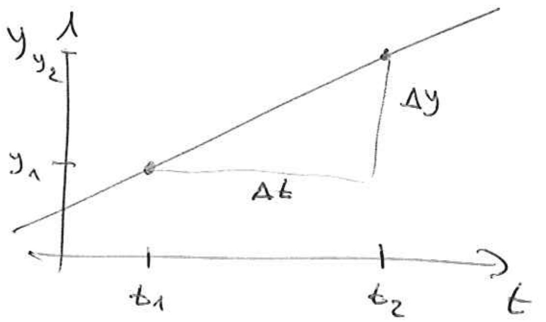
III Differenzierbare Funktionen

III.1 ~~Differenzierbarkeit~~ Ableitungen

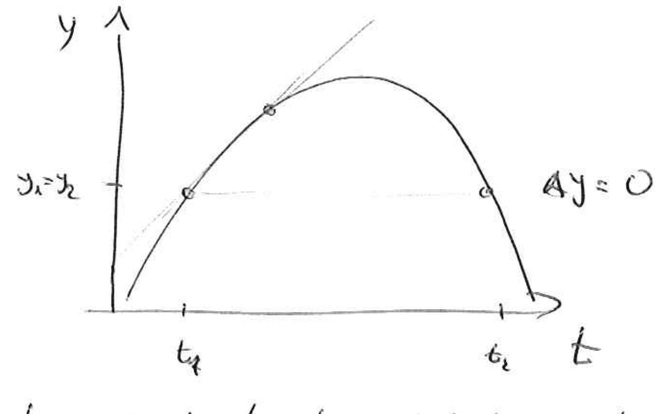
Was ist Geschwindigkeit?

Bewegung eines Punktes (z.B. Fahrradfahrer auf Straße) als Position $y(t)$ zu jeder Zeit t gegeben: wie schnell ist er?

Physik: Geschwindigkeit v ist zurückgelegter Weg $\Delta y = y_2 - y_1$ je Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ (zumindest bei gleichförmiger Bewegung): $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$



Was tun bei nicht-gleichförmiger Bewegung?



Geschwindigkeit ist variabel (hängt von t ab)

$v_{[t_1,t_2]} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ ist gemittelte Geschwindigkeit im Intervall $[t_1, t_2]$.

Geschwindigkeit im Punkt t: $v(t) = \lim_{t_1, t_2 \to t} v_{[t_1,t_2]}$

lokale Approximation durch eine lineare Funktion

falls der Grenzwert für alle Folgen $(t_{1,n})_n$, $(t_{2,n})_n$ existiert.

Stetigkeit: $f(x+\delta) \approx f(x)$ (genauer $|f(x+\delta)-f(x)| \leq \varepsilon$)

Differenzierbarkeit: $f(x+\delta) \approx f(x) + a\delta$ (genauer $|f(x+\delta)-f(x)-a\delta| \leq \varepsilon\delta$)

Def III.1.1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar in x*, falls $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle Folgen $x_n \to x$ mit $x_n \neq x$ f.a.n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} = \alpha$$

wird auch als $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y\neq x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ geschrieben

Dann heißt α *Ableitung* von f in x und wird mit $f'(x)$ oder $\frac{df}{dx}(x)$ bezeichnet.

~~Bem Stetigkeit. Für hinreichend kleine h gilt~~
$$\cancel{|f(x+h)-f(x)| \leq \varepsilon}$$
~~Differenzierbarkeit. Für hinreichend kleine h gilt~~
$$\cancel{|f(x+h)-f(x)| \leq |h|\varepsilon}$$

Bem: Die Eindeutigkeit von α folgt übrigens schon aus der Existenz aller Grenzwerte!

