Satz I.10.7 Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$

Bew Widerspruchsbeweis: Aus $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$ folgt $n^2 = 2m^2$. Zerlegen wir n und m in Primfaktoren ~~und kürzen~~, so ist die Anzahl des Primfaktors 2 auf der linken Seite gerade, auf der rechten Seite aber ungerade, was offenbar nicht sein kann $\lightning$.

Folgerung: Es gibt Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$, die keinen Grenzwert haben!

I.11 Reelle Zahlen

Ziel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n$

Konstruktion von Grenzwerten: [Wie eigentlich?]

$M := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid (x_i) \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{Q}\}$

$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (y_i)_{i\in\mathbb{N}} :\Leftrightarrow x_i - y_i \to 0$ (Differenz ist Nullfolge)

reelle Zahlen $\mathbb{R} := M/\sim$

[Präsenzaufgabe: definiere $+, \cdot, <$ auf $\mathbb{R}$]

Addition: $[(x_i)] + [(y_i)] := [(x_i + y_i)]$

Multiplikation $[(x_i)] \cdot [(y_i)] := [(x_i y_i)]$

Ordnung $[(x_i)] < [(y_i)] :\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall m > n : x_i + \varepsilon \le y_i$

Satz I.11.1 $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, mit $|[(x_i)]| = [(|x_i|)_{i\in\mathbb{N}}]$.

(ohne Beweis)

Bem: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ durch injektive Abbildung $r: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $r(q) := [(q)_{i\in\mathbb{N}}]$.

Injektivität: $p - q$ ist keine Nullfolge für konstante p und q

Satz I.11.2 — $\mathbb{R}$ ist vollständig: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Bew: Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_i = [(x_{ik})_{k\in\mathbb{N}}]$, $x_{ik}\in\mathbb{Q}$. [Folgenglieder sind Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$]

Dabei ist $(x_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $i\in\mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge. Es existiert also zu $\varepsilon=\frac{1}{i}$ ein $n_i\in\mathbb{N}$, so daß $|x_{ik}-x_{il}|\le\frac{1}{i}$ $\forall k,l\ge n_i$

Wir definieren $a_i := x_{in_i}\in\mathbb{Q}$ f.a. $i\in\mathbb{N}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}|a_i-a_j| &= |x_{in_i}-x_{ik}+x_{ik}-x_{jk}+x_{jk}-x_{jn_j}| \qquad \text{f.a. } k\ge\max(n_i,n_j)\\ &\le |x_{in_i}-x_{ik}|+|x_{ik}-x_{jk}|+|x_{jk}-x_{jn_j}|\\ &\le \frac{1}{i} + |x_{ik}-x_{jk}| + \frac{1}{j}. \qquad (*)\end{aligned}$$

Nun ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, also gilt $|x_i-x_j| < \varepsilon$ für alle $i,j\ge m_\varepsilon\in\mathbb{N}$, also [nach Def von $<$]

$\exists\,\delta>0, n\in\mathbb{N}: \forall k\in\mathbb{N}, l>n: |x_{ik}-x_{jk}|+\delta\le\varepsilon$.

Einsetzen in $(*)$ liefert:

$\forall\varepsilon>0: \exists m_\varepsilon\in\mathbb{N}: \forall_{i,j\ge m_\varepsilon} |a_i-a_j| \le \frac{1}{i}+\varepsilon+\frac{1}{j}$

Oder auch: $\forall\varepsilon>0: \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}: \forall i,j\ge n_\varepsilon: |a_i-a_j|\le 2\varepsilon$
(z.B. mit $n=\max(m_\varepsilon,\lceil\frac{2}{\varepsilon}\rceil)$).

Damit ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge und wir definieren

$a := [(a_i)_{i\in\mathbb{N}}]\in\mathbb{R}$.

