2 Vektorräume $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{K}^n$

2.1 Definition & Eigenschaften

Def 2.1.1. (Vektorräume $\mathbb{R}^n$)

Ein n-Tupel reeller Zahlen

$$\vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$$

heißt <u>n-dimensionaler reeller Vektor</u> (bzw: Vektor).

Die Einträge v_i heißen <u>Komponenten</u> (auch: Standardkoordinaten, Koordinaten).

Der Vektor $\vec{0} := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ heißt <u>Nullvektor</u>.

Addition: $\vec{v} + \vec{u}$:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{bmatrix}$$

komponentenweise Addition

Multiplikation mit Skalar $a \cdot \vec{v}$:

$$a \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a\, v_1 \\ \vdots \\ a \cdot v_n \end{bmatrix}$$

abkürzende Schreibweise

$(-1) \cdot \vec{v} =: -\vec{v}$

Die Menge der n-dim. reellen Vektoren zusammen mit der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren heißt <u>Vektorraum</u> $\mathbb{R}^n$.

<u>Beispiele</u>

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi + 1 \\ e \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bem 2.1.6. $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$ ist ebenfalls ein reeller Vektorraum

Bem 2.1.7 Vektoren mit Einträgen aus komplexen Zahlen bilden die Vektorräume $\mathbb{C}^n$ mit Skalaren $a \in \mathbb{C}$. Noch allgemeiner lassen sich Vektorräume über beliebigen Körpern $\mathbb{K}$ definieren.
Die mit Abstand wichtigsten Vektorräume sind $\mathbb{R}^n$ (und $\mathbb{C}^n$).

Satz 2.1.8 (Eigenschaften von $\mathbb{R}^n$)

Für die Vektorraumoperationen mit $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \qquad \text{(Assoziativität)}$$
$$\vec{v}+\vec{0} = \vec{v} \qquad \text{(neutrales Element)}$$
$$\vec{v}+(-\vec{v}) = \vec{0} \qquad \text{(additiv inverses Element)}$$
$$\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} \qquad \text{(Kommutativität)}$$

$$a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$$
$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v} \qquad \text{(Linearität)}$$
$$(a+b)\vec{v} = a\vec{v}+b\vec{v}$$
$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Bew: durch Nachrechnen (wird vererbt aus $\mathbb{R}$)

Bem: Gilt für eine Menge mit Addition und Multiplikation mit Skalaren die Aussage von 2.1.8, so heißt die Menge Vektorraum.

2.2 Basis & Dimension

Definition 2.2.1 (Linearkombination)

Ein Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ heißt Linearkombination von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ falls $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n =: \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i$$

a_i heißen Koeffizienten der Linearkombination.

Bsp $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ist eine Linearkombination von $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist eine Linearkombination von $\begin{bmatrix} \pi \\ e \end{bmatrix}$ (mit Koeffizient 0).

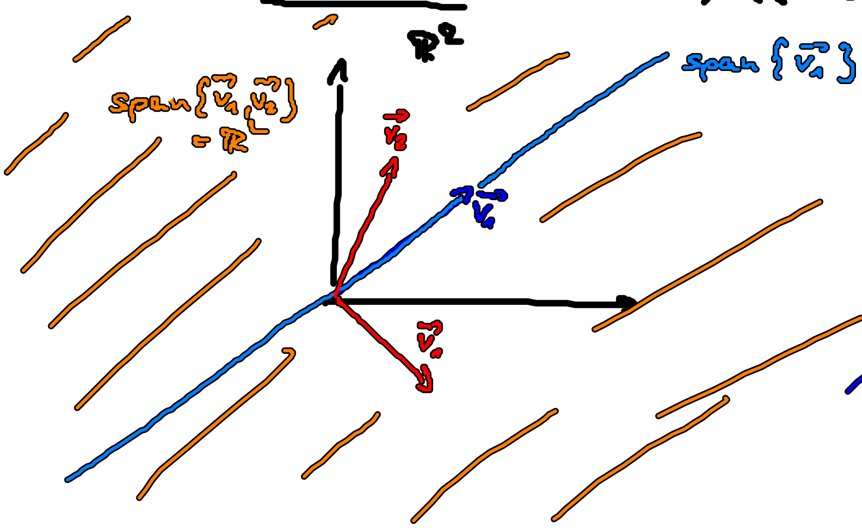
$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ist keine Linearkombination von $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

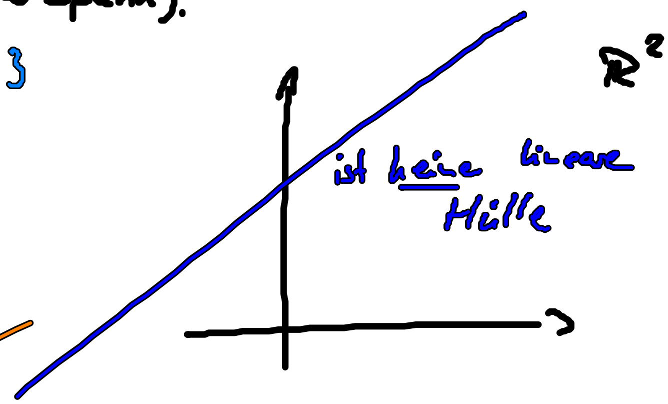
<u>Definition 2.2.7</u> (lineare Hülle)

Die Menge aller Linearkombinationen von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} := \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt <u>lineare Hülle</u> von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ (oder Span).





