12 Diagonalisierbarkeit

$L \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V

$\Rightarrow L_{\mathcal{C}} = S_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}^{-1} \, L_{\mathcal{B}} \, S_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ (Ähnlichkeitstransformation)

Wann gibt es zu $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ (Rolle $L_{\mathcal{B}}$)
eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n,n}$, so daß
$S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist? $A = SDS^{-1}$

Hinreichend: Basis von Eigenvektoren
wann gilt das? notwendig?

Achtung: Diagonalisierbarkeit hängt davon ab, ob
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist.

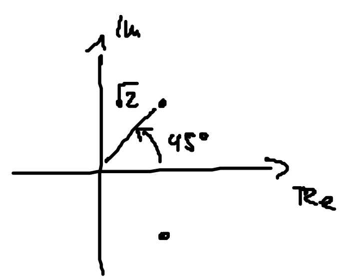
Hier: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

__Bsp__ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

charakter. Polynom
$$\begin{aligned} p_A(z) &= \det(A - zI) \\ &= \begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ 1 & 1-z \end{vmatrix} \\ &= (1-z)^2 - (-1) \\ &= \underbrace{(1-z)^2}_{\geq 1 \text{ für } z \in \mathbb{R}} + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ keine reelle Nullstelle

Nullstellen $1 - z = \pm i$
$\Rightarrow z = 1 \pm i$



(paarweise) verschiedene EW
$\Rightarrow$ EV bilden eine Basis
Darstellung von A in Eigenbasis:

$$S^{-1} A S = \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1+i & \\ & 1-i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$$
$$\notin \mathbb{R}^{2,2}$$

<u>Def</u> 12.1.1. $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, falls invertierbares $S \in \mathbb{C}^{n,n}$ existiert, so daß $S^{-1} A S$ diagonal ist.

<u>Bem</u> Für Diagonalmatrizen ist die Standardbasis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ eine Eigenbasis. Die Diagonaleinträge sind die EW.

<u>Bsp</u>
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisierung entspricht der Berechnung aller EW und EV.

<u>Algorithmus 12.3.1</u>

Eingabe $A \in \mathbb{C}^{n,n}$
Ausgabe: falls A diagonalisierbar: S, D mit $A = SDS^{-1}$
sonst: Fehler

(i) Berechne EW von A und Basen $B_1, \dots, B_k$ der Eigenräume V_i mit Dimension r_i, $i = 1, \dots, k$. (Alg 11.3.4.)

(ii) Falls $\sum_{i=1}^{k} r_i < n$: Abbruch mit Fehler (mind. ein EW mit geom. Vielfachheit < algebr. Vielfachheit)

(iii) $S := [\vec{b}_{1,1}, \dots, \vec{b}_{1,r_1}, \vec{b}_{2,1}, \dots, \vec{b}_{k,r_k}]$

$$D := \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1\text{-mal}}, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$$

<u>Bsp</u>
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

char. Polynom $p_A(z) = \begin{vmatrix} 2-z & -1 & -1 \\ 0 & 3-z & 1 \\ 0 & 1 & 3-z \end{vmatrix}$

Entwicklung nach erster Spalte
$$p_A(z) = (2-z) \begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 1 & 3-z \end{vmatrix} + 0 + 0$$
$$= (2-z)\left[(3-z)^2 - 1\right]$$

$$= (2-z)^2 (4-z) \quad , \Rightarrow \quad d_1 = 2, \; d_2 = 4$$

Eigenräume: $\ker(A - d_i I)$

ONB des Eigenraums V_1: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ONB des Eigenraums V_2: $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

12.4 Rechnen mit diagonalisierbaren Matrizen

Funktionen von Matrizen

Addition: $A + B$ ✓

Multiplik. mit Skalaren αA ✓

Potenzierung: $A^k = A A^{k-1}, \quad A^0 = I$

$$= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ Faktoren}}$$

Polynome von Matrizen: $q(A) = \sum_{l=0}^{N} a_l A^l \quad \in \mathbb{C}^{n,n}$

