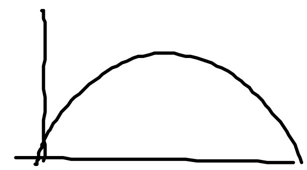
Hermite-Interpolation

Stützstellen x_i, $i = 0, \dots, n$
Werte f_i, $i = 0, \dots, n$
Ableitungen f_i', $i = 0, \dots, n$

klassische Hermite-Interpolation

$$P \in \Pi_3 \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} P(x_0) = f(x_0) & P'(x_0) = f'(x_0) \\ P(x_1) = f(x_1) & P'(x_1) = f'(x_1) \end{array}$$

Bsp $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$



Zur Erinnerung: $f[x_k, \dots x_l] =$

$$\frac{f[x_{k+1}, \dots, x_l] - f[x_k, \dots, x_{l-1}]}{x_l - x_k}$$

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\begin{array}{c|l} x & y \\ 0 & 0 \searrow f'(0) = 1 \\ 0 & 0 \to f'(0) = 1 \qquad \searrow \quad f[0,\pi] - f[0,0] \quad \dfrac{0 - 1}{\pi} = -\dfrac{1}{\pi} \\ \pi & 0 \to 0 \\ \pi & 0 \searrow f'(\pi) = -1 \quad \searrow f[0,\pi,\pi] = \dfrac{f[\pi,\pi] - f[0,\pi]}{\pi - 0} = \dfrac{-1 - 0}{\pi} = -\dfrac{1}{\pi} \end{array}$$

$$0 \quad \searrow f[0,0,\pi,\pi] = \frac{f[0,\pi,\pi] - f[0,0,\pi]}{\pi - 0}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\pi} - \frac{-1}{\pi}}{\pi} = 0$$

dividierte Differenzen

$a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$a_2 = -\frac{1}{\pi}$
$a_3 = 0$

Newton-Polynom $\quad a_0 + (x-x_0)\left(a_1 + (x-x_1)\left(a_2 + (x-x_2)\, a_3\right)\right)$

$$= x\left(1 + x\left(-\frac{1}{\pi}\right)\right)$$

Erweiterung um $x_4 = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & \\
\pi & 0 & 0 & -1/\pi & & & \\
\pi & 0 & -1 & -1/\pi & 0 & & \\
\pi/2 & 1 & \frac{1-0}{\pi/2-\pi} = -\frac{2}{\pi} & \frac{-\frac{2}{\pi}+1}{-\pi/2} = \frac{4-2\pi}{\pi^2} & \frac{8-2\pi}{\pi^3} & \frac{16-4\pi}{\pi^4} &
\end{array}$$

Newton-Polynom $\quad a_0 + (x-x_0)\left(a_1 + (x-x_0)\left(a_2 + (x-x_1)\left(a_3 + (x-x_1)\, a_4\right)\right)\right)$

$$= x\left(1 + x\left(-\frac{1}{\pi} + (x-\pi)\left(0 + (x-\pi)\,\frac{16-4\pi}{\pi^4}\right)\right)\right)$$

Aufwand der Interpolation

Aspekte

(a) Aufwand der Auswertung $P(x)$

(b) Zusatzaufwand für anderes x

(c) Zusatzaufwand für andere f_i

(d) Zusatzaufwand für weitere Stützstelle

(i) Lagrange-Interpolation

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

(a) $O(n^2)$

(b) $O(n^2)$

(c) $O(n)$

(d) $O(n^2)$

(ii) Newton-Interpolation (Horner)

$$P(x) = a_0 + (x-x_0)(a_1 + (x-x_1)(\dots))$$

$$a_i = f[x_0, \dots, x_i]$$

(a) $O(n^2)$ für div. Differenzen
$O(n)$ für Horner-Auswertung } $O(n^2)$

(b) $O(n)$

(c) $O(n^2)$ für div. Diff.

(d) $O(n)$ für $f[x_0, \dots, x_{n+1}]$
$O(n)$ Auswertung } $O(n)$

(iii) baryzentrische Interpolation

ausgehend von Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \sum_{i=0}^{1} f_i \frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{(x-x_i)\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$$

– unabhängig von i

$$l(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j), \quad w_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$$

$$P(x) = l(x) \sum_{i=0}^{1} f_i \frac{1}{(x-x_i)\, w_i}$$

Achtung: bei Auswertung $x = x_i$ gesondert behandeln

(a) w_i : $O(n^2)$
$l(x)$: $O(n)$
$P(x)$: $O(n)$ } $O(n^2)$

(b) $l(x)$: $O(n)$
$P(x)$: $O(n)$ } $O(n)$

(c) $P(x)$: $O(n)$

(d) Änderung der w_i : $O(n)$
$l(x)$: $O(1)$
$P(x)$: $O(n)$ } $O(n)$

<u>Stabilität der Auswertung</u>

Newton - Horner

$$P_n(x) = a_0 + (x - x_0)\, P_{n-1}(x)$$

Stabilitätsindikator

$$P_n = \text{„}+\text{"} \circ \underbrace{\text{„}\cdot\text{"} \circ \left[\text{„}-\text{"}, P_{n-1}\right]}_{g}$$

$$\sigma_n \kappa_n \dot{\leq} \underbrace{\sigma_+ \kappa_+}_{=1} + \kappa_+ \sigma_g \kappa_g$$

$$\sigma_g \kappa_g \dot{\leq} \underbrace{\sigma_\cdot \kappa_\cdot}_{=1} + \kappa_\cdot \max\Big(\underbrace{\sigma_- \kappa_-}_{=1}, \underbrace{\sigma_{n-1} \kappa_{n-1}}_{\geq 1}\Big)$$

$$\dot{\leq} 1 + \underbrace{\kappa_\cdot}_{=2} \sigma_{n-1} \kappa_{n-1}$$

$$\dot{\leq} 1 + 2\, \sigma_{n-1} \kappa_{n-1}$$

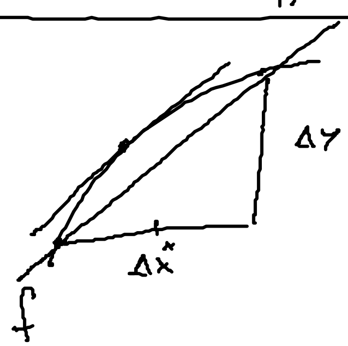
$$\Rightarrow \sigma_n \kappa_n \dot{\leq} 1 + \kappa_+ (1 + 2 \sigma_{n-1} \kappa_{n-1})$$

≈ 1, falls $\kappa_+ \ll 1$ $\qquad |a_0| \gg |g| = |(x-x_0) P_{n-1}(x)|$

$\approx 2^n$, falls $\kappa_+ \approx 1$ $\qquad a_0 \approx (x-x_0) P_{n-1}(x)$

$\gg 2^n$, falls $\kappa_+ \gg 1$ $\qquad a_0 \approx -(x-x_0) P_{n-1}(x)$

Numerische Differentiation



$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = g(f_i)$$

$$\kappa_{rel} = \frac{\|f_i\| \cdot \|g'\|}{\|g\|} \qquad g' = \frac{[-1, 1]}{2h} = O\left(\frac{1}{h}\right)$$

$\|f\| \approx const$

$$\Rightarrow \kappa_{rel} \approx \frac{1}{h}$$

$\|g\| = \|f'\| = const$

Approximationsfehler $O(h^2)$

Fehleräquilibrierung

$\frac{eps}{h} = K_{rel} \cdot eps \approx h^2$

$\Longrightarrow h \approx \sqrt[3]{eps}$