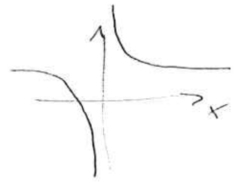
Bsp. $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} \quad (\to 0,\ \searrow 0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{e^x - (-1)e^{-x}}{1} = \lim\limits_{x\searrow 0} e^x + e^{-x} = 2$

- $\lim\limits_{x \nearrow \infty} \dfrac{x+1}{x} \quad (\nearrow \infty,\ \searrow \infty) = \lim\limits_{x \nearrow \infty} \dfrac{1}{1} = 1$

- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x+1} \quad (\to 0,\ \searrow 0) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x}{1} = -2$

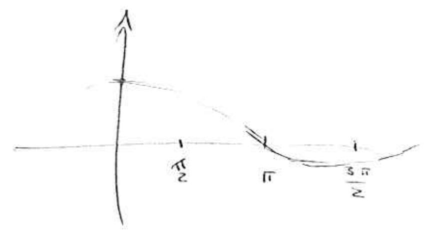
- $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1+x}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{1} = 1$

Achtung: $1 + x \not\to 0$ für $x \to 0$!

[Oder? ]

[• $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\sin x}{x} \quad (\to 0,\ \searrow 0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$]

Wie sieht die Fkt aus?

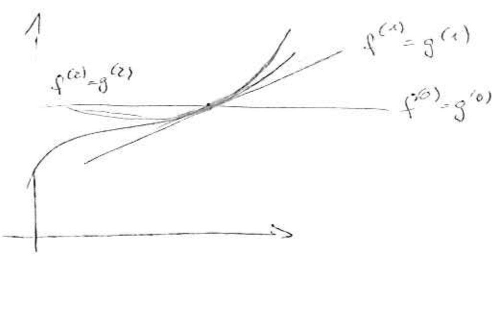


III. 4 Höhere Ableitungen und Taylorpolynome

Def III. 4. 1 Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ diff'bar und f' in $x \in]a,b[$ diff'bar. Dann heißt $(f')'(x) =: f''(x)$ zweite Ableitung von f im Punkt x und f dort zweimal diff'bar. Entsprechend werden höhere Ableitungen f''', $f^{(n)}$ definiert. Wir setzen außerdem $f^{(0)}(x) := f(x)$. Ist $f^{(n)}$ stetig, heißt f n-mal stetig diff'bar.

Satz III. 4. 2 Seien $f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$ in $x \in]a,b[$ stetig n-mal differenzierbar. ~~Dann existieren $\delta, \varepsilon > 0$ so daß $|f(y)$~~ Es gelte $f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$ für $k = 0, \dots, n$.
Dann existiert ~~$\delta, \varepsilon > 0$, so daß~~ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(y) - g(y)| \le \varepsilon |y - x|^n \quad \text{für alle } y \in [x - \delta, x + \delta]$$



Bew: Wir betrachten
$h(y) := (f-g)(x+y)$. Dann ist h n-mal stetig diff'bar und es gilt $h^{(k)}(0) = 0$ für $k = 0, .., n$

Nach III.3. gilt

Stetigkeit von $h^{(n)}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{h(y)}{y^n} = \lim_{y\to 0} \frac{h'(y)}{n y^{n-1}} = \dots = \lim_{y\to 0} \frac{h^{(n)}(y)}{n!} = \frac{h^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

Daraus folgt:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}: \left| \frac{h(y)}{y^n} - 0 \right| \leq \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |h(y)| \leq \varepsilon |y^n|$$

Also gilt
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \setminus \{x\}: |f(y) - g(y)| \leq \varepsilon |y-x|^n$$ □

Beobachtung: Stimmen in x Wert und (viele) Ableitungen von f und g überein, so ist die Abweichung $|f-g|$ in der Nähe von x sehr klein.

Idee: Approximation von Funktionen durch Polynome (einfach zu berechnen und zu analysieren):
Sei $f:]a,b[$ n-mal stetig differenzierbar in x. Wir suchen $p \in \mathbb{P}_n$ mit $p^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ für $k = 0, .., n$.

