_n} - 2\right| = \cancel{\left|\frac{y_n^2 + 4y_n + 4}{4y_n}\right|}$$

$$= \left|\frac{y_n}{4} - 1 + \frac{1}{y_n}\right|$$

$$= \left|\frac{y_n^2 - 4y_n + 4}{4y_n}\right| = \frac{|y_n - 2|^2}{4y_n}$$

$$\leq \frac{|y_n - 2|}{4y_n}|y_n - 2| \leq \frac{1}{4}|y_n - 2|$$

$$\leq \frac{1}{4^{n+1}}|y_0 - 2| = \frac{1}{4^{n+1}} \to 0,$$

also $y_n \to 2$. ~~oder auch~~ Also gilt

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{(x_n - x_m)\cdot(x_n + x_m)}{x_n + x_m}\right|$$

$$= \frac{|x_n^2 - x_m^2|}{\underbrace{x_n + x_m}_{\geq 2}} \leq \frac{|y_n^2 - y_m^2|}{2}$$

$$\leq \frac{|y_n - 2| + |2 - y_m|}{2} \leq \frac{\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{m+1}}}{2}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{4^{m-n}}}{2 \cdot 4^{n+1}} \leq \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ ist also für alle $n, m \geq \frac{1}{\varepsilon}$

~~$|x_n - x_m| \leq$~~ Bernoulli-Ungleichung

$$4^{n+1} = (1+3)^{n+1} \geq 1 + 3(n+1) \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{4^{n+1}} \leq \varepsilon$$

und somit $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$.

Also ist x_n Cauchy-Folge.

Annahme: $x_n \to a$. Dann gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$\varepsilon \geq |x_n - a| = \left|\frac{(x_n - a)(x_n + a)}{x_n + a}\right| = \frac{|x_n^2 - a^2|}{\underbrace{x_n + a}_{\leq 2+2}} \geq \frac{|y_n - a^2|}{4} \geq \frac{|a^2 - 2| - |y_n - 2|}{4}$$

Wegen $y_n \to 2$ gilt für alle hinreichend großen n

$$|a^2 - 2| \leq 4\varepsilon + |y_n - 2| \leq 5\varepsilon \Rightarrow a^2 = 2.$$

Es gilt aber

Satz I.10.7 Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$

Bew Widerspruchsbeweis: Aus $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$ folgt $n^2 = 2m^2$. Zerlegen wir n und m in Primfaktoren ~~und kürzen~~, so ist die Anzahl des Primfaktors 2 auf der linken Seite gerade, auf der rechten Seite aber ungerade, was offenbar nicht sein kann $\lightning$.

Folgerung: Es gibt Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$, die keinen Grenzwert haben!

I.11 Reelle Zahlen

Ziel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Konstruktion von Grenzwerten: [Wie eigentlich?]

$$M := \{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid (x_i) \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{Q} \}$$

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (y_i)_{i\in\mathbb{N}} :\Leftrightarrow x_i - y_i \to 0$$

reelle Zahlen $\mathbb{R} := M/\sim$

[Präsenzaufgabe: definiere $+, \cdot, <$ auf $\mathbb{R}$]

Addition: $[(x_i)] + [(y_i)] := [(x_i + y_i)]$

Multiplikation $[(x_i)] \cdot [(y_i)] := [(x_i y_i)]$

Ordnung $[(x_i)] < [(y_i)] :\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall m > n : x_i \cancel{+} \varepsilon \leq y_i$

Satz I.11.1 $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper.