

Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. M. Weiser

Übungsblatt 13 zur Vorlesung
ANALYSIS I
<http://www.zib.de/weiser/AnaI-2011/>
WS 2011/12

Abzugeben am 02.02.2012

1. Aufgabe *L'Hospital* (4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^3)}{1-x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x-\pi)^3}{\cos(x)+1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

2. Aufgabe *Taylorreihen* (4 Punkte)

(a) Geben Sie die Taylorreihe von $\sqrt[3]{x}$ um $x_0 = 2$ an.

(b) Schätzen Sie den Fehler der Taylorentwicklung von $\sqrt[3]{x}$ bis zur n -ten Ordnung auf dem Intervall $[-1, 3]$ ab.

(c) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von $\frac{x-1}{x^2-2x}$ um $x_0 = 1$ bis zur zweiten Ordnung.

(d) Schätzen Sie den Fehler dieser Entwicklung auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ab.

3. Aufgabe quadratisches Newtonverfahren (3+2 Punkte)

Verbessern Sie das Newtonverfahren zur Nullstellensuche, indem Sie die lineare Approximation durch eine quadratische ersetzen:

- Stellen Sie die Gleichung der Parabel $p(x)$ an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 auf.
- Berechnen Sie den Schnittpunkt der Parabel mit der x -Achse, der x_0 am nächsten liegt. (Überlegen Sie, welche Rolle die Vorzeichen von $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$ hierbei spielen.) Sie dürfen dabei annehmen, dass $f''(x_0) \neq 0$ und $f'(x_0)^2 > 2f(x_0)f''(x_0)$ gilt.
- Berechnen Sie den Punkt x_1 für die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 12$ mit $x_0 = 2$. Vergleichen Sie den Wert mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3 auf Blatt 12.

Bonusaufgabe: Bestimmen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit dieses Verfahrens.