Satz III. 4.3 Ist $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in $x \in]a,b[$, so existiert genau ein Polynom $p \in \mathbb{P}_n$ (vom Grad $\leq n$) mit $p^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ für $k = 0, .., n$.

Bew Zunächst nehmen wir $x = 0$ an. Dann gilt für $p \in \mathbb{P}_n$
$p(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k y^k$, also $p^{(k)}(0) = k!\, p_k$. Gilt nun $p^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ für $k = 0, .., n$, so folgt $p_k = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$,
also $p(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k$.

Ist $x \neq 0$, so definieren wir $\hat{f}(y) = f(y+x)$. Dann gilt $\hat{f}^{(k)}(0) = f^{(k)}(x)$ und es existiert genau ein $\hat{p} \in \mathbb{P}_n$ mit $\hat{p}^{(k)}(0) = \hat{f}^{(k)}(0) = f^{(k)}(x)$. Setzen wir $p(y) = \hat{p}(y-x) \in \mathbb{P}_n$, so gilt $p^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ für $k = 0, .., n$. □

Also $f(y) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$. Bsp $f = \exp,\ x=0$ $\exp(y) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(y-x)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}$

Def III.4.4. Ist $f:]a,b[$ n-mal differenzierbar in $x \in]a,b[$, so heißt $p_{f,n}(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$ das n-te Taylorpolynom zu f an der Stelle x.

Also $f(y) \approx p_{f,n}(y)$. Wie gut ist die Approximation?

$R_n = f - p_{f,n}$ Restglied

~~Satz III.4.5 (Satz von Taylor)~~

Bsp $f(y) = \sqrt{y}$, $x = 1$

$f^{(0)}(1) = \cancel{x}^{1/2} = 1$

$f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}$

$f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}$

$f^{(3)}(1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}$

$p_{f,3}(1+h) = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{3h^3}{8}$

[Konvergenzbereich für $n \to \infty$?]

Satz III.4.5 (Satz von Taylor)

$f: [x,y] \to \mathbb{R}$ sei $n+1$-mal differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in]x,y[$ mit

$$R_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1},$$

Restglied wie nächstes Monom im Taylorpolynom, nur mit ξ

also

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1}.$$

Anschaulich: $f^{(k)}(x) = p_{f,n}^{(k)}(x)$ für $k=0,\ldots,n$

$\overset{\text{III.4.2}}{\Rightarrow} |f(y) - g(y)| \leq \varepsilon |y-x|^n$ mit $\varepsilon = \sup_{\xi} |f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{p_{f,n}^{(n+1)}(\xi)}_{=0}| \cdot |y-x|$

falls f $n+1$-mal diff bar ist

Zwischenwertsatz $\Rightarrow \exists \xi$ mit Gleichheit

Aber: III.4.2. nutzt l'Hospital, und wir erhalten nur Aussage über den Grenzwert selbst, nichts über das (endliche) Intervall $[x,y]$!

Bew Definiere

$F, G: [x,y] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(y-z)^k}_{\text{Wert des n-ten Taylorpolynoms entwickelt um z im Punkt y}}, \qquad G(z) = (y-z)^{n+1}$$

zweiter Mittelwertsatz: $\exists\, \xi \in [x,y]$ mit

$$\frac{F(y)-F(x)}{G(y)-G(x)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

Es gilt
$$F(y) = f(y)$$
$$F(x) = p_{f,n}(y)$$
$$G(x) = (y-x)^{n+1}$$
$$G(y) = 0$$

$$F'(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[f^{(k+1)}(\xi)(y-\xi)^k + f^{(k)}(\xi)\, k \cdot (y-\xi)^{k-1}(-1)\right] + f'(\xi)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(y-\xi)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(y-\xi)^{k-1} + f'(\xi)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}}{k!}(\xi)(y-\xi)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(y-\xi)^k + f'(\xi)$$
$$= \frac{f^{(n+1)}}{n!}(\xi)(y-\xi)^n - f'(\xi) + f'(\xi)$$
$$= \frac{f^{(n+1)}}{n!}(\xi)(y-\xi)^n$$

$$G'(\xi) = -(n+1)(y-\xi)^n$$

also
$$\frac{f(y)-p_{f,n}(y)}{0-(y-x)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cancel{(y-\xi)^n}}{-(n+1)\cancel{(y-\xi)^n}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{-(n+1)!} \qquad \square.$$

