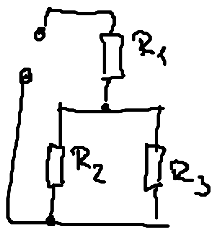
# 4 Gaußalgorithmus

## 4.1. Motivation

**Bsp**




$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 \qquad &= U \\ R_1 I_1 + \qquad R_3 I_3 &= U \end{aligned}$$

Lineares Gleichungssystem (LGS)

Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$

Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 \end{pmatrix}$

„rechte Seite" $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ U \end{pmatrix}$

LGS $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$

Lösungsformel für invertierbare $A$:

$$\underbrace{A^{-1} A}_{= I} \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

z.B. $R_1 = 1$
$R_2 = 2$
$R_3 = 3$
$U = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Trick: geschicktes Umformen des LGS

(i) $a = b \Leftrightarrow \alpha a = \alpha b$ für $\alpha \neq 0$ — Multiplikation mit Skalar

(ii) $\begin{aligned} a &= b \\ c &= d \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} c &= d \\ a &= b \end{aligned}$ — Vertauschen von Zeilen

(iii) $\begin{aligned} a &= b \\ c &= d \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= b \\ c + \alpha a &= d + \alpha b \end{aligned}$ für alle $\alpha$ — Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Übertragung auf LGS:

$$\left.\begin{array}{l} A_{i*}: \text{ i-te Zeile von } A \\ a := A_{1*}\vec{x}, \quad b := b_1 \\ c := A_{2,*}\vec{x}, \quad d: b_2 \\ \alpha := -1 \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Insgesamt:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(ii)}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow x_3 = \frac{2}{11}$$

$$\overset{\text{(i)}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/11 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 2/11 \\ 1-8/11 \\ 2/11 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \underbrace{\underline{I}\,\vec{x}}_{=\vec{x}} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>Achtung</u> LGS müssen keine Lösung haben!

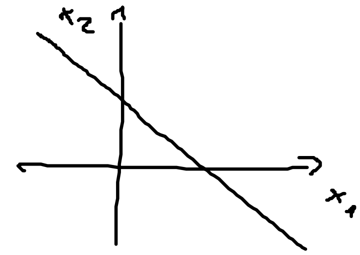
$$0 \cdot x = 1, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

oder können unendlich viele Lösungen haben,

$0 \cdot x = 0$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lösungsmenge $\mathbb{R}$, $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 1 \right\}$

$\Leftrightarrow x_2 = 1 - x_1$




## 4.2 Lineare Gleichungssysteme

**Def. 4.24** Die elementaren Zeilenoperationen in einer Matrix sind

(i) Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \neq 0 \in \mathbb{K}$

(ii) Vertauschen zweier Zeilen

(iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

**Satz 4.25** Elementare Zeilenoperationen in der erweiterten Koeffizienten-matrix $[A|\vec{b}]$ ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht.

## 4.3 Zeilenstufenform

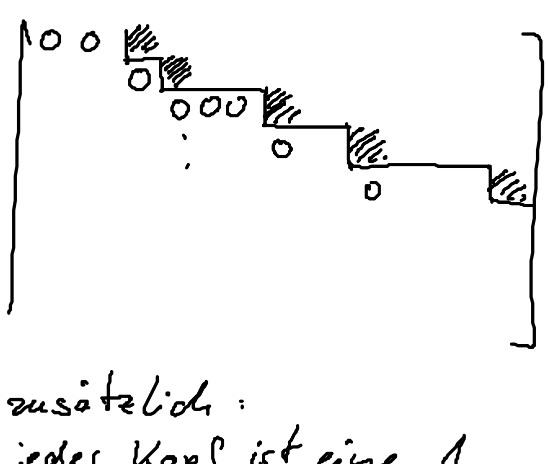
Ziel: systematische Umformung der erw. Koeff.-matrix $[A|\vec{b}]$ auf eine nützliche Normalform.

**Def 4.3.1** (Zeilenstufenform ZSF)

Der Kopf (Pivot) einer Zeile ist der erste (von links) Nicht-Null-Eintrag (sofern existent).

Eine Matrix ist in ZSF, falls gilt:

sind $a_{ij}$ und $a_{kl}$ zwei Köpfe mit $k > i$, so gilt $l > j$




$\rightarrow$ unter einem Kopf sind nur Nullen

$\rightarrow$ Nullzeilen einer ZSF-Matrix sind ganz unten

Gilt zusätzlich:

- jeder Kopf ist eine 1
- über jedem Kopf sind nur Nullen

so hat die Matrix normierte ZSF (NZSF)

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} 0\;0 & \boxed{1\;*} & \boxed{0} & *\;* & \boxed{0} & * & \ddots & & & 0 \\ & 0\;0 & \boxed{1} & \times\times & 0 & & & & & \vdots \\ & & & & \boxed{1} & \times & & & \times & 0 \\ & & & & & & & & & \boxed{1} \\ & 0 & & & & & & & & \end{array}\right|$$

**Def 4.3.2** Der Rang einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen (oder Spalten).

**Bem:** Weil die Spalten von $A$ ein Erzeugendensystem des Bildes sind, und eine maximal lin. unabh. Menge eine Basis bildet, ist $\mathrm{Rang}(A) = \dim \mathrm{Bild}(A)$.

