- $a_n = \frac{1}{n+1}$

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

[Präsenzaufgabe: bestimme D_a]

[Lösung: $D_a = [-1, 1[$, denn
f_a konvergiert für $|x| < 1$ nach dem Quotientenkriterium
divergiert für $|x| > 1$ ($x^n a_n$ ist keine Nullfolge)
konvergiert für $x = -1$ nach Leibnitz
divergiert für $x = 1$ (harmon. Reihe)]

<u>Lemma II.2.2</u> Ist $x \in D_a$ und $|y| < |x|$, so gilt $y \in D_a$.
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ ist sogar absolut konvergent.

<u>Bew</u> Wegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent gilt $|a_n x^n| \to 0$, also ist $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt mit $|a_n x^n| \leq M \in \mathbb{R}$. Zudem gilt $q := \left|\frac{y}{x}\right| < 1$ und

$$|a_n y^n| = |a_n x^n| \left|\frac{y^n}{x^n}\right| \leq M q^n.$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n y^n|$ nach Wurzelkriterium. □

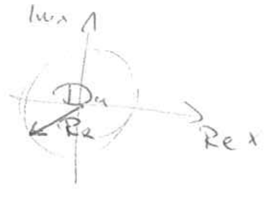
<u>Korollar II.2.3</u> Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt für den Definitionsbereich D_a der zugehörigen Potenzreihe

- entweder ist $D_a = \mathbb{R}$, dann definieren wir $R_a := +\infty$
- oder es gibt ein eindeutiges $R_a \in \mathbb{R}$ mit

$$]-R_a, R_a[\; \subset D_a \subset [-R_a, R_a]$$

R_a heißt <u>Konvergenzradius</u> der Potenzreihe.
Auf $]-R_a, R_a[$ konvergiert f_a absolut.

[„Radius": Der Satz gilt auch in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, wo D_a dann eine Kreisscheibe ist.



]

<u>Bew</u> Sei $D_a \neq \mathbb{R}$ und $x_0 \notin D_a$. Ist $x \in D_a$, so gilt $|x| \leq |x_0|$ (sonst wäre wg Lemma II.2.2 $x_0 \in D_a$)
Damit ist D_a beschränkt und wir wählen $R_a := \sup\{|x|, x \in D_a\}$
(D_a ist nichtleer, weil $0 \in D_a$). Also gilt $D_a \subset [-R_a, R_a]$.
Ist $|y| < R_a$, so existiert $z \in D_a$ mit $|z| > |y|$
[z.B. $z := \frac{R_a + |y|}{2}$]. Also ist $y \in D_a$ nach Lemma II.2.2 und $f_a(y)$ konv. absolut.
Daher gilt $]-R_a, R_a[\subset D_a$.

Offenbar ist die Wahl von R_a eindeutig. $\square$
~~Ist $y \in]-R_a, R_a[$, so existiert $x \in D_a$ mit $|x| > |y|$. Also konv. $f_a(y)$ absolut nach II.2.2.~~

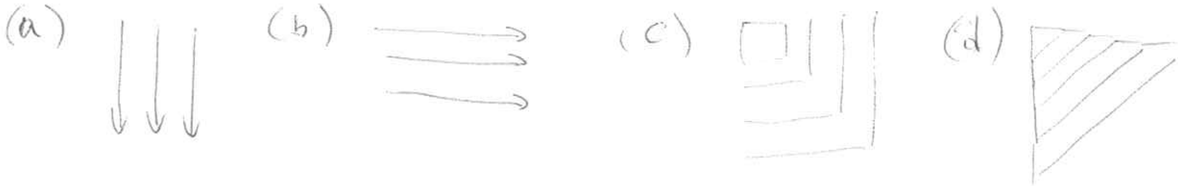
~~Satz II.2.~~

Was ist für $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ das Produkt $f(x)\,g(y)$? Allgemein: $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = ?$

Formales Ausmultiplizieren:

$$\begin{matrix} a_0 b_0 & a_1 b_0 & a_2 b_0 & a_3 b_0 & a_4 b_0 & \\ a_0 b_1 & a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 & & \cdots \\ a_0 b_2 & a_1 b_2 & a_2 b_2 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \end{matrix}$$

abzählbar viele Summanden – aber welche Summationsreihenfolge?



Satz II.24 Seien $a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $b := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen. Dann gilt

$$c := ab = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_k b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_n\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k,n\le m}^{m} a_k b_n .$$

Sind a und b absolut konvergent, so gilt zusätzlich

$$c = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \quad \text{ist absolut konvergent.}$$

Bew Nach II.1.6 (ii) gilt

$$c = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) b_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_n\right),$$

analog umgekehrt. Weiterhin gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, M \in \mathbb{N}\ \forall m \ge M : \left|\sum_{k=M+1}^{\infty} a_k\right| \le \varepsilon \ge \left|\sum_{n=M+1}^{\infty} b_n\right|$$

Dann ist

$$c = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{n=0}^{m} b_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\right)$$

$$= \sum_{k,n=0}^{m} a_k b_k + \left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right)\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\right) + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{n=0}^{m} b_n\right)$$

$$+ \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\right),$$

$\approx c$	$\approx \varepsilon b$
$\approx \varepsilon a$	ε^2

also

$$\left|c - \sum_{k,n=0}^{m} a_k b_k\right| \le \left|\sum_{k=0}^{m} a_k\right| \varepsilon + \varepsilon \left|\sum_{n=0}^{m} b_n\right| + \varepsilon^2$$

$$\le (|a|+\varepsilon)\varepsilon + \varepsilon(|b|+\varepsilon) + \varepsilon^2$$

$$= \varepsilon(|a|+|b|) + 3\varepsilon^2 \to 0 .$$

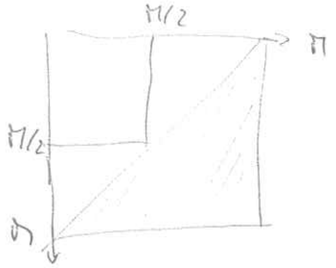
Seien nun a, b absolut konvergent. Dann gilt

$$\sum_{m=0}^{M}\left|\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j}\right| \le \sum_{m=0}^{M}\sum_{j=0}^{M} |a_j b_m| = \left(\sum_{k=0}^{M}|a_k|\right)\left(\sum_{n=0}^{M}|b_n|\right)$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|\right) < \infty,$$

also ist die Reihe absolut konvergent. Nun gilt aber

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} - \sum_{k,n=0}^{M} a_k b_n \leq \sum_{k,n=0}^{M} |a_k b_n| - \sum_{k,n=0}^{M/2} |a_k b_n| \to 0.$$



Also konvergiert $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j}$ ebenfalls gegen c.

$\square$

~~II.3. Spezielle Funktionen~~

~~Satz~~ II.2.5
Korollar

Sei $f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $g_b(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$.

Dann gilt $f_a(x)\, g_b(y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} a_j x^j b_{m-j} y^{m-j}$, sofern f_a, g_b absolut konvergieren, also mindestens in $]-R_a, R_a[\times]-R_b, R_b[$.

Bew. Nach II.2.4 gilt $f_a(x)\, g_b(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} a_j x^j b_{m-j} y^{m-j}$.
Für $(x,y) \in]-R_a, R_a[\times]-R_b, R_b[$ konvergieren $f_a(x), f_b(y)$ absolut nach II.2.3.

$\square$

II.3. Spezielle Funktionen

Multiplikation und insb. Division schwierig, Addition & Subtraktion einfach (relativ) $\to$ Multiplikation auf Addition zurückführen?

$(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{++}, \cdot)$ haben die gleiche algebr. Struktur: Gruppe

Angenommen, es gibt bijektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{++}, \cdot)$

(also $\varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(x+y)$ f. a. $x, y \in \mathbb{R}$).

Dann gilt $ab = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) = \varphi(\alpha+\beta)$ mit $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$

und $1 = \varphi(0) = \varphi(\alpha - \alpha) = \underbrace{\varphi(\alpha)}_{a}\,\underbrace{\varphi(-\alpha)}_{a^{-1}}$, also

$\frac{1}{a} = \varphi(-\varphi^{-1}(a))$ und $\frac{b}{a} = b\frac{1}{a} = \varphi(\beta)\,\varphi(-\alpha) = \varphi(\beta - \alpha)$

Existiert ein solches φ? Wie sieht es aus?