Bem: Für n „groß", $|y-x|$ „klein" und $|f^{(n+1)}(\xi)|$ „nicht groß" ist $|R_n(y)|$ „sehr klein"

Bsp · $f(y) = \sqrt{y}, \quad x = 1$

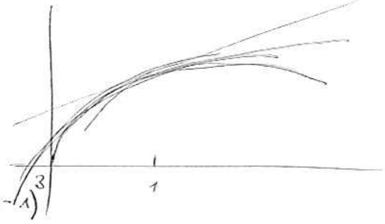
$f^{(0)}(1) = 1$

$f^{(1)}(1) = 1/2$

$f^{(2)}(1) = -1/4$

$f^{(3)}(\xi) = \frac{3}{8}\xi^{-5/2}$

$$p_{f,2}(y) = 1 + \frac{y-1}{2} - \frac{(y-1)^2}{4}$$



Approximationsfehler (Abweichung) $R_2 = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(y-1)^3$

$y \in [0,2]$: $\quad |R_2| \le \sup_{\xi \in]0,2[} \frac{|y-1|^3}{16}\xi^{-5/2} = \infty$

$y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$: $\quad |R_2| \le \frac{|y-1|^3}{16} \sup_{\xi \in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[} \xi^{-5/2}$

$$\le \frac{1}{128}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5/2} = \frac{2^{5/2}}{128} = \frac{\sqrt{2}}{32}$$

$y \in [0.9, 1.1]$: $\quad |R_2| \le \frac{1/10^3}{16} \sup_{\xi \in]0.9,1.1[} \xi^{-5/2} = \frac{1}{16000}\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^{5/2}$

$$= \frac{1}{81\cdot 160}\cdot\sqrt{10/9}$$

$$\le \frac{1}{9\cdot 81\cdot 16} \quad \text{(klein)}$$

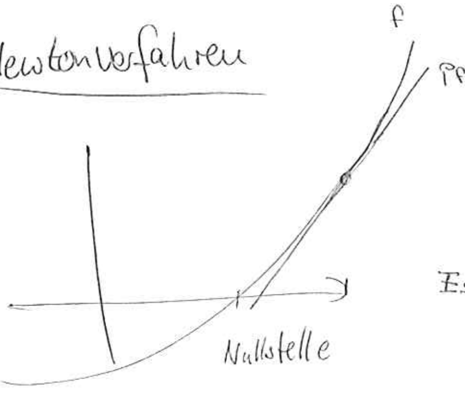
Korollar III.4.6 Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ ~~diff~~ $n+1$-mal differenzierbar und $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ f.a. $\xi \in]a,b[$, so ist f ein Polynom vom Grad $\le n$.

Bew Es ist $p_{f,n} \in \mathcal{P}_n$ und $(f - p_{f,n})(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1}$

$$= 0. \qquad \square$$

Also $f = p_{f,n}$.

Newtonverfahren



Nullstelle von $p_{f,1} \approx$ Nullstelle von f

$$p_{f,1}(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Es gilt $f(x_2) = \underbrace{f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1)}_{=0} + \frac{f''(\xi)(x_2-x_1)^2}{2}$

$$= \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right]^2$$

Ist $f''(x), f'(x) \neq 0$ näherungsweise konstant bei der Nullstelle,

so gilt

$$|f(x_2)| \le c \cdot |f(x_1)|^2 \to 0$$

Verdoppelung der führenden Nullen in jedem Schritt

Satz III.4.7 Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f'(x) = 0$ in $x \in]a,b[$. Ist $f''(x) < 0$, so ist f ein lokaler Maximierer. Ist $f''(x) > 0$, so ist x ein lokaler Minimierer.

