

# 11 Eigenwerte

Def 11.1.1. Sei  $V$  komplexer VR,  $A \in \text{Hom}(V, V)$   
und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .  $\lambda$  heißt Eigenwert von  $A$ , falls  
 $0 \neq \vec{v} \in V$  existiert, so dass

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Dann heißt  $\vec{v}$  Eigenvektor (zum EW  $\lambda$ ).

Achtung: nur komplexe VR! Jeder reelle VR kann in einen  
komplexen eingebettet werden.

Bem: (i) Ist  $\vec{v}$  EV zum EW  $\lambda$ , so auch  $\alpha\vec{v}$  für  $\alpha \neq 0$   
(ii) Jeder nichttriviale Kernvektor ist EV zum EW 0

Bsp (i)  $A = \lambda \in \mathbb{C}^{1,1} \Rightarrow \lambda$  ist EW, denn  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$  f. a.  $\vec{v} \in \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$

(ii)  $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  ist EV zum EW  $\lambda = 1$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$  ist EV zum EW  $\lambda = -1$

(iii)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ist EV zum EW  $\lambda = 1$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ist EV zum EW  $\lambda = -1$

(iv)  $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \Rightarrow e_i$  ist EV zum EW  $\lambda_i$

(v)  $A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ -1 & 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  ist EV zum EW  $\lambda = 2$

$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  ist EV zum EW  $\lambda = 3$

(vi)  $V = \mathbb{C} \stackrel{[x]}{=} \mathbb{R}^n$ ,  $A\vec{p} = \vec{p}'$  (Ableitung)

$\Rightarrow \vec{1}$  ist EV zum EW 0

$V = \mathbb{C}([a, b])$ ,  $Af = f'$

$\Rightarrow f(x) = e^{ix}$  ist EV (Eigenfunktion) zum EW  $i$

Def 11.1.15 Sei  $V$  komplexer VR,  $A \in \text{Hom}(V, V)$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  EW von  $A$ .

Der Teilraum  $V_\lambda := \{ \vec{v} \in V \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v} \}$  heißt Eigenraum von  $A$  zum EW  $\lambda$ . Die Dimension von  $V_\lambda$  heißt die geometrische Vielfachheit von  $\lambda$ .

Bem: Die geom. Vielfachheit ist die max. Anzahl lin. unabh. EV zum EW.

Bsp:  $\text{Kern}(A) = V_0$ ,  $\dim V_0 = \dim V - \text{Rang } A$

Interpretation:  $A|_{V_\lambda} = \lambda I$  Berechnung von  $A\vec{v}$  besonders einfach auf Eigenräumen

Unitäre Abbildungen ( $\langle U\vec{v}, U\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ )

Sei  $U$  unitär und  $\lambda \in \mathbb{C}$  EW mit EV  $\vec{v}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle U\vec{v}, U\vec{v} \rangle &= \langle \lambda\vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle \\ &= \lambda \overline{\langle \lambda\vec{v}, \vec{v} \rangle} \\ &= \lambda \overline{\lambda} \overline{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \\ &= |\lambda|^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle U\vec{v}, U\vec{v} \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1$$

Die Eigenwerte unitärer Abbildungen (und orthogonaler) liegen auf dem Einheitskreis in  $\mathbb{C}$ .

Selbstadjungierte Abbildungen ( $\langle A\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, A\vec{w} \rangle$ )

Sei  $A$  selbstadjungiert und  $\lambda \in \mathbb{C}$  EW mit EV  $\vec{v}$ . Dann gilt

$$\lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, A\vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

Die EW selbstadjungierter (und reell symmetrischer) Matrizen/Abbildungen sind reell.

Satz 11.1.20 Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  EV zu verschiedenen EW  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Dann sind  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  lin. unabhängig. Ist  $A$  selbstadjungiert oder unitär, stehen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  senkrecht aufeinander.

Bew: Annahme:  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  lin. abhängig, also  $\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2$ . Dann gilt  
 $d_1 \vec{v}_1 = A \vec{v}_1 = \alpha A \vec{v}_2 = \alpha d_2 \vec{v}_2 = d_2 \vec{v}_1 \Rightarrow d_1 = d_2$ .

$A$  selbstadjungiert:

$$d_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle A \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, A \vec{v}_2 \rangle = \bar{d}_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = d_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

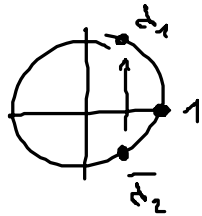
$$\Rightarrow \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0.$$

$A$  unitär:

$$d_1 \bar{d}_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle A \vec{v}_1, A \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{d_1 \bar{d}_2 = 1} \vee \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$$

kann nicht gelten für  $d_1 \neq d_2$ , beide auf dem Einheitskreis



□

Bsp  $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$  hat EV  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  zu  $d_1 = 1$   
 $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$  zu  $d_2 = -1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \text{ bilden eine Basis des } \mathbb{C}^2$$

Satz 11.1.22 Seien  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  EV zu den EW  $d_1, \dots, d_k$ .

Dann gilt:

$$d_1, \dots, d_k \text{ paarweise verschieden} \Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \text{ lin. unabh.}$$

Folgerung 11.1.23 Eine lin. Abbildung auf einem endlichdim. VR hat höchstens dim  $V$  verschiedene Eigenwerte.