Bsp
- $f(x) = x^2$, $x_n = x + h_n$, $h_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+h_n)^2 - x^2}{h_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2h_n x + h_n^2}{h_n} = \lim_{n\to\infty} 2x + h_n = 2x$$

$\Rightarrow f'(x) = 2x$

mehr Beispiele 53a

- $\exp(x_n) - \exp(x) = \exp(x)\,(x_n - x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_n-x)^k}{(k+1)!}$

$$\lim_{x_n\to x} \frac{\exp(x_n)-\exp(x)}{x_n - x} = \lim_{x_n\to x} \exp(x) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_n-x)^k}{(k+1)!}}_{\to 0} = \exp(x).$$

Satz III.1.2 Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x, so ist f dort auch stetig

~~Bew: Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann gilt $|x_n - x| \leq \varepsilon$ für hinreichend große n.~~

~~Wegen Differenzierbarkeit gilt~~

$$\cancel{|f'(x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}\right| \geq \lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n)-f(x)|}{\varepsilon}}$$

Bsp · $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q^2}, & x = \frac{p}{q} \text{ gekürzt} \end{cases}$ also $f(x) = \max\left\{ \frac{1}{q^2} \mid \exists\, p \in \mathbb{N} : x = \frac{p}{q} \right\}$

ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ und $x_n \to x$, $x_n \neq x$. Dann gilt

ist $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $\dfrac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \dfrac{0-0}{x_n - x} = 0$

ist $x_n \in \mathbb{Q}$: $\dfrac{f(\frac{p}{q}) - f(x)}{\frac{p}{q} - x} = \dfrac{\frac{1}{q^2} - 0}{\frac{p}{q} - x} = \dfrac{1}{q(p-x)}$

$$\leq \frac{1}{q \underbrace{\min_{p \in \mathbb{N}} (p-x)}_{=:\sigma}} \leq \frac{\sigma}{q} \to 0$$

· $f(x) = |x|$ ist in 0 nicht differenzierbar, denn für $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ gilt

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \frac{\frac{1}{n} - 0}{(-1)^n \frac{1}{n} - 0} = (-1)^n \quad \text{divergent}$$

<u>Bew</u> $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)|$

$$= \lim_{n\to\infty} |x_n - x| \left|\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x_n - x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right|$$

$$= 0 \cdot f'(x) = 0$$ □

Satz III.1.3 (Permanenzsatz)

Seien f, g differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$.
Dann gilt

(i) $f+g$ ist differenzierbar mit $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(ii) fg ist differenzierbar mit $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
(insbes $(cf)'(x) = c\, f'(x)$ für Konstanten $c \in \mathbb{R}$)
(Produktregel)

(iii) $g\circ f$ ist differenzierbar mit $(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
(Kettenregel)

(iv) ist $g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar mit
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

(v) Ist f streng monoton wachsend, so ist f^{-1} differenzierbar mit $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

<u>Bew</u> (nur (i) und (ii)) Sei $x_n \to x$ mit $x_n \neq x$

(i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(f+g)(x_n) - (f+g)(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x) + g(x_n) - g(x)}{x_n - x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} + \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)-g(x)}{x_n-x} = f'(x) + g'(x)$$

(ii) $\frac{(fg)(x_n) - (fg)(x)}{x_n - x} = \frac{(fg)(x_n) - f(x)g(x_n) + f(x)g(x_n) - (fg)(x)}{x_n - x}$

$= \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \cdot g(x_n) + f(x) \frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x}$

$\longrightarrow \underset{\text{Diffbarkeit}}{f'(x)} \cdot \underset{\text{Stetigkeit}}{g(x)} + f(x) \underset{\text{Diffbarkeit}}{g'(x)}$

$\square$

Präsenzaufgabe: Zeigen oder widerlegen Sie:

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(i) Existiert diff'bares $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g \circ f$ diffbar, so ist g diff'bar

(ii) Gilt für alle diff'baren $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g \circ f$ diff'bar, so ist g diffbar

Bsp

- $(x^n)' = n x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, denn

  Induktionsanfang $(x^1)' = 1$ (offensichtlich ...)

  Induktionsschritt: Voraussetzung $(x^n)' = n x^{n-1}$

  Schluß $(x^{n+1})' = (x \, x^n)'$

  $= x' \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1}$

  Produktregel $= 1 \cdot x^n + n \, x^n$

  $= (n+1) \, x^n$

- $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)' = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (k+1) x^k$ (Polynome)

- $\ln'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)}$. Mit $y := \exp(x)$ gilt

  $\ln'(y) = \frac{1}{y}$

Bem Einfache Merkregel $f^{-1}(f(x)) = x$

$\Downarrow$

$[f^{-1}(f(x))]' = x' = 1$

$\overset{\parallel}{(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Satz III.1.4 (Ableitung von Potenzreihen)

Sei $f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R_a > 0$. Dann ist f_a auf $]-R_a, R_a[$ diff'bar mit

$$f_a'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) x^k.$$ Der Konvergenzradius von f_a' ist ebenfalls R_a.

