

Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. M. Weiser

Übungsblatt 14 zur Vorlesung
ANALYSIS I
<http://www.zib.de/weiser/AnaI-2011/>
WS 2011/12

Abzugeben am 09.02.2012

1. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

- (a) Zeigen Sie $f(nx) = n \cdot f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Zeigen Sie $f(zx) = z \cdot f(x)$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.
- (c) Zeigen Sie $f(qx) = q \cdot f(x)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.
- (d) Nun sei f stetig. Zeigen sie $f(x) = x \cdot f(1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Es sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion mit $g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $g(1) = a$. Zeigen Sie $g(x) = a^x$.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 1.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = f$ und $f(0) = 1$.
Beweisen Sie $f = \exp$.

Hinweis: Betrachten Sie die Komposition von f mit dem natürlichen Logarithmus.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- (a) Ist f stetig?
- (b) Ist f differenzierbar?
- (c) Ist f stetig differenzierbar?