

2 Vektorräume $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{K}^n$

2.1 Definition & Eigenschaften

Def 2.1.1. (Vektorräume \mathbb{R}^n)

Ein n -Tupel reeller Zahlen

$$\vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$$

heißt n -dimensionaler reeller Vektor (kurz: Vektor).

Die Einträge v_i heißen Komponenten (auch: Standardkoordinaten, Koordinaten).

Der Vektor $\vec{0} := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ heißt Nullvektor.

Addition: $\vec{v} + \vec{w}$:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}$$

komponentenweise Addition

Multiplikation mit Skalar $a \cdot \vec{v}$:

$$a \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a \cdot v_1 \\ \vdots \\ a \cdot v_n \end{bmatrix}$$

abkürzende Schreibweise

$$(-1) \cdot \vec{v} =: -\vec{v}$$

Die Menge der n -dim. reellen Vektoren zusammen mit der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren heißt Vektorraum \mathbb{R}^n .

Beispiele

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi+1 \\ e \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bem 2.1.6. $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$ ist ebenfalls ein reeller Vektorraum

Bem 2.1.7 Vektoren mit Einträge aus komplexen Zahlen bilden die Vektorräume \mathbb{C}^n mit Skalaren $a \in \mathbb{C}$.
Noch allgemeiner lassen sich Vektorräume über beliebigen Körpern \mathbb{K} definieren.
Die mit Abstand wichtigsten Vektorräume sind \mathbb{R}^n (und \mathbb{C}^n).

Satz 2.1.8 (Eigenschaften von \mathbb{R}^n)

Für die Vektorraumoperationen mit $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) && \text{(Assoziativität)} \\ \vec{v} + \vec{0} &= \vec{v} && \text{(neutrales Element)} \\ \vec{v} + (-\vec{v}) &= \vec{0} && \text{(additiv inverses Element)} \\ \vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u} && \text{(Kommutativität)}\end{aligned}$$

$$a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v} \quad \text{(Linearität)}$$

$$(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$$

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Bew: durch Nachrechnen (wird vererbt aus \mathbb{R})

Bem: Gilt für eine Menge mit Addition und Multiplikation mit Skalaren die Aussage von 2.1.8, so heißt die Menge Vektorraum.

2.2 Basis & Dimension

Definition 2.2.1 (Linearkombination)

Ein Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ heißt Linearkombination von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ falls $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n =: \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i$$

a_i heißen Koeffizienten der Linearkombination.

Bsp $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ist eine Linearkombination von $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist eine Linearkombination von $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (mit Koeffizient 0).

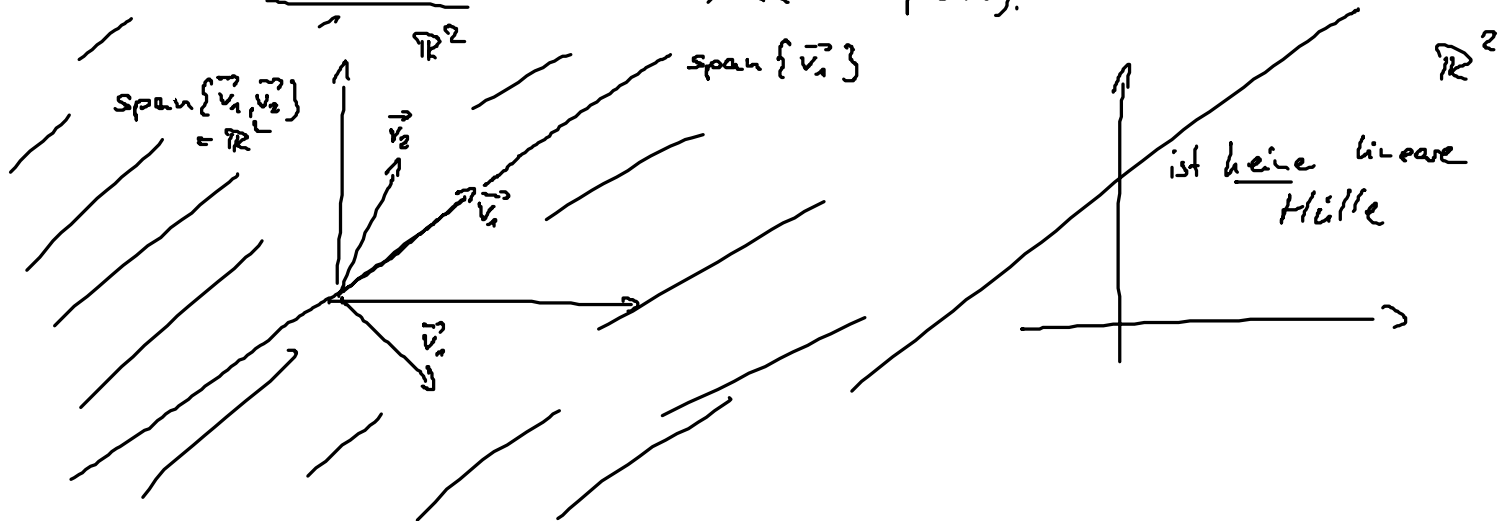
$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ist keine Linearkombination von $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Definition 2.2.7 (Lineare Hülle)

Die Menge aller Linearkombinationen von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$

$$\text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \} := \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \vec{v}_i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt lineare Hülle von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ (oder Spann).