(Ohne Beweis - länglich)

Bem: Die Definitionsbereiche von f_a und f_a' können dennoch unterschiedlich sein (an den Rändern!)

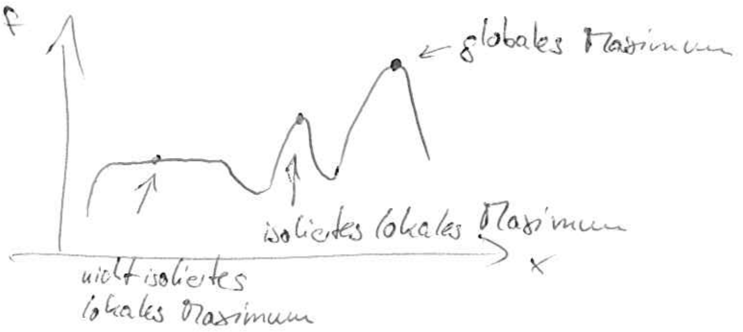
Bsp: $\exp'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$

III.2 ~~Mittelwertsätze~~ Extremwerte

Def III.2.1 ~~Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0.~~

Sei $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben.
$x_0 \in D$ heißt lokaler Maximierer und $f(x_0)$ lokales Maximum, falls eine Umgebung
$U =]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ existiert mit $f(x) \leq f(x_0)$
f.a. $x \in U$. Gilt sogar $f(x) < f(x_0)$ für $x \neq x_0$, so heißt x_0 isolierter (lokal eindeutiger, strikter) Maximierer.

Bsp



[Maxima / Minima sind immer wichtig für Optimierungsaufgaben: Minimierung der Kosten, Maximierung der Ausbeute, Minimierung der Kundenzufriedenheit, ...]

Wie findet man Maxima?

Satz III. 2.2

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in]a,b[$ und x sei lokaler Maximierer. Dann gilt $f'(x) = 0$.

[Also: $f'(x) = 0$ ist <u>notwendige</u> Bedingung (sine qua non) für die Maximierungseigenschaft (sofern diff'bar)]

Bew: Es seien $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $]a,b[$ mit $y_n < x$, $z_n > x$ sowie $y_n \to x$, $z_n \to x$.

Dann gilt

$$\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x} \leq 0$$

Damit gilt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x)}{y_n - x} = f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)-f(x)}{z_n - x} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0. \qquad \square$$

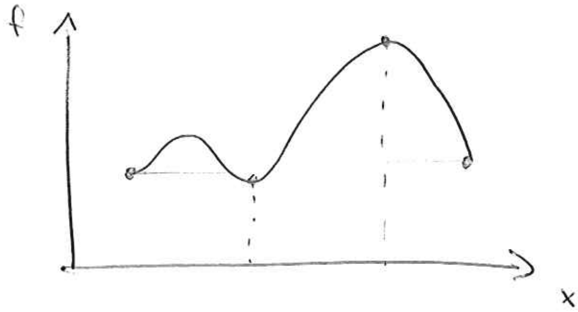
[Analog gilt natürlich bei Minimierern $f'(x) = 0$.]

Präsenzaufgabe: Eine V-förmige Regenrinne aus Blechen der Breite 1 soll so zusammengefügt werden, daß das Fassungsvermögen maximal ist. Welchen Winkel müssen die Schenkel bilden?

III.3. Mittelwertsätze

Satz III.3.1 (Satz von Rolle)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diff'bar. Ist $f(a) = f(b)$, so existiert ein $x \in]a,b[$ mit $f'(x) = 0$.



Bew: Nach II.4.7. nimmt f Minimum und Maximum an. Existiert ein solches in $]a,b[$, so ist nach III.2.2 dort $f'(x)=0$. Andernfalls werden Minimum und Maximum nur in a und b angenommen, es gilt daher (oBdA)
$$f(a) \le f(x) \le f(b) = f(a) \Rightarrow f = \text{const} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \square$$

Bem: Differenzierbarkeit nur auf $]a,b[$ zu fordern erlaubt die Anwendung z.B. auf $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $[-1,1]$.

