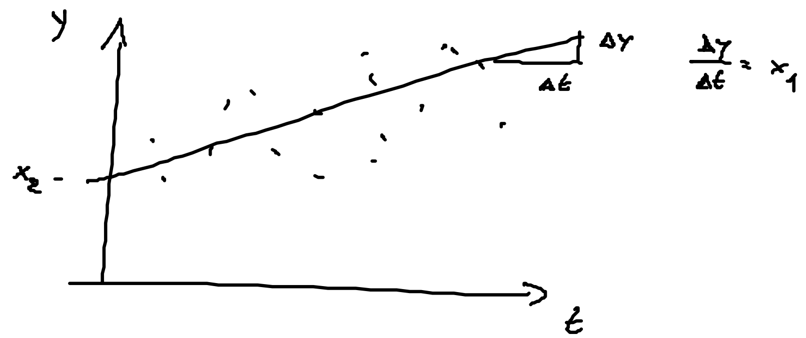
9.2 QR-Zerlegung

Bsp 9.2.4 Lineares Ausgleichsproblem

Meßwerte y_i zu Zeitpunkten t_i, $i = 1, \dots, m$

Modell $y(t) = x_1 t + x_2$ mit Modellparametern x_1, x_2



Welche Parameter x_1, x_2 führen zur „besten" Wiedergabe der Meßwerte durch das Modell?

Abweichungen: $f_i = t_i x_1 + x_2 - y_i$

in Matrixschreibweise $\vec{f} = A\vec{x} - \vec{y}$

mit $A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

Fehlermaß: $\|A\vec{x} - \vec{y}\|_2^2$ Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Falls $A = QR$ mit orthogonaler Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ und oberer Dreiecks-matrix $R \in \mathbb{R}^{m,n}$ $(m \geq n)$, dann gilt

$$\|A\vec{x} - \vec{y}\|_2^2 = \|QR\vec{x} - \vec{y}\|_2^2 = \|\underbrace{Q^T Q}_{I} R\vec{x} - Q^T\vec{y}\|_2^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \vec{x} - \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

$$= \|r\vec{x} - \vec{b}_1\|_2^2 + \|\vec{b}_2\|_2^2$$

Offenbar hängt $\|\vec{b}_2\|_2^2$ nicht von $\vec{x}$ ab. Das Minimum wird daher angenommen für $r\vec{x} = \vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{x} = r^{-1}\vec{b}_1$ falls r invertierbar.

Def 9.2.1. Eine Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ in $A = QR$ mit $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ orthogonal und $R \in \mathbb{R}^{m,n}$ obere Dreiecksmatrix heißt QR-Zerlegung.

Satz 9.2.2 Jede Matrix kann QR-zerlegt werden.

QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt

einfachste Fall: $m = n$, A invertierbar

Dann bilden die Spaltenvektoren $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ von A eine Basis, die in eine ONB $\{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n\}$ transformiert werden kann.

Dann gilt $\operatorname{span}\{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_i\} = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i\}$ für $i = 1, \dots, n$

und somit $\vec{a}_i = \sum_{k=1}^{i} r_{ki} \vec{q}_k$ für Koeffizienten r_{ki}

Also gilt $A = QR$ mit $Q = \{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n\}$, $R = (r_{ki})_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,i}}$

Algorithmus

(i) orthogonalisiere Spaltenvektoren $\vec{a}_i$ von A zu ONB $\vec{q}_k$, $\quad Q := [\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n]$

(ii) stellen $\vec{a}_i$ als Linearkombinationen von $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$ dar:

$r_{ki} = \langle \vec{q}_k, \vec{a}_i \rangle$, $\quad R = (r_{ki})$

oder in Matrixschreibweise: $A = QR \Rightarrow Q^T A = Q^T Q R = R$

Bsp 9.2.3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(i) Gram-Schmidt

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|_2} = \frac{\vec{a}_1}{5} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{l}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \left(\frac{3}{5} + 0 + \frac{28}{5}\right) \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -68 \\ 0 \\ 51 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{l}_2\|_2 = \frac{17}{5} \Rightarrow \vec{q}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

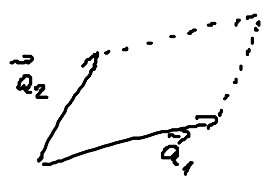
$$\vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow Q = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) R bestimmen

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 31/5 & 0 \\ 0 & 17/5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10 Determinante

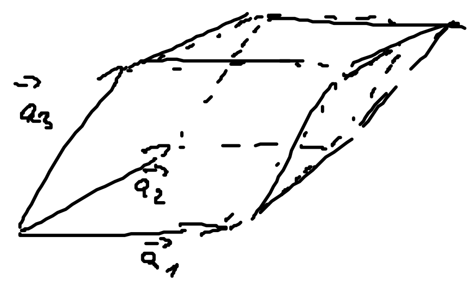
$\mathbb{R}^2$



Flächeninhalt des Parallelogramms?

Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ linear abhängig, so entartet das Parallelogramm zur Linie (oder Punkt) mit Flächeninhalt 0.

$\mathbb{R}^3$



Volumen des Spats? (Parallelepiped)

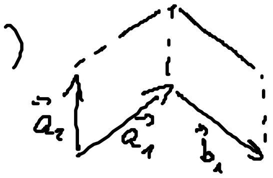
Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ lin. abhängig, so entartet der Spat zu Fläche / Linie / Punkt mit Volumen 0.

allgemein: Volumen des von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelepipeds: $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

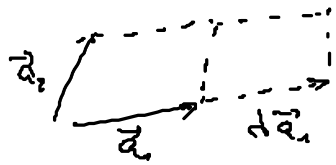
$$\det: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R} \qquad \text{(Determinante)}$$

Eigenschaften

(1)



$$\det(\vec{a}_1+\vec{b}_1, \vec{a}_2) = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \det(\vec{b}_1, \vec{a}_2)$$



$$\det(\lambda\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \lambda \det(\vec{a}_1, a_2)$$

$\longrightarrow$ det ist linear im ersten Argument
det ist linear im zweiten Argument

„Umklappen" der Fläche: $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = -\det(\vec{a}_2, \vec{a}_1)$

(2) $$0 = \det(\vec{a}_1+\vec{a}_2, \vec{a}_1+\vec{a}_2)$$
$$= \det(\vec{a}_1, \vec{a}_1+\vec{a}_2) + \det(\vec{a}_2, \vec{a}_1+\vec{a}_2)$$
$$= \underbrace{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_1)}_{=0} + \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \det(\vec{a}_2, \vec{a}_1) + \underbrace{\det(\vec{a}_2, \vec{a}_2)}_{=0}$$
$$\Rightarrow \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = -\det(\vec{a}_2, \vec{a}_1)$$

$\mathbb{R}^n$: Vertauschen zweier Vektoren ändert das Vorzeichen

(3) Volumen des Einheitsparallelepipeds ist 1

$$\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$$

(4) $$\det(\vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_2, \vec{a}_2) = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \lambda \underbrace{\det(\vec{a}_2, \vec{a}_2)}_{=0}$$
$$= \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

Addition eines Vielfachen eines Vektors zu einem anderen ändert die Determinante nicht

(5) $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0 \iff \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig

Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ ist $\det A := \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

<u>Def</u> 10.2.1 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Für $n=1$ ist $\det A = A \in \mathbb{R}$

Für $n>1$ ist $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{1+i} \det S_{i1}(A)$

Notation $|A| := \det A$

Bsp $$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} a_{12}$$

A vollbesetzt, Rechenaufwand für $\det(A)$: $R(n)$
$\in \mathbb{R}^{n,n}$

$$R(1) = 1$$

$$R(n) = n \cdot R(n-1) = n!$$

<u>Berechnung der Determinanten</u>

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ obere Dreiecksmatrix. Dann gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} \det S_{i1}(A)$$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

<u>Algorithmus</u>

(i) bringe A auf ZSF (mit Gauß), t sei die Anzahl der Zeilenvertauschungen

(ii) $\det A = (-1)^t \, r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$

Aufwand: n^3

<u>Satz</u> 10.2.8 Seien $A, B, \in \mathbb{R}^{n,n}$ (oder $\in \mathbb{K}^{n,n}$)

Dann gilt

(i) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

(ii) ist A invertierbar, so gilt $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

denn $1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1})$

(iii) ist A invertierbar, so gilt $\det B = \det(ABA^{-1})$

denn $\det(ABA^{-1}) = \det(A) \cdot \det B \cdot \det(A^{-1})$

(iv) $\det Q$ für orthogonale Matrizen

$$1 = \det I = \det(Q^T Q) = \det(Q^T) \det Q$$

$$= \det Q \det Q$$

$$= (\det(Q))^2$$

Alternative zu Gauß: Gram-Schmidt

$$A = QR: \quad \det A = \det Q \cdot \det R$$
$$= \pm 1 \cdot r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$$