Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. M. Weiser

Übungsblatt 4 zur Vorlesung

Analysis I

http://www.zib.de/weiser/AnaI-2011/

WS 2011/12

Abzugeben am 17.11.2011

1. Aufgabe *Die Bernoullische Ungleichung* (2 Punkte)
Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung

$$(1+q)^n \geq 1 + nq$$

für alle $q \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe (3 Punkte)
Geben Sie eine beschränkte Teilmenge der rationalen Zahlen an, die kein Supremum besitzt. Weisen Sie nach, dass ihr Beispiel diese Eigenschaft erfüllt. (Sie dürfen dazu nur den Stoff aus der Vorlesung benutzen; insbesondere dürfen keine irrationalen Zahlen verwendet werden.)

3. Aufgabe *Hilberts Hotel* (1+2 Punkte)
Nach Abschluss Ihres Mathmatikstudiums werden Sie als Manager in Hilberts Hotel eingestellt. Das Hotel hat abzählbar unendlich viele Zimmer, die alle belegt sind.

(a) Ein neuer Gast trifft ein. Finden Sie eine Möglichkeit, die Gäste so umzuverteilen, dass alle Gäste unterkommen.

(b) Ein vollbesetzter Reisebus mit abzählbar unendlich vielen Plätzen kommt vor dem Hotel an. Können sie die Reisegruppe im Hotel unterbringen? Wenn ja, wie?

4. Aufgabe $\mathbb{N} + 2/3\mathbb{N}$ (3+1 Punkte)

(a) Konstruieren Sie die kleinste Erweiterung der natürlichen Zahlen, in der die Gleichung $3 \cdot n = 2$ eine Lösung besitzt.

Anleitung:

- Konstruieren Sie mithilfe einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine neue Menge M.
- Definieren Sie eine Verknüpfung $\oplus$ auf M.
- Geben Sie eine injektive Abbildung $i : \mathbb{N} \to M$ mit $i(n + m) = i(n) \oplus i(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ an.
- Finden Sie eine Lösung der Gleichung $n \oplus n \oplus n = i(2)$.

(b) Identifizieren Sie M mit einer Teilmenge von $\mathbb{Q}$ und markieren Sie die Punkte von M auf der Zahlengeraden.