Bsp:
- $\sqrt{x} - x$ auf $[0,1]$ besitzt x mit $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $x \mapsto \begin{cases} x, & x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$ auf $[0,1]$: kein x mit $f'(x)=0$ [Stetigkeit!]
- $f(x) = x$ auf $[0,1]$: kein x mit $f'(x)=0$ [$f(a) \neq f(b)$]
- $f(x) = |x|$ auf $[-1,1]$: kein x mit $f'(x)=0$ [nicht diffbar in ganz $]-1,1[$]

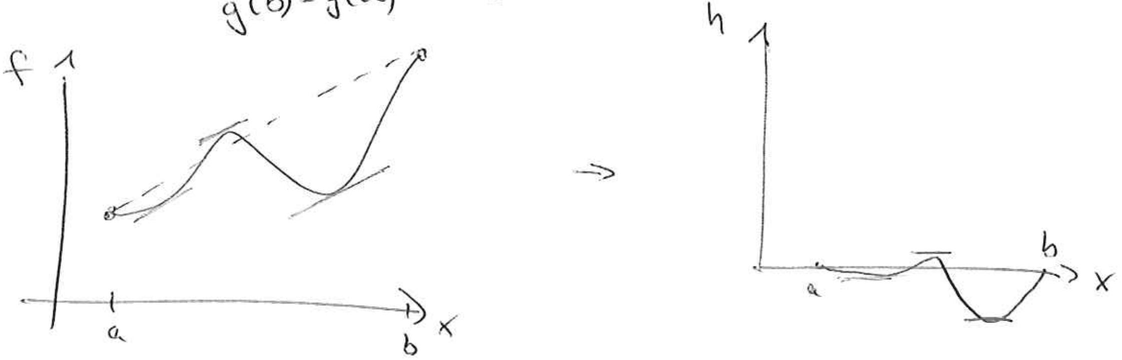
Satz III.3.2 (Mittelwertsätze)

(i) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diffbar.
Dann existiert $x \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x)$$

(ii) Sei f wie oben und g ebenfalls mit zusätzlich $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$.
Dann existiert $x \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



Bew [Topf Wasser]

(i) Zurückführen auf Rolle: $f(a) \neq f(b)$, Sekante abziehen!

$$h(x) := f(x) - \left[f(a) + \frac{x-a}{b-a} \left(f(b) - f(a) \right) \right]$$

h erfüllt Voraussetzungen von III.3.1
$\Rightarrow$ existiert $x \in]a,b[$ mit $h'(x) = 0$

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(ii) Aus (i) folgt: $\exists x \in]a,b[: \ \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(b)-g(a) \neq 0$

Wähle $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x) \Rightarrow \exists x \in]a,b[: h'(x) = 0$,

also $0 = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$ ☐

Korollar III.3.3 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diffbar mit $|f'(x)| \leq L$ f.a. $x \in]a,b[$. Dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L.

[Beweis als Präsenzaufgabe]

Korollar III.3.4 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar

(i) Ist $f'(x)=0$ f.a. x, so ist f konstant

(ii) Ist $f'(x)\geq 0$ f.a. x, so ist f monoton wachsend

$\leq$ fallend

(iii) $>$ streng monoton wachsend

$<$ fallend

Bew: (i) Sei $y\in\,]a,b]$. Dann gilt: $\exists x\in\,]a,y[$: $\frac{f(y)-f(a)}{y-a}=f'(y)=0$, also $f(y)=f(a)$.

(ii) Sei $y<z\in[a,b]$. Dann gilt: $\exists x\in\,]y,z[$: $\frac{f(z)-f(y)}{z-y}=f'(x)\underset{>}{\geq}0$

$\Rightarrow f(z)-f(y)\underset{>}{\geq}0$

$\square$

. . .

[Gilt die Umkehrung auch?]

Bem Es gilt auch f konstant $\Rightarrow f'(x)=0\ \forall x$ ✓

f monoton wachsend $\Rightarrow f'(x)\geq 0\ \forall x$ ✓

f streng monoton w $\not\Rightarrow f'(x)>0\ \forall x$

Bsp: $f(x)=x^3$ streng monoton aber $f'(0)=0$

Def III.3.5 (einseitiger Grenzwert)

Es sei $f:[a,b[\,\to\mathbb{R}$. Existiert $\alpha\in\mathbb{R}$ mit

$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\alpha$ f.a. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n\to b$, $x_n\in[a,b[$,

so heißt $\lim_{x\nearrow b} f(x):=\alpha$ linksseitiger Grenzwert.

