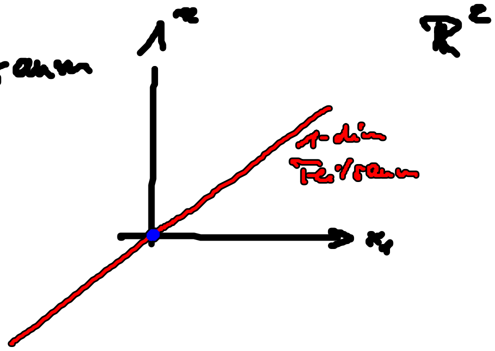
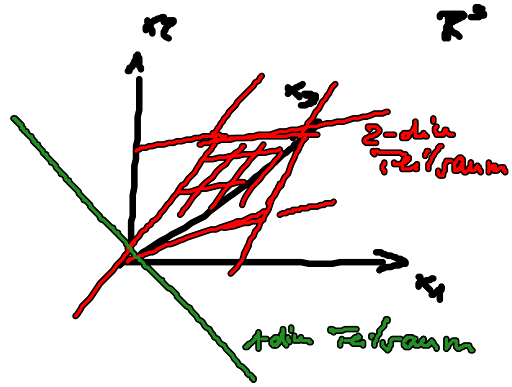
Teilraum





6 Lineare Abbildungen

6.1 Einführung

Def 6.1.1. Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann heißt

$L: V \to W$ linear, wenn gilt

Addition in W

$$L(\vec{v}+\vec{u}) = L(\vec{v}) + L(\vec{u}) \qquad \text{für alle } \vec{v}, \vec{u} \in V$$
$$L(\alpha\vec{v}) = \alpha L(\vec{v}) \qquad \alpha \in \mathbb{K}$$

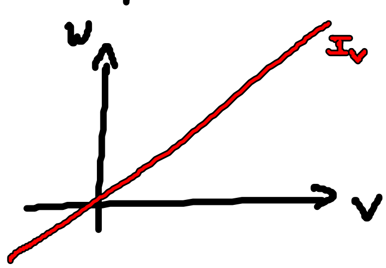
Addition in V

Die Menge der lin. Abb. $V \to W$ heißt $\underline{\mathrm{Hom}(V,W)}$ (Homomorphismen). Ist $W = V$, so heißt die Abbildung

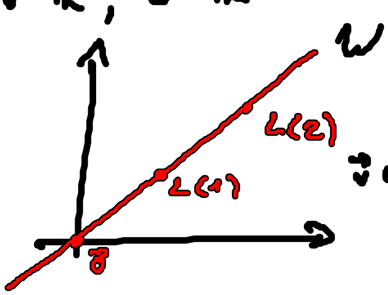
$$I_V : V \to V, \quad \vec{v} \mapsto \vec{v}$$

die Identität.

Bsp: $V = \mathbb{R}^1$, $W = \mathbb{R}^1$

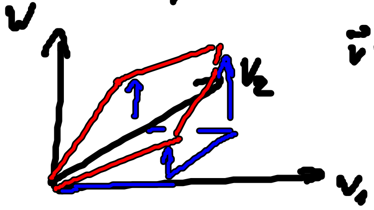


Bsp $V = \mathbb{R}^1$, $U = \mathbb{R}^2$



$$\vec{v} \mapsto \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$$

Bsp $V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}^1$



$\vec{v} \mapsto v_1+v_2$

Bsp $V=\mathbb{R}^{n,n}$, $W=\mathbb{R}$

$A \mapsto tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ Summe der Diagonalelemente (Spur, trace)

Bsp $V=\mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $W=\mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$

$p \mapsto p'$ Ableitung

Bsp $V=C([a,b])$, $W=V$

$f \mapsto g$ mit $g(x)=\int_{y=a}^{x} f(y)\,dy$

6.2 Vektorraum der linearen Abbildungen

Def 6.2.1 Seien V, U, Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $L, M \in Hom(V,U)$ sowie $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann seien durch

$$(L+M)(\vec{v}) := L(\vec{v}) + M(\vec{v})$$
$$(\alpha L)(\vec{v}) := \alpha L(\vec{v})$$

Vektorraum-Operationen „+" und „·" auf $Hom(V,W)$ definiert. Damit wird $\{Hom(V,W), \mathbb{K}, „+", „\cdot"\}$ zu einem Vektorraum.

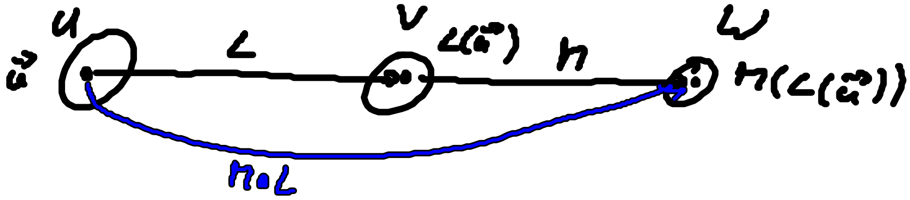
Bsp
$$\left.\begin{array}{l} L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}v_1\\v_1+v_2\end{bmatrix} \\ M:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}v_2\\v_1\end{bmatrix}\end{array}\right\} \quad L+M: \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}v_1+v_2\\2v_1+v_2\end{bmatrix}$$

6.3. Komposition linearer Abbildungen

Def 6.3.1 Sind U, V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $L \in Hom(U,V)$, $M \in Hom(V,W)$. Dann ist die <u>Komposition</u> (Hintereinanderausführung, Produkt) definiert durch

$$„\circ“ : \mathrm{Hom}(U,V) \times \mathrm{Hom}(V,U) \to \mathrm{Hom}(U,W)$$

$$(M \circ L)(\vec{u}) := M(L(\vec{u}))$$



Bem $M \circ L$ ist tatsächlich linear, denn

$$\begin{aligned}(M \circ L)(\vec{u}+\vec{v}) &= M(L(\vec{u}+\vec{v})) = M(L(\vec{u}) + L(\vec{v}))\\ &= M(L(\vec{u})) + M(L(\vec{v}))\\ &= (M \circ L)(\vec{u}) + (M \circ L)(\vec{v})\end{aligned}$$

analog für α

Def 6.3.2 Seien V, U Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $L \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Dann heißt L invertierbar, falls $L^{-1} \in \mathrm{Hom}(W,V)$ existiert, so daß $L^{-1} \circ L = I_V$, $L \circ L^{-1} = I_W$.