## 11.2 Charakteristische Polynome

Def  $p_A(z) = \det(A - zI) \in \mathbb{C}^{\begin{bmatrix} z \\ \leq n \end{bmatrix}}$  heißt  
das charakteristische Polynom von  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

Ist  $S \in (\mathbb{C}_{\neq 1}^{\lfloor z \rfloor})^{n,n}$ , so gilt  $\det S \in \mathbb{C}_{\neq n}^{\lfloor z \rfloor}$

$$n=1: \det S = S \in \mathbb{C}_{\neq 1}^{\lfloor z \rfloor}$$

$$n>1: \det S = \sum_{i=1}^n \underbrace{s_{i,1}}_{\in \mathbb{C}_{\neq 1}^{\lfloor z \rfloor}} \underbrace{(-1)^{i+1} \det S_{i,1}(S)}_{\in (\mathbb{C}_{\neq 1}^{\lfloor z \rfloor})^{n-1, n-1}}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbb{C}_{\neq n}^{\lfloor z \rfloor}}$$

Bsp 11.2.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$$

$$p_A(z) = \det(A - zI) = \begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 0 & 3-z \end{vmatrix} = (1-z)(3-z) - 0$$

Satz 11.2.1  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

(i)  $p_A(z) = p_{A^T}(z)$

(ii) Ist  $S \in \mathbb{C}^{n,n}$  invertierbar, so gilt

$$p_A(z) = p_{SAS^{-1}}(z)$$

Folgerung 11.2.2 Ist  $L \in \text{Hom}(V, V)$  und  $B_1, B_2$  Basen von  $V$ . Dann gilt

$$p_{L_{B_1}}(z) = p_{L_{B_2}}(z).$$

$$\left( \text{wegen } L_{B_2} = S_{B_2 \rightarrow B_1} L_{B_1} S_{B_1 \rightarrow B_2}^{-1} \right)$$

Def 11.2.4

Sei  $V$  ein endlichdim. VR über  $\mathbb{C}$  und  $L \in \text{Hom}(V, V)$  sowie  $L_B$  eine Matrixdarstellung.

Dann heißt  $p^L := p_{L_B}(z)$  das charakteristische Polynom von  $L$ .

Bsp

11.2.6

$$V = \mathbb{C}_{\neq 2}^{\lfloor x \rfloor}, Lp = p' \text{ (Ableitung)}$$

$$\text{Basis } B = \{1, x, x^2\}$$

$$\Rightarrow L_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{weil } \begin{aligned} L1 &= 0 \\ Lx &= 1 \\ Lx^2 &= 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_L(z) = \begin{vmatrix} -z & 1 & 0 \\ 0 & -z & 2 \\ 0 & 0 & -z \end{vmatrix} = -z^3$$

11. Berechnung von EW

Satz 11.3.1/3

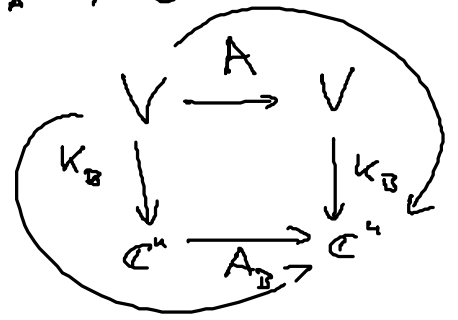
$$A \in \text{Hom}(V, V), \lambda \in \mathbb{C} \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \underline{A_B K_B \vec{v}} = \underline{\lambda K_B \vec{v}}$$

$$\Leftrightarrow (A_B - \lambda I) K_B \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow A_B - \lambda I \text{ nicht invertierbar}$$

$$\Leftrightarrow \det(A_B - \lambda I) = p_A(\lambda) = 0$$



Bem 11.3.3 Nach dem Fundamentalsatz der Algebra

hat das charakteristische Polynom mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ , also  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  mindestens einen Eigenwert.

Achtung: für reelle Polynome gilt das nicht:  $x^2 + 1$

Algorithmus 11.3.4 Berechnung von EW und EV

(i) berechne  $p_A(z) = \det(A - zI)$

(ii) berechne die Nullstellen von  $p_A \rightarrow$  Eigenwerte

(iii) für jede Nullstelle  $\lambda$  bestimme eine Basis des Kerns von  $A - \lambda I \rightarrow$  Basis von  $V_\lambda$

Bem Alg. 11.3.4 nicht zur praktischen Berechnung von EW geeignet.

Bsp  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \rightarrow \det \begin{bmatrix} -z & 1 \\ 0 & -z \end{bmatrix} = z^2 - 0$

$\Rightarrow$  einziger Eigenwert ist  $\lambda = 0$ .

Eigenraum  $V_0 = \text{span} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

$\Rightarrow$  es gibt keine Basis aus Eigenvektoren!

Def 11.3.6 Sei  $p_A(z)$  das charakt. Polynom von  $A$  und  $\lambda$  eine Nullstelle. Ist  $p_A(z) = (z - \lambda)^r \cdot q(z)$  mit  $q(\lambda) \neq 0$ , so heißt  $r$  algebraische Vielfachheit von  $\lambda$ .

Bem 11.3.7 algebraische Vielfachheit  $\geq$  geometrische Vielfachheit

Bsp  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$

$(2-z)^2(1-z) + 0 + 0$   
 $- 0 - 0 - 0$   
 $p_A(z) = (1-z)(2-z)^2$

$\Rightarrow$  Nullstellen 1, alg. Vielf. 1

2, ab. Vielf. 2

Basen:  $V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  geom. Vielf. 1

$V_2 = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$  geom. Vielf. 2

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$