**Satz 4.3.3** Elementare Zeilenoperationen ändern den Rang nicht. Liegt $A$ in ZSF vor, so ist $\mathrm{Rang}(A)$ die Anzahl der Köpfe. (= Anzahl der Nicht-Nullzeilen)

**Def 4.3.4** Ein LGS liegt in ZSF (NZSF) vor, wenn die erweiterte Koeff.-Matrix $[A|\vec{b}]$ in ZSF (NZSF) vorliegt.

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c} 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & b_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * \cdots & \vdots \\ & & & & & & & & 1 & * \cdots & b_r \\ & & & & & & & & & & b_{r+1} \\ & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & \vdots \end{array}\right] \leftarrow r = \mathrm{Rang}(A)$$

**Satz 4.3.5** Sei $\mathrm{Rang}(A) = r$ und liege $[A|\vec{b}]$ in NZSF vor. Dann gilt:

(i) Ist $b_{r+1} \neq 0$ (also $\mathrm{Rang}([A|\vec{b}]) > \mathrm{Rang}(A)$), so hat das LGS keine Lösung.

(ii) Ist $b_{r+1} = 0$, so existiert mindestens eine Lösung

(a) Ist $r = n$ (alle Spalten sind Kopfspalten), so existiert genau eine Lösung $\vec{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix}$

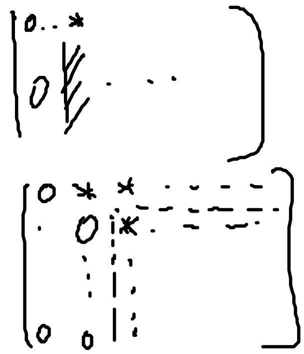
(b) Ist $r < n$, so existieren unendlich viele Lösungen

## 4.4 Gaußalgorithmus

Überführung von $[A|\vec{b}]$ in NZSF

## Alg. 4.4.1 (ZSF)

Input: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $A \neq 0$



1. „linkeste" Kopfzeile nach oben tauschen
2. „radieren" unter dem Kopf:
   Addition eines geeigneten Vielfachen der ersten Zeile zu tieferen Zeilen, so daß die erste Spalte nur den Kopf enthält
3. Rekursion: wende Alg. 4.4.1 auf die Restmatrix $(a_{ij})_{\substack{i=2,\dots,m \\ j=2,\dots,n}}$ an.

## Alg. 4.4.3 (NZSF)

Input: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ in ZSF

1. Normieren der Köpfe: dividiere jede Kopfzeile durch den Kopf
2. „radieren" über den Köpfen: addiere ein geeignetes Vielfaches der Kopfzeilen zu darüberliegenden Zeilen, so daß über den Köpfen nur Nullen stehen.

# 4.5 Lösung mit NZSF

## Alg 4.5.1 (Allgemeine Lösung)

Input $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$

Ausgabe: Lösungsmenge $L = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{x} = b\}$

1. bringe $[A|\vec{b}]$ auf NZSF $[\tilde{A}|\tilde{\vec{b}}]$
2. Sei $J := \{j_1, \dots, j_r\}$ die Menge der Kopfspaltenindices

   Dann gilt $L = \{\}$ falls $b_{r+1} \neq 0$ und sonst

$$L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_{j_k} = \tilde{b}_k - \sum_{j \notin J} \tilde{a}_{kj} x_j,\ x_j \text{ für } j \notin J \text{ beliebig}\}$$

## Alg 4.5.2 (Basis des Kerns)

Input: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

Ausgabe: $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-r}\}$ Basis des Kerns

Kern: Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$

1. bringe $[A|\vec{b}]$ auf NZSF $[\tilde{A}|\tilde{\vec{b}}]$

2. Sei $\hat{J} := \{j_{r+1}, \dots, j_n\}$ die Menge der Nichtkopfspaltenindices

Dann ist $(\vec{x}_i)_{j_k} := \begin{cases} -\tilde{a}_k \, x_{j_i} & , k = 1, \dots, r \\ 1 & , k = r+i \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

## Alg 4.5.3 (Basis des Bildes)

Input: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

Ausgabe: Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ des Bildes

1. Bringe $A$ auf ZSF $\tilde{A}$
2. Sei $J$ die Menge der Kopfspaltenindices

Dann ist $\vec{b}_i := A_{*j_i}$ , $i = 1, \dots, r$ (Die Kopfspalten von $A$ bilden eine Basis des Bildes)

## Alg. 4.3.5 (Inverse)

Input: $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

Ausgabe: $A^{-1}$ (sofern existent)

1. Bringe $[A | I_n]$ auf NZSF $[\tilde{A} | B]$
2. Ist $\tilde{A} = I_n$, so ist $B = A^{-1}$ andernfalls ist $A$ nicht invertierbar.