Def 2.2.8 (Erzeugendensystem)

Eine Menge $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Erzeugendensystem des \mathbb{R}^n falls $\text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \} = \mathbb{R}^n$.

Bsp: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 .

Bsp 2.2.10 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \end{bmatrix}$ spannen den \mathbb{C}^2 auf, denn

$$\begin{bmatrix} a+bi \\ c+di \end{bmatrix} = \left(\frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}i \right) \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{c-d}{2} + \frac{c+d}{2}i \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}i \right) (1-i) = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}i - \frac{a-b}{2}i - \frac{a+b}{2} \cdot 2$$

$$= \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}i - \frac{a-b}{2}i$$

$$= a + bi$$

Definition 2.2.12 (Lineare Abhängigkeit)

Die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear abhängig, wenn es eine nichttriviale Linearkombination

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^k a_i \vec{v}_i$$

gibt (nichttrivial: mindestens ein $a_i \neq 0$).

Bem: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sind genau dann linear abhängig, wenn es ein $i \in \{1, \dots, k\}$ gibt mit

$$\vec{v}_i \in \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k\}$$

Definition 2.2.13 (Basis)

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem des \mathbb{R}^n heißt Basis (des \mathbb{R}^n).

Satz 2.2.14 (Standardbasis)

Die Vektoren $\vec{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ..., $\vec{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

bilden eine Basis des \mathbb{R}^n .

Bew: Für $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i, \text{ also bilden die } \vec{e}_i \text{ ein Erzeugendensystem}$$

und $\vec{e}_i \notin \text{span}\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_n\}$, also sind $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ linear unabhängig.

Satz 2.2.15 Alle Basen des \mathbb{R}^n haben dieselbe Anzahl von Elementen: n .

Definition 2.2.16 (Dimension)

Die Dimension eines Vektorraums (z.B. des \mathbb{R}^n) ist die Anzahl der Elemente einer Basis.

2.3 Teilräume

Definition 2.3.1 (Teilraum)

Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ heißt Teilraum (Unterraum) des \mathbb{R}^n , falls gilt:

(i) T ist nicht leer (es muß mindestens $\vec{0}$ enthalten sein)

(ii) T ist abgeschlossen bzgl. der Addition:

$$\vec{u}, \vec{v} \in T \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in T$$

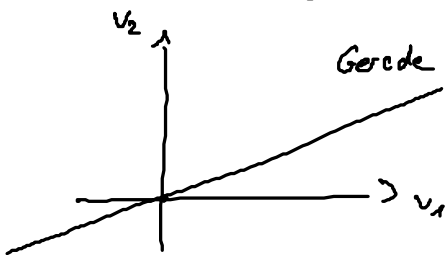
(iii) T ist abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit Skalaren:

$$\vec{u} \in T, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\vec{u} \in T$$

Lemma 2.3.2: Jeder Teilraum enthält den Nullvektor:

Nach (i) existiert $\vec{u} \in T$. Nach (iii) gilt $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u} \in T$.

Beispiele 1) $T := \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 2v_2 \right\}$ ist ein Teilraum



Basis: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

\Rightarrow Dimension $T = 1$

(i) $\vec{0} \in T$

(ii) $\vec{v}, \vec{u} \in T: \vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_2 + 2v_2 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2(u_2 + v_2) \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} \in T$$

(iii) $a\vec{u} = \begin{bmatrix} a u_1 \\ a u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 2u_2 \\ a u_2 \end{bmatrix}$

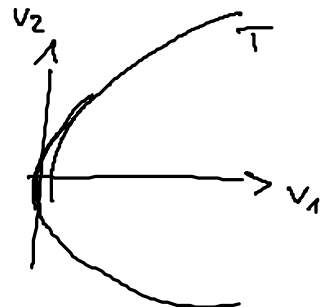
$$= \begin{bmatrix} 2(a u_2) \\ a u_2 \end{bmatrix} \in T$$

2) $T := \{ \vec{0} \}$ ist ein Teilraum des \mathbb{R}^n mit Dimension 0

3) $T := \mathbb{R}^n$ ist Teilraum

4) $T := \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = v_2^2 \right\}$ ist kein Teilraum

5) $T := \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 4v_2^2 \right\}$ ist kein Teilraum



Bemerkung 2.3.6 Alle Begriffe sind ganz analog
für beliebige Vektorräume definiert.