Ansatz: $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x+y)^m \qquad\qquad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} a_j a_{m-j} x^j y^{m-j}$$

$$\| $$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j y^{m-j}$$

$$\|$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} a_m \binom{m}{j} x^j y^{m-j} \qquad \text{für alle } x, y$$

$$\Rightarrow \quad a_j a_{m-j} = \frac{m!\, a_m}{j!\,(m-j)!} \quad \text{oder} \quad \frac{m!}{j!\,(m-j)!} = \frac{a_j\, a_{j-m}}{a_m}$$

Idee: $a_k = \frac{1}{k!}$

$\Rightarrow$ Satz II.3.1 Für die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{gilt } \forall_{x,y \in \mathbb{R}} \; \exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

~~Außerdem gilt~~

[Folgend: Eigenschaften der Exponentialfunktion: existiert $\exp^{-1}$?]

Def II.3.2 Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

- monoton wachsend, falls $f(x) \geq f(y)$ für $x \geq y$
- strikt monoton wachsend, falls $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- konvex, falls $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ für $\lambda \in [0,1]$
- strikt konvex, falls $f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ für $x \neq y$, $\lambda \in]0,1[$.

Satz II 3.3 Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt monoton (wachsend oder fallend). Dann ist f injektiv.

Bew: $(x > y \Rightarrow f(x) > f(y)) \Leftrightarrow (f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y)$

Sei $f(x) = f(y)$. Damit gilt wegen $f(x) \leq f(y)$: $x \leq y$ und wegen $f(y) \leq f(x)$: $y \leq x$ $\Big\} \Rightarrow x = y$ $\square$

Antisymmetrie der Ordnungsrelation

Satz II. 3.4 Die Exponentialfunktion ist strikt monoton wachsend, also injektiv. Sie ist außerdem ~~strikt konvex~~ ~~und~~ surjektiv.

Bew. Es gilt für $x > 0$: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x$.

Sei $z > y$. Dann gilt
$$\exp(z) = \exp(\underbrace{z-y}_{>0}) \underbrace{\exp(y)}_{>0}$$
nach Übung.
$$\geq (1 + z - y)\exp(y)$$
$$> \exp(y).$$

Also ist exp strikt mon. wachsend auf $\mathbb{R}$.

Surjektivität zeigen wir später. $\square$

Def II. 3. 5 Die Umkehrfunktion $\ln := \exp^{-1} : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ heißt natürlicher Logarithmus. Für $a > 0$ definieren wir die allgemeine Potenz

$$a^b := \exp(a \ln(b)).$$

Die verallgemeinerte Potenz ist verträglich mit der einfachen Potenz, denn es gilt für $b \in \mathbb{N} \cancel{\setminus\{0\}}$:

$$a^b = \exp(b \ln(a)) = \exp(\underbrace{\ln(a) + \ldots + \ln(a)}_{b\text{-mal}})$$

$$= \underbrace{\exp(\ln(a)) \cdot \ldots \cdot \exp(\ln(a))}_{b\text{-mal}}$$

$$= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b\text{-mal}}$$

Def II.3.6 $e := \exp(1)$ heißt Eulersche Zahl. Es gilt $\exp(x) = e^x$ [warum?]

Rechnen mit Logarithmen

$$ab = \exp(\ln(a) + \ln(b))$$

Vorgehen (Algorithmus)

1. $\ln(a)$ bestimmen
2. $\ln(b)$ bestimmen
3. $\ln(a) + \ln(b)$ berechnen
4. $\exp(\ln(a) + \ln(b))$ bestimmen

oder

1. $\log_{10}(a)$ bestimmen
2. $\log_{10}(b)$
3. $\log_{10}(a) + \log_{10}(b)$
4. $10^{\log_{10}(a) + \log_{10}(b)}$

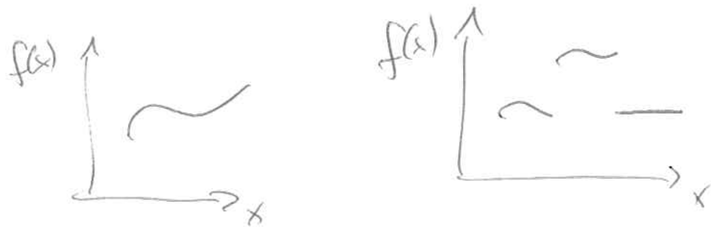
Bsp

$a = 3.141 \longrightarrow 0.4971$

$b = 1.234 \longrightarrow 0.0913$

$+ \; 0.5884 \longrightarrow 3.876$

II. 4 Stetigkeit



[Wie charakterisiert man Funktionen ohne „Lücken"?]