[Achtung: Keine Aussage für $f''(x) = 0$]

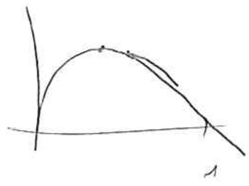
Bew OBdA sei $f''(x) > 0$. Wegen Stetigkeit von f'' existiert dann $\delta > 0$ mit $f(y) > 0$ f.a. $y \in [x-\delta, x+\delta]$.
Dort gilt dann auch

$$f(y) = f(x) + \underbrace{f'(x)(y-x)}_{=0} + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2}_{>0} \quad \text{für ein } \xi \in]x-\delta, x+\delta[$$

Also gilt $f(y) > f(x)$ für $y \neq x$. Damit ist x lokal eindeutiger Minimierer. $\square$

Bsp

- $f(x) = \sqrt{x} - x$



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \Rightarrow x \text{ ist Maximierer}$$

- $f(x) = x^3 + (1-\alpha)x^2 + \alpha x - \frac{\alpha}{4}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2(1-\alpha)x + \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2(1-\alpha) \pm \sqrt{4(1-\alpha)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \alpha}}{6}$$

$$= \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(1-\alpha)^2 - 3\alpha}}{3}$$

2 Nullstellen für $(1-\alpha)^2 - 3\alpha > 0$

$$\alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{25-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} =: \bar{\alpha}_\pm$$

Für $\alpha \in]\bar{\alpha}_-, \bar{\alpha}_+[$: f hat keine Extremalstellen

$\alpha = \bar{\alpha}_\pm$: genau ein Kandidat: $x = \frac{\bar{\alpha}_\pm - 1}{3}$

$\alpha \in]-\infty, \bar{\alpha}_-[\cup]\bar{\alpha}_+, \infty[$: zwei Kandidaten

$$x_\pm = \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(1-\alpha)^2 - 3\alpha}}{3}$$

$$f''(x) = 6x + 2(1-\alpha)$$

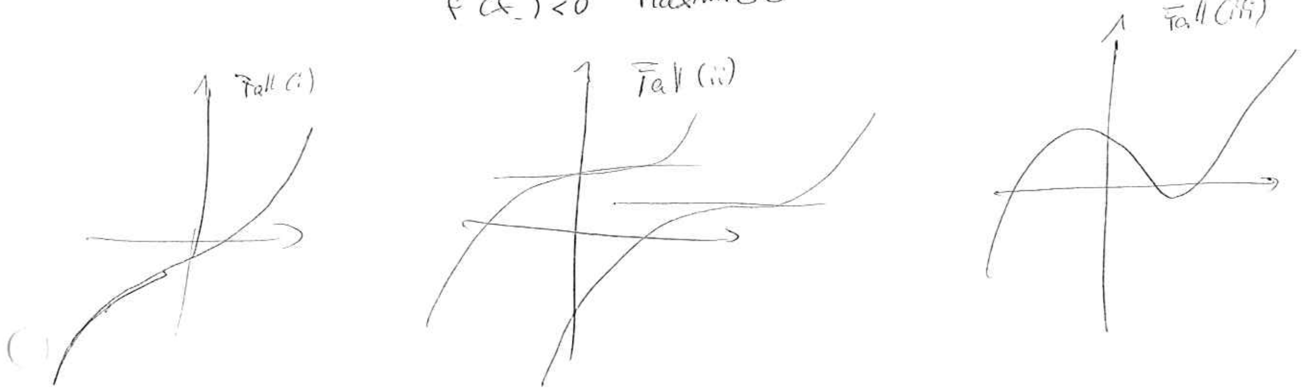
Fall (i) : kein Kandidat

Fall (ii) : $\cancel{f''(\alpha_\pm)} = f''\left(\frac{\alpha_\pm - 1}{3}\right) = 2(\alpha_\pm - 1) + 2(1-\alpha_\pm) = 0 \Rightarrow ?$

Fall (iii) : $f''(x_\pm) = 2\left(\alpha - 1 \pm \sqrt{(1-\alpha)-3\alpha}\right) + 2(1-\alpha)$

$= \pm 2\sqrt{(1-\alpha)-3\alpha}$

$\Rightarrow$ $f''(x_+) > 0$ Minimierer
$f''(x_-) < 0$ Maximierer



Satz III.4.8

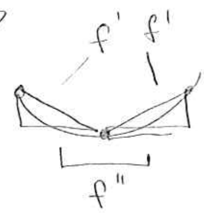
Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

f ist konvex $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in]a,b[$.

