

13 Lineare Differenzialgleichungen

bekannt $A\vec{x} = \vec{b}$

e.B. $A = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Darstellungsmatrix
der Ableitung bzgl. der
monomiale Basis
 $\{1, z, z^2, z^3\} \subset \mathbb{R}_{\leq 3}^{\mathbb{K}}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Koeffizientenvektor von z

$\vec{x} \in \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$

Lösungsmenge $A\vec{x} = \vec{b}$:
alle Stammfunktionen von $z = \frac{1}{2}z^2 + c$
→ Integration

Fixierung der Integrationskonstante:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: Polynom p
mit $p'(z) = p(z)$
und $p(0) = 1$
⇒ existiert keine Lösung

$V = C^1([a, b])$

gesucht: $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y'(z) = \frac{dy}{dz}(z) = y(z) \quad \forall z \in [a, b]$
 $y(0) = c$

Lösung $y(z) = c e^z$

Bsp Mechanik: Bewegung eines Massepunkts

Bahnkurve: $\vec{x}(t)$

Geschwindigkeit: $\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{v}(x(t))$

oder Beschleunigung: $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t))$

Bem $\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$ heißt für die einzelnen Komponenten

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k$$

Bsp 13.13 Newtonsche Gleichung für das Federpendel



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

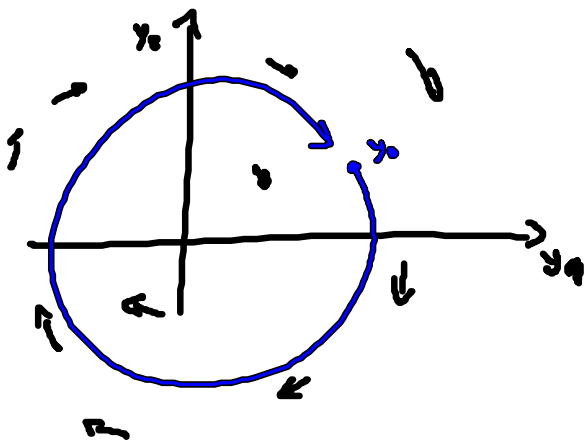
$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x$$

x : Auslenkung aus der Ruhelage

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\vec{y} := \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \vec{y} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\text{Lösung: } \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \vec{y}_0$$



Richtung der Bahnkurve in jedem Punkt gegeben: Vektorfeld

13.3 Exponentialmethode

Bsp: $y \in \mathbb{R}^1$

$$\text{AUP } \frac{dy}{dt} = a y$$

$$y(0) = y_0$$

↳ Lösung $y(t) = y_0 e^{at}$

Satz 13.3.1 Das AUP

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}, \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

hat die eindeutige Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A} \vec{y}_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Bem Berechnung der Lösung besonders einfach für diagonalisierbare A .

Folgerung 12.3.3 Ist \vec{y}_0 EV zum EW λ , so gilt

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \vec{y}_0$$

Ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine Eigenbasis und

$$\vec{y}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i,$$

$$\text{so gilt } \vec{y}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \vec{v}_i$$

Algorithmus

Eingabe: A diagonalisierbar, \vec{y}_0, t_0

Ausgabe: $\vec{y}(t)$

(i) A diagonalisieren: $A = SDS^{-1}$

(ii) $\vec{y}(t) = S e^{(t-t_0)D} S^{-1} \vec{y}_0$

Bem: Vektor S und D müssen reell sein. Dennoch ist bei reellem A das Resultat $S e^{(t-t_0)D} S^{-1}$ reell.

Bsp 13.3.6

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} \quad \text{mit } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Diagonalisierung von A

$$\text{char. Polynom } p_A(z) = \begin{vmatrix} -z & 1 \\ -1 & -z \end{vmatrix} = z^2 + 1$$

$$\rightarrow \text{EV } d_1 = i \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$d_2 = -i \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \vec{y}(t) &= S e^{tD} S^{-1} \vec{y}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} \\ e^{-it} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{it} + e^{-it} \\ i(e^{it} - e^{-it}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

13.4. Angeregte Oszillation

$$\text{Sei } m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -Kx(t) + f(t)$$

m : Masse
 K : Federkonstante
 x : Auslenkung

die Gleichung für das Federpendel, f periodisch

$$\text{Ansatz 3: } x(t) = \text{Re} \left(\sum_{k=1}^N x_k e^{i\omega_k t} \right)$$

$$f(t) = \text{Re} \left(\sum_{k=1}^N f_k e^{i\omega_k t} \right)$$

\rightarrow Basisdarstellung zur Basis $\{ e^{i\omega_k t} \mid k=1, \dots, N \}$

$$\text{Einsetzen: } \text{Re} \left(\sum_{k=1}^N m \cdot x_k (\omega_k i)^2 e^{i\omega_k t} \right)$$

$$= \text{Re} \left(\sum_{k=1}^N (-Kx_k + f_k) e^{i\omega_k t} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -\sum_{k=1}^N m x_k \omega_k^2 e^{i\omega_k t} = \sum_{k=1}^N (-Kx_k + f_k) e^{i\omega_k t}$$

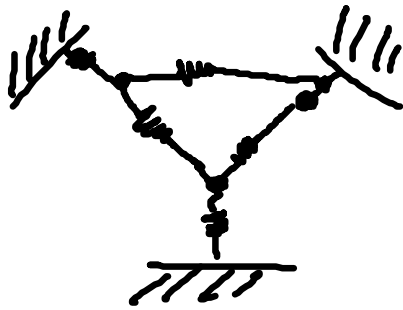
Koeffizienten der Basisdarstellung sind eindeutig

$$\rightarrow (K - \omega_u^2 m) x_u = f_u$$

$$K - \omega_u^2 m = 0 \quad (\omega_u^2 \text{ ist EW von } \frac{K}{m} \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

und $f_u \neq 0 \rightarrow u_u = \infty$ (Resonanz)

Feder-Masse-Systeme



Massepunkte der Masse m
 $\vec{x}(t)$: Auslenkung von der Ruhelage

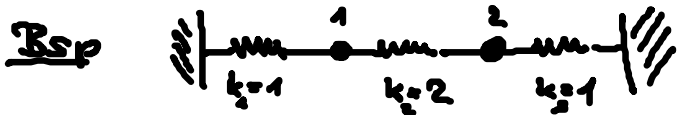
$$\rightarrow m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}(t) = -K \vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

$K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch

Ansatz mit Frequenzlegung (Fourier)

$$(K - \omega^2 m I) x_u = f_u$$

\rightarrow Resonanz bei Anregung mit Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{d_i}{m}}$
 für EW d_i von K



$$\frac{d^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}{dt^2} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) \\ -k_2 x_2 - k_2 (x_1 - x_2) \end{bmatrix} + \vec{f}(t)$$

$$= - \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \vec{f}(t)$$

hier $K = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

mit EW $d_1 = 1$ und $d_2 = 5$

zu EV $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$