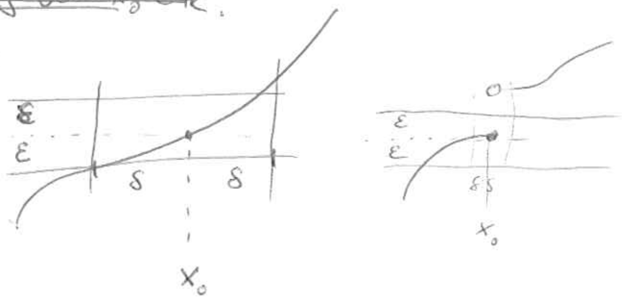
Def II. 4.1 ~~Sei D Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$.~~

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$,

falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D:$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$



Ist f stetig in allen $x \in D$, so heißt f stetig (auf D)

Bsp: • $f(x) = x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$:

Seien x_0 und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt mit $\delta := \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

• $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ (Heaviside - Funktion)

ist unstetig in 0:

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und alle $\delta > 0$ gilt $|f(0) - f(\underbrace{0+\delta}_{\in [x_0-\delta, x_0+\delta]})| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$

• exp ist stetig auf $\mathbb{R}$: $|\exp(x) - \exp(x_0)|$

$$= \exp(x_0)\,|\exp(x - x_0) - 1| = \exp(x_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x-x_0|^k}{k!}$$
$$= \exp(x_0)\,|x - x_0| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x-x_0|^k}{(k+1)!}$$
$$\leq \exp(x_0)\,|x - x_0| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x-x_0|^k}{k!}$$

Satz II 4.2

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \iff (x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0))$$

Bew „⇒" Sei f stetig in x und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $x_n \to x$, sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ex. $\delta > 0$, so daß $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ f.a. $y \in [x - \delta, x + \delta]$. Wg $x_n \to x$ ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_m - x| \leq \delta$ f.a. $m \geq N$. Damit gilt $|f(x) - f(x_m)| \leq \varepsilon$ f.a. $m \geq N$, und somit $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \to f(x)$.

„⇐" Wir zeigen die Kontraposition

f unstetig in $x \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : (x_n \to x \wedge f(x_n) \not\to f(x))$

Sei also f unstetig in x:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_\delta \in [x-\delta, x+\delta] : |f(x_\delta) - f(x)| > \varepsilon.$$

Wir wählen $\delta_n := \frac{1}{n}$ und $x_n := x_{\delta_n}$. Wegen $|x_n - x| \leq \delta_n = \frac{1}{n} \to 0$ gilt $x_n \to x$. Allerdings ist $|f(x_n) - f(x)| > \varepsilon$, also konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x)$. □

Also: Bei stetigen Funktionen darf Funktionsauswertung und Grenzwertbildung vertauscht werden:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

Satz II.4.3 (Permanenzsatz) [Erhalt der Stetigkeit unter versch. Operationen]

(i) Komposition: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in x bzw. $f(x)$, so ist $g \circ f$ stetig in x

(ii) Verknüpfung: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in x. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$, $-f$, $\frac{1}{f}$ stetig in x (bei letzterem nur falls $f(x) \neq 0$).

(iii) Maxima: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ~~sind~~ ist $\max(f, g)$ stetig.

Bew (i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen x. Dann gilt $f(x_n) \to f(x)$ nach II.4.2 wegen Stetigkeit von f in x. Wieder nach II.4.2 gilt $g(f(x_n)) \to g(f(x))$ wegen Stetigkeit von g in $f(x)$. Also gilt $x_n \to x \Rightarrow (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x)$, somit ist $g \circ f$ stetig (II.4.2)

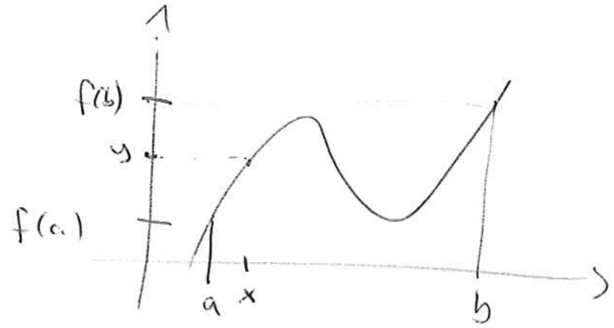
(ii) Sei $x_n \to x$. Also gilt $f(x_n) \to f(x)$ und $g(x_n) \to g(x)$ wg. Stetigkeit von f, g in x und II.4.2. Dann gilt $f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x)$ nach II.1.2.(ii).

