Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. M. Weiser

Übungsblatt 11 zur Vorlesung

# Analysis I

http://www.zib.de/weiser/AnaI-2011/

WS 2011/12

**Abzugeben am 19.01.2012**

**1. Aufgabe** (2 Punkte)
Ein Autofahrer wird von der Polizei um 8 Uhr am Ortseingang Kleinkleckersdorf gesehen. Eine weitere Streife sichtet den Fahrer um 8:15 am 20km entfernten Ortsausgang. Er wird daraufhin beschuldigt, die Höchstgeschwindigkeit von 50km/h überschritten zu haben. Dar Fahrer beteuert jedoch, nie zu schnell gefahren zu sein. Wer hat recht? (Begründen Sie ihre Antwort mathematisch.)

**2. Aufgabe** (2 Punkte)
Die trigonometrischen Funktionen sin und cos werden definiert durch

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Beweisen Sie $\sin'(x) = \cos(x)$.

**3. Aufgabe** (4 Punkte)
Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x \cdot \sin^2(x)$
- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \dfrac{(x^2 - 3x + 2)^3}{1 + x^2}$

- $f_3 : ]0, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \dfrac{\sin\left(\ln(x) \cdot \sqrt{x}\right)}{x^2 \cdot \cos(x)}$
- $f_4 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = x^x$

**4. Aufgabe** (3 Punkte)
Eine auf einer flachen Ebene aufgestellte Kanone schießt ihre Kugel mit der Geschwindigkeit $v$ ab. Unter welchem Winkel muss die Kugel abgeschossen werden, damit sie möglichst weit fliegt? Wie weit kann man die Kugel schießen?

*Anleitung*: Bezeichne mit $\varphi$ den Winkel zwischen der Erdoberfläche und der Abschussrichtung. Die Kanonenkugel startet dann mit Geschwindigkeit $v_y(0) = v \sin(\varphi)$ nach oben. Ihre Höhe in Abhängigkeit der Zeit ist nach Newton

$$y(t) = vt \sin(\varphi) - \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Dabei ist $g$ die Erdbeschleunigung. Berechnen Sie daraus die Zeit, die das Geschoss in der Luft verbringt.

Die Komponente der Geschwindigkeit parallel zum Erdboden beträgt konstant $v_x = v \cos(\varphi)$. Stellen Sie nun eine Formel für die Distanz auf, die die Kugel bis zum Aufprall zurücklegt.