Nun gilt $|x_i-a| = [(|x_{ik}-a_k|)_{k\in\mathbb{N}}]$

und

$$\begin{aligned}|x_{ik}-a_k| &\le \cancel{|x_{ik}-x_{kn_k}| \le |x_{ik}-x_{in_i}|+|x_{in_i}-x_{kn_k}|}\\ & |x_{ik}-a_i|+|a_i-a_k|\\ &\le |x_{ik}-x_{in_i}| + 2\varepsilon \qquad \text{für } i,k\ge n_\varepsilon\\ &\le \frac{1}{i}+2\varepsilon \qquad \text{für } i,k\ge\max(n_\varepsilon,n_i)\\ &\le 3\varepsilon \qquad \text{für } i,k\ge\max(n_\varepsilon,n_i,\lceil\tfrac{1}{\varepsilon}\rceil)\end{aligned}$$

Daher ist $|x_i-a|\le 4\varepsilon$ für beliebige ε und hinreichend große $i\in\mathbb{N}$. Also konvergiert x_i gegen a. $\square$

[Cauchy-Folgen konvergieren ✓
Ordnungsvollständigkeit]

Def I.11.3 Sei $A \subset K$ nach oben beschränkt (wobei K ein geordneter Körper sei) und $S := \{x \in K : \forall a \in A : a \leq x\}$ die Menge der oberen Schranken von A. Eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ~~heißt~~ in A heißt Maximalfolge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \underset{s_\varepsilon \in S}{\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}} : \forall m \geq n_\varepsilon : s_\varepsilon - a_m \leq \varepsilon.$$

Satz I.11.4 Jede Maximalfolge ist eine Cauchy-Folge.

Bew: $\forall \varepsilon > 0 : \underset{s_{\varepsilon/2} \in S}{\exists n_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}} : \forall k, l \geq n_{\varepsilon/2} : |x_k - x_l| \leq |x_k - s_{\varepsilon/2}| + |s_{\varepsilon/2} - x_l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Satz I.11.5 Konvergiert die Maximalfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu A, ~~gegen~~ ~~ε, $s \in M$~~ so gilt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sup A$.

(o) Ist $A = \{s\}$ einelementig, so ist der Satz klar. ~~Se~~

Bew: (i) $r := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ist obere Schranke:

Sei $a \in A \setminus S$. Dann existiert $a' \in A$ mit $a < a'$. Sei $\delta := a' - a > 0$. Für alle $s \in S$ gilt $s \geq a'$, also $s - a \geq \delta$. Weil $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Maximalfolge ist, liegen alle Folgenglieder für hinreichend große n oberhalb von a, ~~daher kann a nicht Grenzwert sein.~~ daher gilt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n > a$.

(ii) $r := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ist kleinste obere Schranke:

Sei $q < r$, mit ~~$q \ldots$~~. $\varepsilon := \frac{r - q}{2}$. Da $x_n \to r$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $|r - x_n| \leq \varepsilon$, also ~~$x_n \geq q \ldots$~~

$x_n \geq r - \varepsilon > r - 2\varepsilon = q$. Also kann q keine obere Schranke sein.

□

Korollar I.11.6 $\mathbb{R}$ ist ordnungsvollständig.

Bew: Nach I.11.2, I.11.4 und I.11.5 existiert zu jeder beschränkten Menge ~~ein~~ ein Supremum.

[Wie groß sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$?] | ~~Gobolo & Guvinter~~

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

abzählbar überabzählbar

Satz I.11.7 $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Bew: (i) Es ex. surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$:

- Schreibe $q = \frac{m}{n}$ für alle $q \in \mathbb{Q}$
- Anordnung in Schema, wähle Weg

$$\begin{array}{cccccccccc}
\dots & -3 & -2 \leftarrow & -1 & 0 \rightarrow & 1 & 2 \rightarrow & 3 & 4 & \dots \\
 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \leftarrow & 0 \leftarrow & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \dots \\
 & -1 & -\frac{2}{3} \rightarrow & -\frac{1}{3} \rightarrow & 0 \rightarrow & \frac{1}{3} \rightarrow & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \dots \\
 & & & & & & \leftarrow & \frac{3}{4} & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Jede Zahl $\frac{m}{n}$ wird (irgendwann) besucht, ggf. mehrfach

(ii) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar $\Leftrightarrow$ es ex. keine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x \neq f(n) \right)$

Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir betrachten die Dezimalbrüche

$$S := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i} \;\middle|\; a_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \right\} \subset \mathbb{R}$$

Folge der Partialsummen ist Cauchy-Folge (geometrische Reihe), also konvergent in $\mathbb{R}$

Wir schreiben $S \cap \operatorname{Im} f$ in folgendem Schema

$$\begin{array}{cccccccc}
f(0) & \rightarrow & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \dots \\
f(1) & \rightarrow & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\
f(2) & \rightarrow & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots
\end{array}$$