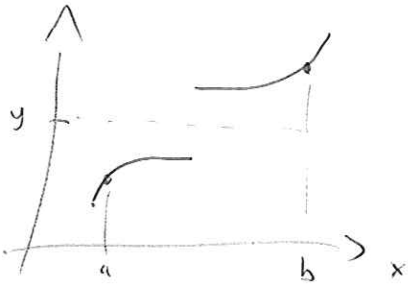
[Rest analog] □

Bsp
- Konstante Fkt stetig } ⇒ alle Polynome sind stetig
  $x \mapsto x$ stetig
- Rationale Funktionen sind stetig (außer an Polstellen)
- exp & log stetig ⇒ a^b stetig

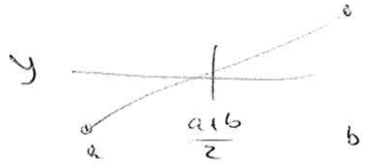
Satz II. 4.4 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$.
Für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ existiert ein
$x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.





Bew: Intervallschachtelung: [Wie fängt man Löwen in der Wüste?]



in (mindestens) einer Hälfte liegt (mindestens) ein Schnittpunkt.

Wir konstruieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \qquad c_n := \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n, & f(c_n) > y \\ c_n, & f(c_n) \le y \end{cases}$$

$$b_{n+1} := \begin{cases} c_n, & f(c_n) > y \\ b_n, & f(c_n) \le y \end{cases}$$

Damit gilt a_n ist monoton wachsend, b_n monoton fallend, zudem $a_n \le b_n$ für alle n und $b_n - a_n \to 0$. Also $x := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

Außerdem gilt $f(a_n) \leq y$ und $f(b_n) \geq y$.
Wegen Stetigkeit von f gilt

$$y \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(x) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq y,$$

also $f(x) = y$. $\square$

Korollar II.4.5 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist surjektiv. [also bijektiv]

Bew: Sei $y > 0$ gegeben. Wegen $\exp(x) \geq 1+x$ für $x \geq 0$ existiert $\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ mit $\exp(\bar{x}) \geq y$.
und $\underline{x} \in \mathbb{R}_+$ mit $\exp(\underline{x}) \geq \frac{1}{y}$, also $\exp(-\underline{x}) \leq y$.
Nach II.4.4. existiert $x \in [-\underline{x}, \bar{x}]$ mit $\exp(x) = y$. $\square$.

Satz II.4.6 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann gilt
$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ ist stetig.

Bew: Aus II.2.5 folgt Injektivität, aus II.4.4 Surjektivität, damit existiert f^{-1} als Umkehrfunktion.

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $[f(a), f(b)]$ mit $y_n \to y$.
Wegen Bijektivität existieren eindeutige $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und x mit $y_n = f(x_n)$ und $y = f(x)$.
Nun betrachten wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ das Intervall $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, da wegen strikter Monotonie gilt $f(x-\varepsilon) < f(x) < f(x+\varepsilon)$ und wegen $y_n \to y = f(x)$ gilt $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n : f(x_m) \in [f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon)]$. Nach II.4.4 ist dann $x_m \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ f.a. $m \geq n$.
Damit konvergiert $x_n \to x$ und f^{-1} ist stetig $\square$

Bsp: $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist stetig

Satz II.4.7 Sei $D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt (kompakt). Dann existieren $\underline{x}, \bar{x} \in D$ mit $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$ f.a. $x \in D$.

[Also: Stetige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen ihr Maximum und Minimum an (sind also insbesondere beschränkt).]