A diagonalisierbar: $A = S D S^{-1}$

$$\alpha A = \alpha S D S^{-1} = S \alpha D S^{-1}$$

$$A^k = (SDS^{-1}) \cdot (SDS^{-1}) \cdot \quad \ldots \quad (SDS^{-1})$$

$$= S D \underbrace{(S^{-1} S)}_{= I} D S^{-1} \cdot \cdot \quad S D S^{-1}$$

$$= S D^k S^{-1}$$

$$D^k = \operatorname{diag}(d_{11}^k, \ldots, d_{nn}^k)$$

Satz 12.4.3 Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ und $q \in \mathbb{C}_{\leq N}[x]$. Dann gilt

(i) $A = SDS^{-1} \Rightarrow q(A) = S\, q(D)\, S^{-1}$

(ii) $q(D) \Rightarrow \operatorname{diag}(\underbrace{q(d_1), \ldots, q(d_1)}_{r_1\text{-mal}}, q(d_2), \ldots, q(d_k))$

Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \quad , \quad \text{Partialsummen } \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} x^i \in \mathbb{C}[x]_{\leq N}$$

$$e^A := \lim_{N \to \infty} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} A^i$$

Satz 12.4.4. Sei $A = SDS^{-1} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dann gilt

$$e^A = S e^D S^{-1} \text{ mit } e^D = \operatorname{diag}(\underbrace{e^{d_1}, \dots, e^{d_1}}_{r_1\text{-mal}}, e^{d_2}, \dots, e^{d_k}).$$

Bsp 12.4.6. $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

$$\alpha \in \mathbb{R}: \quad e^{-i\alpha A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\alpha)^n A^n$$

wegen $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ gilt

$$e^{-i\alpha A} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^{2n}}_{\text{gerade Summanden}} I - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} A$$

$$= (\cos\alpha) I - i (\sin\alpha) A$$

es gilt aber auch

$$e^{-i\alpha A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & \\ & e^{i\alpha} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} & -ie^{-i\alpha} + ie^{i\alpha} \\ ie^{-i\alpha} - ie^{i\alpha} & e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 2\sin\alpha \\ 2\sin\alpha & 2\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= (\cos\alpha) I - i (\sin\alpha) A$$

12.5 Klassen diagonalisierbarer Matrizen

$A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ hat paarweise verschiedene EW

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar, $S \in \mathbb{C}^{n,n}$

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht!

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch $\Rightarrow$ A diagonalisierbar mit S Drehung $\in \mathbb{R}^{n,n}$

$A \in \mathbb{C}^{n,n}$ selbstadjungiert $\Rightarrow$ A diagonalisierbar mit S unitär

$A \in \mathbb{C}^{n,n}$ unitär $\Rightarrow$ A diagonalisierbar mit S unitär

---

$A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $A \neq 0$, $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ A <u>nicht</u> diagonalisierbar

<u>Bsp</u> <u>Spannungstensor</u>

Kräfte in deformierten Festkörpern werden durch einen symmetrische Spannungstensor $\sigma \in \mathbb{R}^{3,3}$ beschrieben.

$\vec{n}$: Flächennormale

$\vec{F}$: Kraft

Kraft über eine (gedachte) Schnittfläche

$\vec{F} = \sigma \vec{n}$, $\|\vec{n}\| = 1$

In welcher Richtung wirkt die größte Zugspannung?

σ symmetrisch $\Rightarrow$ reell diagonalisierbar mit orthog. EV $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_3$

Das Bild der Einheitskugel (alle möglichen Schnittfläche) ist ein Ellipsoid mit den Halbachsen $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ der Längen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Die maximale Zugbelastung tritt in Richtung des EV zum maximalen EW auf.

$\Rightarrow$ Konsequenzen für Ausrichtung von Faserverbundwerkstoffen.

<u>Bem</u> Diagonalisierung von Matrizen ist i.A. numerisch instabil. Stattdessen wird häufig mit oberen Dreiecksmatrizen gerechnet

<u>Satz (Schur)</u> Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dann ex. unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$, sodass $U^{-1} A U$ ist obere Dreiecksmatrix.