Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Dr. M. Weiser

Übungsblatt 5 zur Vorlesung

Analysis I

http://www.zib.de/weiser/AnaI-2011/

WS 2011/12

Abzugeben am 24.11.2011

1. Aufgabe (2 Punkte)
Betrachten Sie die Folge q^n mit $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Für welche Werte von q konvergiert diese Folge? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe *Die Geometrische Reihe* (3 Punkte)
(a) Beweisen sie die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Q}$.
(b) Zeigen Sie, dass für $q \in \mathbb{Q}$ mit $|q| < 1$ die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$y_0 = 1, \qquad y_{k+1} = y_k + q^k,\ k \in \mathbb{N}$$

eine Cauchy-Folge ist.

3. Aufgabe (3 Punkte)
Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ auf Konvergenz oder Divergenz:

(i) $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$

(ii) $b_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$

Hinweis: Verwenden Sie die dritte binomische Formel.

4. Aufgabe *Minimalfolgen* (4 Punkte)
Sei $A \subset \mathbb{Q}$ eine nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie die Existenz einer *Minimalfolge* $(x_n)_{\mathbb{N}}$ in A, also $x : \mathbb{N} \to A$ mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ und eine untere Schranke s_ϵ von A, so dass $x_{n_\epsilon} - s_\epsilon \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_\epsilon$.