Lemma II.4.8 Ist A abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge in A, so gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$. [Zur Illustration $x_n = \frac{1}{n+1}$ auf $]0,1[$]

Bew: Wir zeigen $y \in \mathbb{R}\setminus A \Rightarrow y \neq \lim_{n\to\infty} x_n$.

Sei $y \in \mathbb{R}\setminus A$, so existiert wegen $\mathbb{R}\setminus A$ offen eine Umgebung von y in $\mathbb{R}\setminus A$, in der offenbar keine Folgenglieder x_n liegen: $\exists \varepsilon > 0$: $[y-\varepsilon, y+\varepsilon] \subset \mathbb{R}\setminus A$.

Daher ist y nicht Grenzwert von x_n. $\square$

[Bem.: Deshalb heißt A überhaupt „abgeschlossen": Mit der Folge ist auch der Grenzwert „drin"]

Bew II.4.7: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Maximalfolge in $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in den zugehörigen Urbildern, also $y_n = f(x_n)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. Wegen D beschränkt und $x_n \in D$ existiert eine konv. Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (Satz II.1.4. Bolzano-Weierstraß) mit Grenzwert $x \in D$ (II.4.8). Nach II.4.2 gilt $y_{n_k} \to f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k})$.
y_{n_k} ist Maximalfolge, also gilt $y_{n_k} \to \sup \operatorname{Im}(f)$.
Eindeutigkeit des Grenzwerts liefert $\sup \operatorname{Im}(f) = f(x)$. $\square$

Bsp:

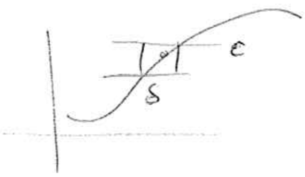
- $\sin(x)$ nimmt auf $[0,\pi]$ Maximum und Minimum an
- $\sin(x)$ nimmt auf $]0,\pi[$ <u>nur</u> Maximum an
  ↖ offen, also nicht kompakt
- $\exp(x)$ nimmt auf $[0,1]$ Maximum & Minimum an
- $\exp(x)$ nimmt auf $\mathbb{R}$ weder Maximum noch Minimum an
  ↖ unbeschränkt, also nicht kompakt

Def II.4.8 $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u>, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \; \forall y \in [x-\delta, x+\delta] : \; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Zur Erinnerung: Stetigkeit ist

$$\forall \varepsilon > 0 \; \underbrace{\forall x \in D \; \exists \delta > 0}_{\text{vertauscht}} \; \forall y \in [x-\delta, x+\delta] : \; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$



gleichmäßig: Wahl von δ unabhängig von der Stelle x möglich!

Bsp:

- Lipschitz-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig mit $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$
- $x \mapsto x^2$ ist gleichmäßig stetig auf $[0,1]$
  (weil Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 2)
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $]0,1[$,
  denn mit $x_n = \frac{1}{n}$ gilt
  $$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right| = 1, \quad \text{aber } |x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{n^2}.$$
  Für $\varepsilon = 1$ existiert also kein $\delta > 0$ für alle x.

Satz II.4.9 Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

Bew ~~Wir zeigen die Kontraposition~~ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

~~f nicht gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f unstetig~~

Ist f stetig, so existiert eine Abbildung $\delta : D \to \mathbb{R}_+$ so dass $f([x-\delta(x), x+\delta(x)]) \subset [f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]$.

Sei nun δ_n Minimalfolge in $\operatorname{Im} \delta$ und x_n Folge in den zugehörigen Urbildern, also $\delta_n = \delta(x_n)$.

Wegen D kompakt existiert konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to x \in D$. δ_{n_k} ist ebenfalls Minimalfolge. Für hinreichend große k gilt $|x_{n_k} - x| \leq \frac{\delta(x)}{2}$ und daher

$$|f(x_{n_k}) - f(y)| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \varepsilon$$

für alle $y \in D$ mit $|x_{n_k} - y| \leq \frac{\delta(x)}{2}$.

Also gilt $\delta(x_{n_k}) \geq \frac{\delta(x)}{2}$ f.a. k und daher

$$\inf \operatorname{Im} \delta = \lim_{k \to \infty} \delta(x_{n_k}) \geq \frac{\delta(x)}{2} > 0. \qquad \square$$

Bsp: • $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig auf $[0,1]$.
(trotz unendlicher Steigung bei 0)