7 Koordinaten & darstellende Matrizen

$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ Matrix-Vektor-Multiplikation ist linear

$\Rightarrow$ · einfach darzustellen
· einfach auszurechnen

$\vec{x} \mapsto L(\vec{x})$ ist linear

$\Rightarrow$?

7.1 Koordinatenvektoren

V sei endlichdim. Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$.

Dann ist $K_\mathcal{B} : V \to \mathbb{K}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i \longmapsto (\alpha_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^n$.
die Koordinatenabbildung.

$K_\mathcal{B}$ ist bijektiv und linear, also invertierbar: V und $\mathbb{K}^n$ sind isomorph.

Aber: Berechnung von $K_\mathcal{B}(v)$?

Im allgemeinen existiert eine Standardbasis und
V ist als lin. Hülle der Standardbasis gegeben: $V = \mathrm{span}\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

Herangehensweise:

1) Formulierung eines Gleichungssystems für die Koeffizienten α_i
2) Lösen das LGS (Gauß)

Mit Hilfe der Standardbasis gilt für die Basisvektoren $\vec{b}_j$:

$$\vec{b}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \vec{e}_i \quad \text{und} \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$$

Darstellung von $\vec{v}$ in $\mathcal{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \vec{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \alpha_j \right) \vec{e}_i$$

Darstellung bzgl. einer Basis ist eindeutig

$$\Rightarrow \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \alpha_j \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}}_{A\in K^{n,n}} \; \underbrace{(\alpha_j)_{j=1,\dots,n}}_{\vec{\alpha}} = \underbrace{(v_i)_{i=1,\dots,n}}_{\vec{w}}$$

$\vec{w}$ Koeffizienten von $\vec{v}$ zur Basis E

Spalten von A sind Koeffizienten von $\vec{b}_i$ zur Standardbasis

$$A\vec{\alpha} = \vec{w}$$

Bsp $V = \mathbb{R}^{2,2}$, $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{\alpha} = ?$$

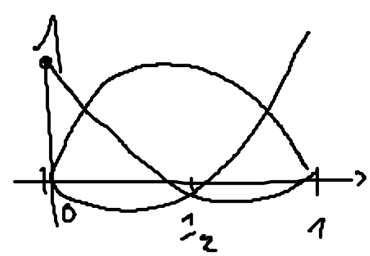
$A\vec{\alpha} = \vec{w}$ lösen: $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Bsp $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $B = \{2x^2 - 3x + 1, -4x^2 + 4x, 2x^2 - x\}$

$E = \{x^2, x, 1\}$

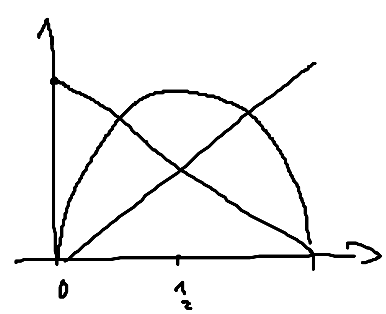
$\vec{v} = x^2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



alternativ: $B = \{1 - x, -4x^2 + 4x, x\}$

$$\vec{v} = x^2 \quad \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



<u>Beobachtung:</u> Bezüglich verschiedener Basen hat ein Vektor ganz unterschiedliche Koordinatenvektoren!

<u>7.2 Transformation bei Basiswechsel</u>

Basen B, C

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "K_B"'] \arrow[dr, "K_C"] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[rr, "S_{B\to C}"'] & & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

kommutatives Diagramm

$$K_C = S_{B\to C} \circ K_B$$

$$S_{B\to C} = K_C \circ K_B^{-1}$$

$\in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$

Umrechnung der Koordinatenvektoren

$$\vec{v}_C = K_C(\vec{v}) = S_{B\to C}\, \vec{v}_B \quad \text{mit } S_{B\to C} \in \mathbb{K}^{n,n}$$

$$\left(S_{B\to C}\right)_{*,j} = S_{B\to C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Eintrag}$$

Koeffizientenvektor von $\vec{b}_j$ bezüglich C

Koeffizientenvektor von $\vec{b}_j$ bzgl. B

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Die Spalten von } S_{B\to C} \text{ sind die Koeffizientenvektoren der Basisvektoren } \vec{b}_j \text{ bezüglich der Basis } C.}$

