11 Eigenwerte

Def 11.1.1. Sei V komplexer VR, $A \in \mathrm{Hom}(V,V)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. λ heißt <u>Eigenwert</u> von A, falls $0 \neq \vec{v} \in V$ existiert, so daß

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Dann heißt $\vec{v}$ <u>Eigenvektor</u> (zum EW λ).

Achtung: nur komplexe VR! Jeder reelle VR kann in einen komplexen eingebettet werden.

Bem: (i) Ist $\vec{v}$ EV zum EW λ, so auch $\alpha\vec{v}$ für $\alpha \neq 0$

(ii) Jeder nichttriviale Kernvektor ist EV zum EW 0

Bsp (i) $A = \lambda \in \mathbb{C}^{1,1} \Rightarrow \lambda$ ist EW, denn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ f.a. $\vec{v} \in \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda = 1$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda = -1$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda = 1$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda = -1$

(iv) $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \Rightarrow e_i$ ist EV zum EW λ_i

(v) $A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 15 & -9 \\ -1 & 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda = 2$

$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda = 3$

(vi) $V = \mathbb{C}^{[x]}_{\leq n}$, $A\vec{p} = \vec{p}\,'$ (Ableitung)

$\Rightarrow \vec{1}$ ist EV zum EW 0

$V = C([a,b])$, $Af = f'$

$\Rightarrow f(x) = e^{\lambda x}$ ist EV (Eigenfunktion) zum EW λ

<u>Def</u> 11.1.15 Sei V komplexer VR, $A \in Hom(V,V)$ und λ EW von A.

Der Teilraum $V_\lambda := \{ \vec{v} \in V \mid A\vec{v} = \lambda \vec{v} \}$ heißt <u>Eigenraum</u> von A zum EW λ. Die Dimension von V_λ heißt die <u>geometrische Vielfachheit</u> von λ.

<u>Bem</u>: Die geom. Vielfachheit ist die max. Anzahl lin. unabh. EV zum EW.

<u>Bsp</u>: $\text{Kern}(A) = V_0$, $\dim V_0 = \dim V - \text{Rang}\, A$

<u>Interpretation</u>: $A|_{V_\lambda} = \lambda I$ Berechnung von $A\vec{v}$ besonders einfach auf Eigenräumen

<u>Unitäre Abbildungen</u> ($\langle U\vec{v}, U\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$)

Sei U unitär und $\lambda \in \mathbb{C}$ EW mit EV $\vec{v}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\langle U\vec{v}, U\vec{v} \rangle = \langle \lambda\vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle &= \lambda \langle \vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle \\
&= \lambda \overline{\langle \lambda\vec{v}, \vec{v} \rangle} \\
&= \lambda \overline{\lambda} \, \overline{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \\
&= |\lambda|^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\
&= |\lambda|^2 \langle U\vec{v}, U\vec{v} \rangle
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1$

Die Eigenwerte unitärer Abbildungen (und orthogonaler) liegen auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$.

<u>Selbstadjungierte Abbildungen</u> ($\langle A\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, A\vec{w} \rangle$)

Sei A selbstadjungiert und $\lambda \in \mathbb{C}$ EW mit EV $\vec{v}$. Dann gilt

$$\lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, A\vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

Die EW selbstadjungierter (und reell symmetrischer) Matrizen/Abbildungen sind reell.

<u>Satz</u> 11.1.20 Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ EV zu verschiedenen EW λ_1, λ_2.

Dann sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lin. unabhängig. Ist A selbstadjungiert oder unitär, stehen $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ senkrecht aufeinander.

Bew: Annahme: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lin. abhängig, also $\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2$. Dann gilt

$$\lambda_1 \vec{v}_1 = A\vec{v}_1 = \alpha A \vec{v}_2 = \alpha \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

A selbstadjungiert:

$$\lambda_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle A\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, A\vec{v}_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

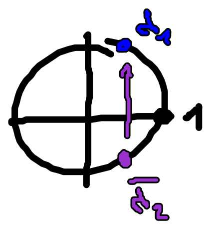
$$\Rightarrow \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0.$$

A unitär:

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle A\vec{v}_1, A\vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 \bar{\lambda}_2 = 1}_{} \ \vee \ \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$$

kann nicht gelten für $\lambda_1 \neq \lambda_2$, beide auf dem Einheitskreis



$\square$

Bsp $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ hat EV $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{C}^2$

Satz 11.1.22 Seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ EV zu den EW $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
Dann gilt:

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschieden $\Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ lin. unabh.

Folgerung 11.1.23 Eine lin. Abbildung auf einen endlichdim. VR hat höchstens dim V verschiedene Eigenwerte.