Bew "$\Rightarrow$" sei $x \in]a,b[$ und betrachte als Funktion von h

$$0 \leq \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \cancel{\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h}}$$

Skizze



l'Hospital

$$\cancel{= \lim_{h\to 0} \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right)'}$$

$$\cancel{= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f'(x+h)\cdot h - (f(x+h)-f(x))}{h^2} - \frac{-f'(x-h)h - (f(x)-f(x-h))h}{h^2}\right)}$$

$$\cancel{= \lim_{h\to 0}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = f''(x)$$

l'Hospital   l'Hospital

„$\Leftarrow$" Seien $x<y<z \in \,]a,b[$. Dann ex. $\xi \in \,]x,y[$ und $\zeta \in \,]y,z[$

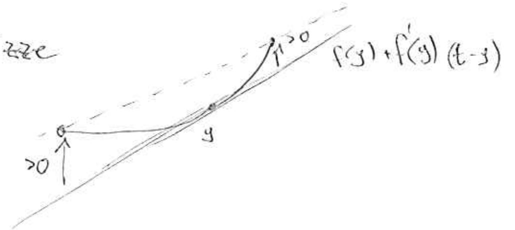
mit $f(x) = f(y) + f'(y)(x-y) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}(x-y)^2}_{>0}$

und $f(z) = f(y) + f'(y)(z-y) + \underbrace{\frac{f''(\zeta)}{2}(z-y)^2}_{>0}$

Es gilt
$$f(y) = \frac{z-y}{z-x} f(y) + \frac{y-x}{z-x} f(y)$$
$$\leq \frac{z-y}{z-x}\big(f(x) - f'(y)(x-y)\big) + \frac{y-x}{z-x}\big(f(z) - f'(y)(z-y)\big)$$
$$= \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z) - \frac{f'(y)}{z-x}\Big(\underbrace{(z-y)(x-y) + (y-x)(z-y)}_{=0}\Big)$$

Wegen $y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$ ist mit $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$ f konvex $\square$

Skizze



71a
hier einfügen

IV Komplexe Zahlen und mehr spezielle Funktionen

IV.1. Komplexe Zahlen

Lösung polynomieller Gleichungen:

$x^2 - 1 = 0 \iff x \in \{-1, 1\}$

$x^2 + 1 = 0 \iff x = ?$

postuliere die Existenz von Lösungen $i^2 + 1 = 0$

~~erweiterte Zahlbegriff: $\mathbb{C} = \{($~~

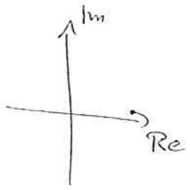
Ziel: rechnen wie gewohnt: $a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+bi) + (c+di) = a+c+(b+d)i$

$(a+bi)(c+di) = ac + (bc+ad)i + bd\underbrace{i^2}_{=-1}$

$= ac - bd + (bc+ad)i$

Def IV.1.1. Es sei $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen $(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$ und $(a,b)(c,d) := (ac-bd, bc+ad)$ die Menge der komplexen Zahlen. Der Betrag ist $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit $|(a,b)| := \sqrt{a^2+b^2}$. Es ist $i := (0,1)$ die imaginäre Einheit. a heißt Realteil und b Imaginärteil von $c = (a,b)$:

$a = \operatorname{Re} c, \quad b = \operatorname{Im} c$



[Gilt immer $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (y-x)^k \to f(y)$?]

Offensichtliche Antworten:

(i) f muß unendlich oft diffbar sein

(ii) Potenzreihen können endlichen Konvergenzradius haben

Bsp $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, Taylorreihe hat Konvergenzradius 1

→ komplexe Zahlen

[Gilt wenigstens $P_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ auf $]-R_a, R_a[$?]

Bsp: $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}), & \text{sonst} \end{cases}$

$f'(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) \cdot 2x^{-3}$

Ziel: untersuche $R_n(y) \to 0$ für $n \to \infty$

Satz IV.1.2 $\mathbb{C}$ ist ein vollständiger Körper.