L^{-1} heißt dann Inverse (Umkehrabbildung) von L.

Def 6.3.4. Sei $L \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$L^0 := I_V, \quad L^{n+1} := L \circ L^n$$

und

$$L^{-n} := (L^n)^{-1} = (L^{-1})^n$$

Bsp $L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1+v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow L^{-1}\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2-v_1 \end{bmatrix}$

$$L^2\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 \\ 2v_1+v_2 \end{bmatrix}$$

Def 6.3.7 Gilt $L^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so heißt L nilpotent.

Bsp $L(p) := p'$ auf $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ ist nilpotent der Ordnung $n+1$.

6.4 Kern und Bild

Def 6.4.1 Sei $L \in Hom(V,W)$. Dann heißt
$Kern(L) := \{\vec{v} \in V \mid L(\vec{v}) = 0\}$
der <u>Kern</u> (Nullraum) von L, sowie
$Bild(L) := \{L(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\} = \{\vec{w} \in W \mid \exists \vec{v} \in V : L(\vec{v}) = \vec{w}\}$
das <u>Bild</u> von L.

Bsp $L(p) = p'$ auf $\mathbb{R}^{[x]}_{\le n}$. $\quad Kern(L) = \mathbb{R}^{[x]}_{\le 0}$ dim $= 1$

dim $n+1$ $\quad Bild(L) = \mathbb{R}^{[x]}_{\le n-1}$ dim $= n$

Satz 6.4.4. Sei $L \in Hom(V,W)$. Dann ist $Kern(L)$ Teilraum von V und $Bild(L)$ Teilraum von W.

Bew: (i) $L(\vec{0}) = \vec{0}$ also ist $Kern(L)$ nicht leer

(ii) $L(\vec{v}+\vec{u}) = \underbrace{L(\vec{v})}_{=\vec{0}} + \underbrace{L(\vec{u})}_{=\vec{0}} = \vec{0}$ $\quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in Kern(L)$

(iii) $L(\alpha\vec{v}) = \alpha \underbrace{L(\vec{v})}_{=\vec{0}} = \vec{0}$ $\quad \forall \vec{v} \in Kern(L), \alpha \in \mathbb{K}$

(i) $L(\vec{0}) = \vec{0} \in Bild(L)$

(ii) $\underbrace{L(\vec{v})}_{\in Bild} + \underbrace{L(\vec{u})}_{\in Bild} = L(\underbrace{\vec{v}+\vec{u}}_{\in V})$ $\quad Bild(L)$ abgeschlossen

(iii) $\alpha \underbrace{L(\vec{v})}_{\in Bild} = L(\underbrace{\alpha\vec{v}}_{\in V})$ $\quad Bild(L)$ abgeschlossen

$\square$

Satz 6.4.5 (Dimensionssatz)

Sei $L \in Hom(V,W)$ und V endlichdimensional.
Dann gilt $\dim(V) = \dim(Kern(L)) + \dim(Bild(L))$

Def 6.4.6 Sei $L \in Hom(V,W)$ und $\vec{b} \in W$.
Die Menge $\{\vec{x} \in V \mid L(\vec{x}) = \vec{b}\}$ heißt
<u>Lösungsmenge</u> der linearen Gleichung $L(\vec{x}) = \vec{b}$.
Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so heißt die Gleichung <u>homogen</u>, sonst
<u>inhomogen</u>.

Bem Die Lösungsmenge eines homogenen GLS ist der Kern der Abbildung.

Satz 6.4.7 Sei $L(\vec{x}) = \vec{b}$ eine lin. Gleichung und $\vec{x}_p$ eine Lösung.
Dann ist die Lösungsmenge

$$\vec{x}_p + \mathrm{Kern}(L) := \{\vec{x}_p + \vec{x}_h \mid \vec{x}_h \in \mathrm{Kern}(L)\}$$

Bsp $\underbrace{p'}_{L(p)} = \underbrace{2x+1}_{\vec{b}}$ Lösungsmenge $x^2+x+\mathrm{Kern}(L)$

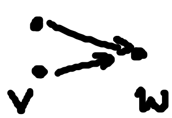
$$= x^2+x+\mathbb{R}[x]_{\le 0}$$

$$= \{x^2+x+c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

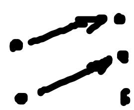
Bem Für Matrixabbildungen lassen sich Kern und Bild besonders einfach berechnen:
Kern (A) ist die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$
Bild (A) ist die lin. Hülle der Spaltenvektoren
(siehe NZSF in Kap 4).

Def 6.4.10 $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt

<u>injektiv</u>, falls jeder Bildvektor nur ein Urbild hat
<u>surjektiv</u>, falls jeder Vektor in W Bildvektor ist
<u>bijektiv</u>, falls L injektiv & surjektiv ist



nicht injektiv



nicht surjektiv

Satz 6.4.11 Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt

L injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(L) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Kern}(L)) = 0$

Ist V endlichdimensional, so gilt

L surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(L) = W \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Bild}(L)) = \dim(W)$.