11.2 Charakteristische Polynome

Def $p_A(z) = \det(A - zI) \in \mathbb{C}_{\leq n}[z]$ heißt das <u>charakteristische Polynom</u> von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Ist $S \in \left(\mathbb{C}^{[z]}_{\le 1}\right)^{n,n}$, so gilt $\det S \in \mathbb{C}^{[z]}_{\le n}$

$n=1$: $\det S = S \in \mathbb{C}^{[z]}_{\le 1}$

$n>1$: $$\det S = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{s_{i1}}_{\in\, \mathbb{C}^{[z]}_{\le 1}} (-1)^{i+1} \underbrace{\det S_{i1}(S)}_{\in\, \left(\mathbb{C}^{[z]}_{\le 1}\right)^{n-1,n-1}}}_{\mathbb{C}^{[z]}_{\le n}}$$

Bsp 11.2.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$

$$p_A(z) = \det(A - zI) = \begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 0 & 3-z \end{vmatrix} = (1-z)(3-z) - 0$$

Satz 11.2.1 $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

(i) $p_A(z) = p_{A^T}(z)$

(ii) Ist $S \in \mathbb{C}^{n,n}$ invertierbar, so gilt
$p_A(z) = p_{SAS^{-1}}(z)$

Folgerung 11.2.2 Ist $L \in \mathrm{Hom}(V,V)$ und B_1, B_2 Basen von V. Dann gilt

$p_{L_{B_1}}(z) = p_{L_{B_2}}(z)$.

(wegen $L_{B_2} = S_{B_1 \to B_2} L_{B_1} S^{-1}_{B_1 \to B_2}$)

Def 11.2.4 Sei V ein endlichdim. VR über $\mathbb{C}$ und $L \in \mathrm{Hom}(V,V)$ sowie L_B eine Matrixdarstellung.
Dann heißt $p_L(z) := p_{L_B}(z)$ das <u>charakteristische Polynom</u> von L.

Bsp 11.2.6 $V = \mathbb{C}^{[x]}_{\le 2}$, $Lp = p'$ (Ableitung)

Basis $B = \{1, x, x^2\}$

$\Rightarrow L_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ weil $L1 = 0$, $Lx = 1$, $Lx^2 = 2x$

$$\Rightarrow p_L(z) = \begin{vmatrix} -z & 1 & 0 \\ 0 & -z & 2 \\ 0 & 0 & -z \end{vmatrix} = -z^3$$

11. Berechnung von EW

Satz 11.3.1/3 $A \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $\lambda \in EW \iff p_A(\lambda) = 0$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "K_B"'] \arrow[dr, bend left] & V \arrow[d, "K_B"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "A_B"'] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff \underline{A_B K_B \vec{v}} = \underline{\lambda K_B \vec{v}}$$
$$\iff (A_B - \lambda I)\, K_B \vec{v} = 0$$
$$\iff A_B - \lambda I \text{ nicht invertierbar}$$
$$\iff \det(A_B - \lambda I) = p_A(\lambda) = 0$$

Bem 11.3.3 Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das charakteristische Polynom mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, also $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ mindestens einen Eigenwert.
Achtung: für reelle Polynome gilt das nicht: x^2+1

Algorithmus 11.3.4 Berechnung von EW und EV

(i) berechne $p_A(z) = \det(A - zI)$
(ii) berechne die Nullstellen von p_A $\rightarrow$ Eigenwerte
(iii) für jede Nullstelle λ bestimme eine Basis des Kerns von $A - \lambda I$ $\rightarrow$ Basis von V_λ

Bem Alg. 11.3.4 <u>nicht</u> zur praktischen Berechnung von EW geeignet.

Bsp $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \longrightarrow \det \begin{bmatrix} -z & 1 \\ 0 & -z \end{bmatrix} = z^2 - 0$

$\Rightarrow$ einziger Eigenwert ist $\lambda = 0$.
Eigenraum $V_0 = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
$\Rightarrow$ es gibt keine Basis aus Eigenvektoren!

Def 11.3.6 Sei $p_A(z)$ das charakt. Polynom von A und λ eine Nullstelle. Ist $p_A(z) = (z-\lambda)^r \cdot q(z)$ mit $q(\lambda) \neq 0$, so heißt r <u>algebraische Vielfachheit</u> von λ.

Bem 11.3.7 algebraische Vielfachheit $\geq$ geometrische Vielfachheit

Bsp $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2-z & 0 & 0 \\ 1 & 1-z & 1 \\ 0 & 0 & 2-z \end{vmatrix}$

$(2-z)^2(1-z) + 0 + 0$
$- 0 - 0 - 0$

$p_A(z) = (1-z)(2-z)^2$

$\Rightarrow$ Nullstellen 1, alg. Vielf. 1

2, alg. Vielf. 2

Basen: $V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ geom. Vielf. 1

$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ geom. Vielf. 2

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$