Bew Nachrechnen der Körpereigenschaften für neutrales Element der Addition $(0,0)$ und der Multiplikation $(1,0)$ und inverse Elemente $(-a,-b)$ bzw. $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

Vollständigkeit: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$ mit $c_n = (a_n, b_n)$.
Ist (c_n) Cauchy-Folge, also

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m\geq N:\ |c_n-c_m|_{\mathbb{C}} \leq \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_n-a_m)^2+(b_n-b_m)^2} \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow |a_n-a_m|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon \ \wedge\ |b_n-b_m|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon,$$

so sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchy-Folgen (in $\mathbb{R}$), also konvergent. Es gilt daher $a_n \to a$ und $b_n \to b$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N:\ \left(|a_n-a|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon \ \wedge\ |b_n-b|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon\right)$$
$$\Leftrightarrow |a_n-a|_{\mathbb{R}}^2 + |b_n-b|_{\mathbb{R}}^2 \leq 2\varepsilon^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2} \leq \sqrt{2}\,\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |(a_n-a, b_n-b)| \leq \sqrt{2}\,\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |(a_n,b_n)-(a,b)| \leq \sqrt{2}\,\varepsilon$$

Somit ist $c=(a,b)$ Grenzwert von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Satz IV.1.3 $\varphi: \mathbb{R} \to \{(x,0)\in\mathbb{C}\}$, $x \mapsto (x,0)$
ist ein bijektiver (Körper-) Homomorphismus.
Wir fassen daher $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf.

Bew: Nachrechnen.

Satz IV.1.4 $\mathbb{C}$ läßt sich nicht anordnen.

Bew: Annahme: Sei $\mathbb{C}$ geordnet und $i>0$.
Dann gilt $i\cdot i > i\cdot 0 = 0 \Rightarrow -1 > 0$ ↯
Sei $i<0$. Dann ist $-i>0$ und $\underbrace{(-i)\cdot(-i)}_{-1} > (-i)\cdot 0 = 0 \Rightarrow -1>0$ ↯
Es kann daher weder $i<0$ noch $i>0$ gelten □

IV.2 Die Exponentialfunktion

Def IV.2.1 Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ die Exponentialfkt.

Satz IV.2.2 $\exp(z)$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergent und es gilt
$\exp(y+z) = \exp(y) \cdot \exp(z)$.

Beweis wie in $\mathbb{R}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!} = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}}_{\substack{\text{gerade Terme} \\ k=2j}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} i(-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}}_{\substack{\text{ungerade Terme} \\ k=2j+1}}$

Def IV.2.3 Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\cos(x) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$

und $\sin(x) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$. Dann gilt

$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Satz IV.2.4 Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-ix) = \cos(x) - i\sin(x)$

und $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, also $|\exp(ix)| = 1$.

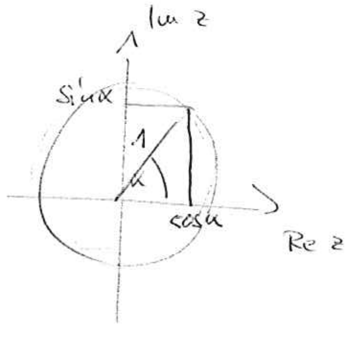
Bew: $\exp(-ix) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(-x)^{2j}}{(2j)} + i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(-x)^{2j+1}}{(2j+1)!}$

$= \cos(x) - i\sin(x)$.

Zudem gilt $\exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1$

$$\exp(ix)\exp(-ix) = (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(x) - i\sin(x)) = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$$

$\square$



Korollar IV. 2.5 Es gilt $e^{i\pi} + 1 = 0$ (Eulersche Formel).

Satz IV. 2.6 $e := \exp(1)$ ist irrational.