Interpretation: $K_B^{-1} = S_{B\to E}$

$$K_B = S_{E\to B}$$

Berechnung von Basiswechseln

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}^n & \\
 & V \arrow[u, "K_E \text{ natürliche Identifizierung}"] \arrow[dl, "K_B"'] \arrow[dr, "K_C"] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[uur, bend left, "S_{B\to E}"] \arrow[rr, "S_{B\to C}"'] & & \mathbb{K}^n \arrow[uul, bend right, "S_{C\to E}"']
\end{tikzcd}
$$

<u>Bsp</u> $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$\mathcal{B} = \{2x^2 - 3x + 1,\ -4x^2 + 4x,\ 2x^2 - x\}$$

$$C = \{1 - x,\ -4x^2 + 4x,\ x\}$$

$$S_{B\to E} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_{C\to E} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_{B\to C} = S_{C\to E}^{-1} \circ S_{B\to E}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 0 \\ -1/2 & \boxed{1} & -1/2 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix}$$

zweite Basisfunktion stimmt in $\mathcal{B}$ und C überein

7.3 Darstellung lin. Abbildungen

<u>Def</u> 7.3.1 Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, V)$ und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Dann heißt

$$L_{\mathcal{B}} := K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n}$$

die <u>darstellende Matrix</u> von L bezüglich $\mathcal{B}$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
$$

$$(L_{\mathcal{B}})_{*,j} = L_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{te Komponente}$$

$L_{\mathcal{B}}$

$$= K_{\mathcal{B}}\left(L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)\right)$$

$$= K_{\mathcal{B}}(\underbrace{L(\vec{b}_j)}_{=:\vec{l}_j})$$

$$= (\vec{l}_j)_{\mathcal{B}}$$

$\rightarrow$ Spalten der Darstellungsmatrix $L_{\mathcal{B}}$ sind die Koeffizientenvektoren der Bilder der Basisvektoren!

<u>Berechnung</u>

1) Berechne $\vec{l}_j = L(\vec{b}_j)$ für $j = 1, \dots, n$
2) Berechne $(\vec{l}_j)_{\mathcal{B}} = K_{\mathcal{B}}(\vec{l}_j)$
3) $L_{\mathcal{B}} = \left[(\vec{l}_1)_{\mathcal{B}} \ \dots \ (\vec{l}_n)_{\mathcal{B}} \right]$

<u>Bsp</u>: $V = \mathbb{R}^{[x]}_{\leq 3}$, $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$

$L(p) = p'$ Ableitung

$L(x^3) = 3x^2$
$L(x^2) = 2x$
$L(x) = 1$
$L(1) = 0$

$\Rightarrow (\vec{l}_1)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\vec{l}_2)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(\vec{l}_3)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\vec{l}_4) = \vec{0}$

Also $L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Satz</u>: Es gilt $(L^{-1})_{\mathcal{B}} = (L_{\mathcal{B}})^{-1}$

und $(L_2 \circ L_1)_{\mathcal{B}} = (L_2)_{\mathcal{B}} (L_1)_{\mathcal{B}}$

7.4 Transformation von Darstellungsmatrizen bei Basiswechsel

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "L"] \arrow[ddl, "K_C"'] \arrow[d, "K_B"] & V \arrow[d, "K_B"'] \arrow[ddr, "K_C"] & \\
 & \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_B"] \arrow[dl, "S_{B\to C}"] & \mathbb{K}^n \arrow[dr, "S_{B\to C}"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "L_C"'] & & & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

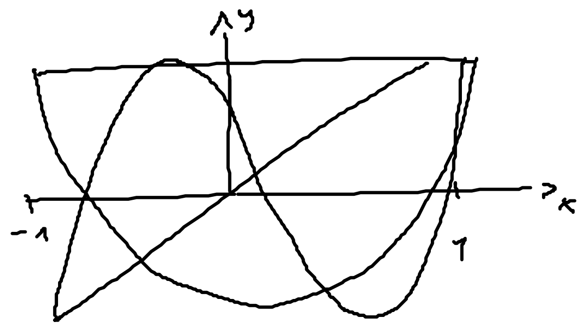
In welchen Verhältnis stehen L_B und L_C?

Offenbar gilt: $L_C = S_{B\to C} \, L_B \, S_{B\to C}^{-1}$

<u>Bsp</u>: $V = \mathbb{R}[x]_{\le 3}$, $L(p) = p'$, $C = \{1, x, 2x^2-1, 4x^3-3x\}$

Čebyčev-Polynome

$$S_{C\to B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = S_{B\to C}^{-1}$$



$$\Rightarrow \quad L_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$