(Auch $\lim_{x\to b^-} f(x)$). Analog heißt $\lim_{x\searrow b} f(x)$ rechtsseitiger Grenzwert ($\lim_{x\to b^+} f(x)$). Stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert überein, so schreiben wir $\lim_{x\to b} f(x)$.

Korollar III.3.6 Gilt $\lim_{y \nearrow x} f(y) = \lim_{y \searrow x} f(y)$, so ist f stetig in x.

Ist $f: \mathbb{R}\setminus\{b\}$ stetig und $\lim_{x \searrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} f(x)$, so kann durch $f(b) := \lim_{x \to b} f(x)$ die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Bew: Präsenzaufgabe

Bem: $b = \infty$ sei zugelassen.

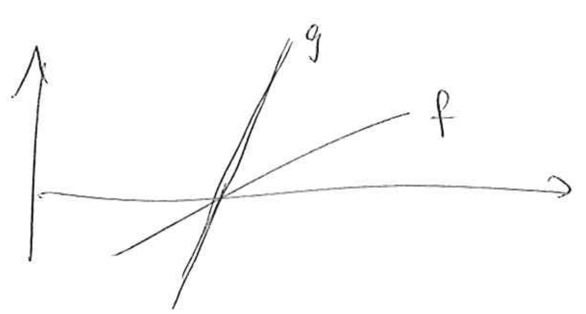
Bsp: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ stetig. Wegen $f(x) = x - 1 \cdot \frac{x+1}{x+1}$ ist $\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} f(x)$ und f stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \frac{x+1}{x}$ für $x \to \infty$? $\quad f(x) = 1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \to 1$

- $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ für $x \to 0$?

Allgemein $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$

$\lim_{x\to b} g$ \ $\lim_{x\to b} f$	0	c_f	∞
0	?	∞	∞
c_g	0	$\frac{c_f}{c_g}$	∞
∞	0	0	?



anschaulich

g „steiler" $\Rightarrow \frac{f}{g} < 1$ bei 0

Satz III.3.7 (Regeln von l'Hospital für 0/0)

Es sei $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b[$ und
$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0.$$
Existiert $\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch
$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bem: Analog gilt das gleiche für rechtsseitige Grenzwerte

Bew (i) Sei $b < \infty$. Durch $f(b) := g(b) := 0$ setzen wir f, g stetig auf $[a, b]$ fort. Sei (x_n) Folge in $[a, b]$ mit $x_n \to b$. Nach III.3.2 (ii) existiert $\xi_n \in]x_n, b[$ mit
$$\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(b) - f(x_n)}{g(b) - g(x_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Wegen $x_n < \xi_n < b$ und $x_n \to b$ gilt $\xi_n \to b$, und wegen der Existenz von $\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ gilt
$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Dies gilt für alle Folgen $x_n \to b$, daher existiert $\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$. ∎

(ii) Sei $b = \infty$ und $c := \max(1, a)$. Wir definieren $F(x) = f(1/x)$ und $G(x) = g(1/x)$ auf $]0, \frac{1}{c}[$.
Dann gilt $\lim\limits_{x \searrow 0} F(x) = \lim\limits_{x \nearrow \infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} G(x) = \lim\limits_{x \nearrow \infty} g(x)$.

Es ist $F'(x) = f'(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2}$ und $G'(x) = g'(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2}$
und somit $\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)}$, also existiert $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim\limits_{x \nearrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Damit sind die Voraussetzungen von (i) erfüllt und es gilt $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x \nearrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Mit $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(1/x)}{g(1/x)}$ gilt $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x \nearrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ □

Satz III.3.8 (Regeln von l'Hospital für ∞/∞)

Es seien $a,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$ und $f,g:]a,b[\to \mathbb{R}$ diffbar mit $g'(x) \neq 0$ f.a. x.

Gilt $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = +\infty$ und existiert

$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert $\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(ohne Beweis)