Bew (Widerspruchsbeweis) Annahme: $e = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Dann gilt für ein $\xi \in]0,1[$ (Taylor)

$$\frac{m}{n} = e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} 1^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}$$

Multiplikation mit $n!$:

$$\underbrace{m \cdot (n-1)!}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \frac{\exp(\xi)}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\exp(\xi)}{n+1} \in \mathbb{N}.$$

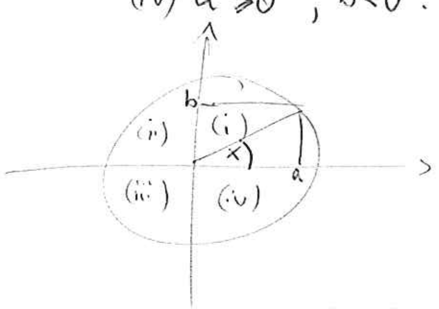
Wir dürfen $n+1 \geq 3$ annehmen (sonst erweitern wir $\frac{m}{n}$ mit 3).
Wegen $1 < \exp(\xi) < 3$ ist dann aber $\frac{\exp(\xi)}{n+1} \notin \mathbb{N}$ ↯ $\square$.

Satz IV. 2.7 Jedes $0 \neq z \in \mathbb{C}$ kann eindeutig als

$z = |z| \exp(ix)$ mit $x \in [0, 2\pi[$ geschrieben werden.

Bew: Sei zunächst $|z| = 1$, also $z = a + bi$ mit $a^2 + b^2 = 1$. ~~Wegen $b \in [-1,1]$~~. Wir unterscheiden vier Fälle:

(i) $a \geq 0$, $b \geq 0$:
(ii) $a < 0$, $b \geq 0$:
(iii) $a < 0$, $b < 0$:
(iv) $a \geq 0$, $b < 0$:



zu (i) Es ex. ~~eindeutiges~~ genau ein $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\sin(x) = b$ (Monotonie & Zwischenwertsatz). Dann gilt $\cos(x) \geq 0$ und $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2} = \sqrt{1 - b^2} = \sqrt{a^2} = a$. ($a \geq 0$!)
Daher gilt $z = \cos(x) + i \sin(x) = \exp(ix)$.
Wegen $\sin(\xi) < 0$ in $\xi \in]\pi, 2\pi[$ und $\cos(\xi) < 0$ in $\xi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$ kann kein weiteres x mit dieser Eigenschaft in $]\frac{\pi}{2}, 2\pi[$ existieren.

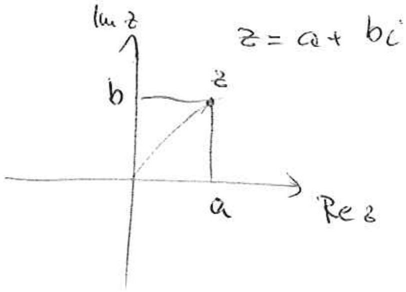
Andere Fälle analog.

Ist $|z| \neq 1$, so betrachten wir $\frac{z}{|z|}$ mit eindeutiger Darstellung $\frac{z}{|z|} = \exp(ix)$. Multiplikation mit $|z|$ liefert das Ergebnis $\square$

→ Zwei Arten zur Darstellung komplexer Zahlen.

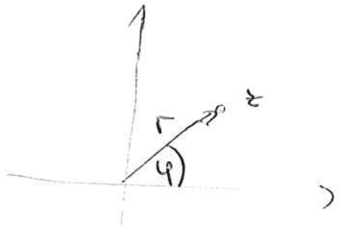
(a) cartesische Darstellung

$z = a + bi$



(b) Polardarstellung:

$z = ~~\text{exp}~~\ r \exp(i\varphi)$



Addition $z + y = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Multiplikation $r\exp(i\varphi) \cdot s\exp(i\gamma) = rs \cdot \exp(i(\varphi+\gamma))$

<u>Bsp:</u> n-te Wurzeln: Was ist $\sqrt[n]{z}$?

Für $z = |z|\exp(i\varphi)$ gilt $\left(\sqrt[n]{|z|} \cdot \exp(i\varphi/n)\right)^n = z$,

allerdings auch

$$\left(\sqrt[n]{|z|} \cdot \cancel{\exp(i(\varphi+k)\ldots} \ \exp(i(\varphi + 2\pi k)/n)\right)^n = z$$

⇒ es gibt zu $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, genau n n-te Wurzeln!