~~Satz~~

[Cantorsches Diagonalverfahren]

und wählen $b_i := \begin{cases} 1, & a_{ii} \neq 1 \\ 2, & a_{ii} = 1 \end{cases}$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $b := \sum_{i=0}^{\infty} b_i \, 10^{-i} \neq f(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni} \, 10^{-i}$

wegen $b_n \neq a_n$, also existiert $b \in \mathbb{R}$ mit $b \notin \operatorname{Im} f$ □

Zahlenstrahl: [Gosoto & Guunta]

- In der Lücke zwischen ~~zwischen~~ je zwei rationalen Zahlen liegt eine weitere (z.B. $(q_1+q_2)/2$)
- in den reellen Zahlen gibt es keine Lücken

Folgerung: Es gibt <u>viel</u> mehr irrationale als rationale Zahlen! Auf dem Zahlenstrahl sind die rationalen Zahlen praktisch vernachlässigbar

<u>Def I.11.8</u> (kleine Topologie des $\mathbb{R}$) [Rest der Topologie in $\mathbb{R}^n$, Analysis II]

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt <u>offen</u>, wenn zu jedem $x \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subset A$.

~~Aber~~ $B \subset \mathbb{R}$ heißt <u>abgeschlossen</u>, falls $\mathbb{R} \setminus B$ offen ist.

<u>Bsp</u>:
- $]0,1[$ offen
- $[0,1]$ abgeschlossen
- $[0,1[$ weder offen noch abgeschlossen
- ~~$\mathbb{R} \setminus B$~~
- $\{\}$ ist offen
- $\mathbb{R}$ ist offen

$\Rightarrow$ $\{\}$ und $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen

II Reelle Funktionen

Folgen & Reihen, Funktionenfolgen, Potenzreihen, Eigenschaften von Funktionen, Stetigkeit, Zwischenwertsätze

II.1 Mehr zu Folgen und Reihen

Def II.1.1 Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ~~streng~~ strikt ~~monotone~~ Folge in $\mathbb{N}$ (also $i_{n+1} > i_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$), so heißt $(a_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ist $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bijektive Folge in $\mathbb{N}$, so heißt $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz II.1.2 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Es gilt

(i) $a_n \to 0 \wedge \forall n\in\mathbb{N}: |b_n| \le |a_n| \Rightarrow b_n \to 0$

(ii) $a_n \to a \wedge b_n \to b \Rightarrow \begin{array}{l} a_n \pm b_n \to a \pm b \\ a_n b_n \to ab \end{array}$

(iii) $a_n \to a \wedge \forall n\in\mathbb{N}: a_n \le M \Rightarrow a \le M$

(iv) $a_n \to a \Rightarrow a_{i_n} \to a$ für alle injektiven Folgen $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$

[Teilfolgen und Umordnungen konvergenter Folgen konvergieren (gegen den gleichen Grenzwert)]

Bew (i) folgt sofort aus Definition der Konvergenz

(ii) $|(a_n+b_n) - (a+b)| \le \underbrace{|a_n - a|}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} \to 0$ für $n \ge n_{\varepsilon/2}$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$
$$\le \underbrace{|a_n|}_{\le a + \frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{|b_n - b|}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} \cdot |b| \to 0$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n\in\mathbb{N}\ \forall m \ge n: |a_n - a| \le \varepsilon$
$\Leftrightarrow a \le a_n + \varepsilon \Rightarrow a \le M + \varepsilon$

also $\forall \varepsilon > 0: a \le M + \varepsilon \Rightarrow a \le M$

(iv) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : |a_m - a| \leq \varepsilon$ ist $I_\varepsilon := \{ i \in \mathbb{N} : |a_i - a| \geq \varepsilon \} \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$ endlich.
Das Urbild der injektiven Abbildung $(i_n)_{n \in \mathbb{N}} =: \varphi$, $\varphi^{-1}(s) \subset \mathbb{N}$ ist daher ebenfalls endlich (wg. φ injektiv) und somit beschränkt durch N_ε:

$$|a_{i_n} - a| \leq \varepsilon \quad \text{f.a. } n > N_\varepsilon$$

Also gilt $a_{i_n} \to a$. □

[Aus Satz II.1.2 lassen sich viele Konvergenzresultate herleiten und konvergente Folgen konstruieren]

Achtung: $a_n + b_n \to a + b \not\Rightarrow a \to ?,\ b \to ?$

Bsp: $a_n := (-1)^n$, $b_n := (-1)^{n+1}$ $\Rightarrow$ $a_n + b_n \to 0$, aber a_n, b_n divergent

Bsp $\frac{(n-1)^2}{n^2+1} + \frac{n}{n+1} \to 2$, $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ divergent, weil Teilfolge $(a_{2n}), (a_{2n+1})$ untersch. Grenzwerte haben

Satz II.1.3 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge und es gelte
(i) a_n ist monoton wachsend, also $a_{n+1} \geq a_n$
(ii) a_n ist nach oben beschränkt, also $a_n < M$ $\forall n$

Dann gilt: a_n konvergiert.