<u>Def 2.2.8</u> (Erzeugendensystem)

Eine Menge $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>Erzeugendensystem</u> des $\mathbb{R}^n$ falls $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = \mathbb{R}^n$.

<u>Bsp</u>: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

<u>Bsp 2.2.10</u> $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \end{bmatrix}$ spannen den $\mathbb{C}^2$ auf, denn

$$\begin{bmatrix} a+bi \\ c+di \end{bmatrix} = \left(\frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} i \right) \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{c-d}{2} + \frac{c+d}{2} i \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} i \right)(1-i) = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} i - \frac{a-b}{2} i - \frac{a+b}{2} \underbrace{i^2}_{=-1}$$

$$= \frac{a-\cancel{b}}{2} + \frac{a+\cancel{b}}{2} + \frac{\cancel{a}+b}{2} i - \frac{\cancel{a}-b}{2} i$$

$$= a + bi$$

Definition 2.2.12 (Lineare Abhängigkeit)

Die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear abhängig*, wenn es eine nichttriviale Linearkombination

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i$$

gibt (nichttrivial: mindestens ein $a_i \neq 0$).

Bem: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sind genau dann linear abhängig, wenn es ein $i \in \{1, \dots, k\}$ gibt mit

$$\vec{v}_i \in \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k\}$$

Definition 2.2.15 (Basis)

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^n$ heißt *Basis* (des $\mathbb{R}^n$).

Satz 2.2.16 (Standardbasis)

Die Vektoren $\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $\vec{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

Bew: Für $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i$, also bilden die $\vec{e}_i$ ein Erzeugendensystem

und $\vec{e}_i \notin \operatorname{span}\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_n\}$, also sind $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ linear unabhängig.

Satz 2.2.17 Alle Basen des $\mathbb{R}^n$ haben dieselbe Anzahl von Elementen: n.

Definition 2.2.18 (Dimension)

Die Dimension eines Vektorraums (z.B. des $\mathbb{R}^n$) ist die Anzahl der Elemente einer Basis.

2.3 Teilräume

Definition 2.3.1 (Teilraum)

Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Teilraum** (Unterraum) des $\mathbb{R}^n$, falls gilt:

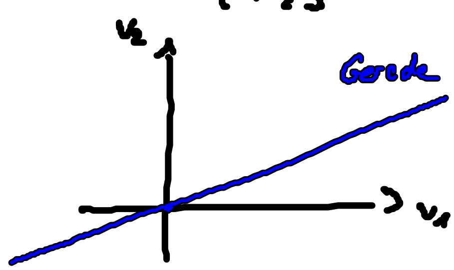
(i) T ist nicht leer (es muß mindestens $\vec{0}$ enthalten sein)

(ii) T ist abgeschlossen bzgl. der Addition:
$\vec{u}, \vec{v} \in T \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in T$

(iii) T ist abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit Skalaren:
$\vec{u} \in T,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\vec{u} \in T$

Bem 2.3.2: Jeder Teilraum enthält den Nullvektor:
Nach (i) existiert $\vec{u} \in T$. Nach (iii) gilt $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u} \in T$.

Beispiele 1) $T := \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 2v_2 \right\}$ ist ein Teilraum



(i) $\vec{0} \in T$

(ii) $\vec{v}, \vec{u} \in T$: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_2 + 2v_2 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,(u_2 + v_2) \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} \in T$

(iii) $a\vec{u} = \begin{bmatrix} a u_1 \\ a u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\, 2u_2 \\ a\, u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,(a u_2) \\ a u_2 \end{bmatrix} \in T$

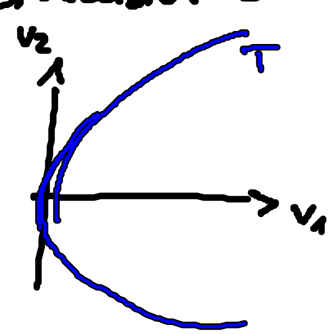
Basis: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ Dimension $T = 1$

2) $T := \{\vec{0}\}$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ mit Dimension 0

3) $T := \mathbb{R}^n$ ist Teilraum

4) $T := \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = v_2^2 \right\}$ ist kein Teilraum



5) $T := \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 42 \right\}$ ist kein Teilraum

Bemerkung 2.3.6 Alle Begriffe sind ganz analog für beliebige Vektorräume definiert.