Bew: $\operatorname{Im}(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist nach oben beschränkt, also existiert $a := \sup \operatorname{Im}(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| = a - a_n \leq \varepsilon$ (sonst wäre $a - \varepsilon$ obere Schranke). Wegen Monotonie gilt $\forall m \geq n : |a_m - a| \leq \varepsilon$. Also ist a_n konvergent gegen a. □

<u>Bsp:</u> $a_n := n^p q^n$ mit $0 \le q < 1$, $p \in \mathbb{N}$

Es gilt $a_n \ge 0$ und

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \frac{1}{q} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p \frac{1}{q} \ge \left(1 - \frac{p}{n+1}\right)\frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \le \frac{q(n+1)}{n+1-p} a_n \le a_n \quad \text{für } n \ge pq^{-1}$$

$\Rightarrow a_n$ ist monoton fallend, also beschränkt.

<u>Satz II.1.4</u> (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte reelle Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

<u>Bew</u> [Wie fängt man einen Löwen in der Wüste?]

Sei $a_0 \le x_n \le b_0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$ und

- $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := c_n$ falls $[a_n, c_n]$ unendlich viele Folgenglieder x_n enthält
- $a_{n+1} := c_n$, $b_{n+1} := b_n$ sonst

Damit sind (a_n), (b_n) monoton und beschränkt, also konvergent. Wegen $b_n - a_n \to 0$ gilt zudem $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. In jedem Intervall $[a_n, b_n]$ liegen unendlich viele Folgenglieder x_k. Wir wählen daraus x_{k_n} mit $k_n > k_{n-1}$. Dann ist $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolge und wegen $a_n \le x_{k_n} \le b_n$ ist $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

$\square$

<u>Alternativer Beweis</u>: Wir zeigen: Jede beschränkte Folge enthält eine monotone Teilfolge (die vg. II.1.3 konvergiert).

x_n ist <u>Gipfelstelle</u>, falls $x_m \leq x_n$ f.a. $m \geq n$.
Existieren unendlich viele Gipfelstellen, so bilden sie eine monoton fallende Teilfolge.
Gibt es dagegen nur endlich viele Gipfelstellen, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N : \exists m_n > n : a_{m_n} > a_n$$

Wir wählen $n_0 := N$ und $n_{k+1} := m_{n_k}$.
Dann gilt $x_{n_{k+1}} > x_{n_k}$, also ist $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Teilfolge. □

<u>Bsp</u> $a_k := (-1)^k$ enthält eine konvergente Teilfolge
z.B. $a_{2k} \to 1$

<u>Def II.1.5</u> Ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ reelle Folge, so heißt $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$ die zugehörige Reihe.
Konvergiert diese, so schreiben wir $\lim_{n \to \infty} y_n =: \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.
[und sonst auch oft ...]

[offenbar sind Reihen auch nur Folgen ... ... aber häufig interessante]

<u>Bsp</u>:
- geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
- harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \to \infty$ (divergente Reihe)

denn $|y_m - y_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k+1} \geq (m-n) \cdot \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{3}$ für $m = 2n$,

also kann $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge sein, daher nicht konvergieren. Weil sie aber monoton ist, kann sie nicht beschränkt sein.

Satz II. 1.6 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$.

(i) Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ existieren, existiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(ii) Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} c\,a_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ für alle $c\in\mathbb{R}$

(iii) Falls $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ existiert und $|a_n| \leq |b_n|$ f.a. $n\in\mathbb{N}$, so existiert auch $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.

(iv) ~~Falls~~ Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert, so gilt $a_n \to 0$.

Bew: (i) Für die Partialsummen gilt $\sum_{n=0}^{m}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{m} a_n + \sum_{n=0}^{m} b_n$ wegen der Kommutativität der Addition. [notfalls $\forall m\in\mathbb{N}$ per Induktion]
Der Grenzübergang folgt aus II. 1.2 (ii)

(ii) analog

(iii) Es gilt für die Partialsummen ws. Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |b_k| \leq \cancel{\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|}\ \varepsilon$$ für n hinreichend groß (weil $\sum |b_n|$ konvergiert)

also ist $y_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine Cauchy-Folge und konvergent in $\mathbb{R}$. Es gilt $|y_n| \leq \sum_{k=0}^{\infty}|b_k|$ und mit II.1.2 (iii) die Aussage.

(iv) mit $y_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ gilt $|a_n| = |y_{n+1} - y_n| \to 0$ weil y_n Cauchy-Folge ist. $\square$

Achtung: • Die Umkehrung von (iv) gilt nicht:

$$\frac{1}{k+1} \to 0, \text{ aber } \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1} \to \infty$$

• Assoziativität & ~~Kommutativität~~ nur bei konvergenten Reihen:

$$\cancel{1 = (-1)^0 + \sum_{k=}}$$

$$1 = 1 + \underbrace{(-1+1)}_{=0} + (-1+1) + \dots = \underbrace{(1-1)}_{=0} + (1-1) + \dots = 0 \quad !$$

• Kommutativität nur bei <u>absolut konvergenten</u> Reihen:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \neq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{4} + \dots$$

Satz II.1.7 (Konvergenzkriterien)

[mindestens]

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert, ~~sofern~~ wenn eines der folgenden Kriterien erfüllt ist:

(i) Wurzelkriterium:

$$\exists n \in \mathbb{N},\ q<1:\ \forall m \geq n:\quad \sqrt[m]{|a_m|} \leq q$$

(ii) Quotientenkriterium:

$$\exists n \in \mathbb{N},\ q<1:\ \forall m \geq n:\quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| \leq q$$

(iii) Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen:

$$|a_{n+1}| < |a_n|,\quad a_n \to 0,\quad a_n = (-1)^n |a_n|$$

Bew (i) Wegen $\sqrt[m]{|a_m|} \leq q \Leftrightarrow |a_m| \leq q^m$ folgt die Konvergenz aus II.1.6 (iii) und der Konvergenz der geometrischen Reihe

(ii) Es gilt $|a_{m+k}| \leq q^k |a_m|$, wieder gilt II.1.6 (iii)

(iii) Es gilt ~~$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq |a_{n+1}+a_{n+2}| + |a_{n+3}+a_{n+4}| + \dots + |a_{m-1}+a_m|$~~

~~$= ||a_{n+1}|-|a_{n+2}|| + ||a_{n+3}|-|a_{n+4}|| + \dots + ||a_{m-1}|-|a_m||$~~

OBdA sei n gerade. Dann gilt

$0 \leq a_n$

$0 \leq a_n + a_{n+1} \leq a_n$ (wg. $a_{n+1}<0$, aber $|a_{n+1}|<|a_n|$)

$0 \leq a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \leq a_n$ (wg $a_{n+2}>0$, aber $|a_{n+2}|<|a_{n+1}|$)

$\vdots$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq |a_n| \to 0,$$ also ist $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. □

Bsp:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$, denn
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}\, n!}{x^n\, (n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \leq \frac{|x|}{|x|+1} \text{ für } n > |x|$$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ existiert, weil $\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ ab $n=2$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ existiert wg. Leibnitz

(i), (ii) beruhen auf geom. Reihe, sind also für langsam konvergente Reihen $\sum_n \frac{1}{k^2}$ nicht brauchbar.

Def II.1.8 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ existiert [konvergiert].

Satz II.1.9 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $(a_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung. Dann ist auch

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{k_i} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{konvergent.}$$

[ohne Beweis]

II.2 Potenzreihen

Konstruktion von Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch parametrisierte Reihen

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

Besonders wichtig: $f_k(x) = x^k \cdot a_k$

Def II.2.1 Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Folge. Wir setzen

$$D_a := \left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ existiert} \right\} \quad \text{und}$$

$$f_a : D_a \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

(die zu (a_k) gehörige <u>Potenzreihe</u>).

Bsp

- $a_k = 0$ für alle $k > p$
  $\Rightarrow f_a(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ ist ein Polynom, $D_a = \mathbb{R}$

  [→ offenbar ist die Klasse der durch Potenzreihen gegebenen Funktionen reichhaltig]

- $a_k = \frac{1}{k!}$.
  Schon gezeigt (mit Quotientenkriterium):
  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ existiert f.a. $x\in\mathbb{R} \Rightarrow D_a = \mathbb{R}$.