Mitschrift: http://www.zib.de/weiser

$$w(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Welche Stützstellen führen zu minimalem Wert von $\|w\|_{L^\infty[0,1]}$? Insbesondere für große n.

Auch für Kondition wichtig:

$$\Lambda_n := \max_{i=0,\dots,n} \|L_i\|_{L^\infty(0,1)}$$

absolute Kondition der Interpolation

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

das ist der Bösewicht

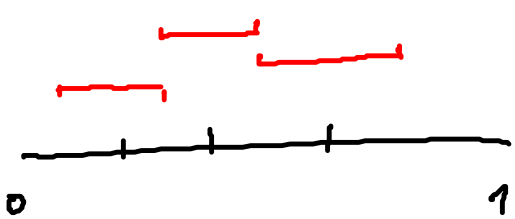
wird maximal für äquidistante Stützstellen

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)|$$

$$\varphi(x) := \log|w(x)| = \log\left|\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right| = \sum_{j=0}^{n} \log|x-x_j|$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{h_j} \int_{\xi=\frac{x_j+x_{j-1}}{2}}^{\frac{x_j+x_{j+1}}{2}} \log|x-x_j| \, d\xi, \quad h_j = \frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}$$

$$= \int_{\xi=0}^{1} \frac{1}{h(\xi)} \log|x - x_j(\xi)| \, d\xi$$



relativen Knotenabstände: $h(\xi)$

Knotendichte: $d(\xi) = \frac{1}{h(\xi)}$

$x_j(\xi) \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$, $\varepsilon \to 0$ für $n \to \infty$

kontinuierliches Modell: $d(\xi)$ punktweise Funktion

$x_j(\xi) = \xi$

$$\varphi(x) \approx \int_0^1 d(\xi) \log|x-\xi| \, d\xi$$: davon die Max-Norm minimieren

äquidistante Interpolation: $d = const = 1$

$$\varphi(x) \approx \int_0^1 \log|x-\xi| \, d\xi = \int_0^x \log|x-\xi| \, d\xi + \int_x^1 \log|x-\xi| \, d\xi$$

$$= x(\log x - 1) + (1-x)(\log(1-x) - 1)$$

Optimale Verteilung (Dichte d) liegt vor, wenn

$\varphi(x) = const = 1$.

Wähle $d(\xi)$ so daß $$\int_{\xi=0}^1 \log|x-\xi| \cdot d(\xi) \, d\xi = 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

Integralgleichung mit Kern $\log|x-\xi|$

numerische Lösung der Integralgleichung:

d sei stückweise konstant

$\varphi(x) = 1$ nur an diskreten Punkten x_i, $i = 0, \dots, m$

Einsetzen von stückweise konstanten Funktionen d

führt auf lineares Gleichungssystem $A\, d = \mathbb{1}$

mit $$A_{ij} = \int_{i/m}^{(i+1)/m} 1 \cdot \log\left| \frac{j+1/2}{m} - \xi \right| \, d\xi$$

$$i=j: \quad A_{ij} = 2\int_0^{1/2m} \log \xi \, d\xi = 2\,\frac{1}{2m}\left(\log\frac{1}{2m} - 1\right)$$

$$i \neq j: \quad A_{ij} = \int_{\frac{|i-j|-1/2}{m}}^{(|i-j|+1/2)/m} \log \xi \, d\xi = \frac{|i-j|+1/2}{m}\left(\log\frac{|i-j|+1/2}{m} - 1\right)$$
$$- \frac{|i-j|-1/2}{m}\left(\log\frac{|i-j|-1/2}{m} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{m}\left(\log\frac{|i-j|+1/2}{m} - 1\right)$$
$$+ \frac{|i-j|-1/2}{m}\left(\log\frac{|i-j|+1/2}{m} - \log\frac{|i-j|-1/2}{m}\right)$$
$$= \frac{1}{m}\left(\log\frac{|i-j|+1/2}{m} - 1\right)$$
$$+ \frac{|i-j|-1/2}{m} \log\frac{|i-j|+1/2}{|i-j|-1/2}$$

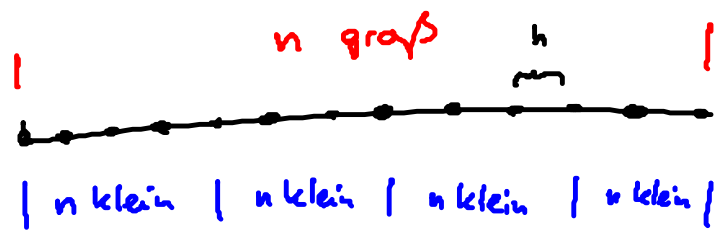
A_{ij} hängt nur von $|i-j|$ ab!

Einfache Splines (C^0-Splines)

$$\| f - p_n \|_{L^\infty} \leq \frac{\|\omega\|_{L^\infty} \cdot \| f^{(n+1)} \|_{L^\infty}}{(n+1)!}$$

$$\|\omega\|_{L^\infty} \leq \frac{n!}{4} \cdot h^{n+1}, \quad h = \frac{H}{n} \qquad \text{äquidistant}$$

stückweise Interpolation



H

$$\text{Fehler } \varepsilon := \frac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty}}{4}\left(\frac{H}{n}\right)^{n+1}$$

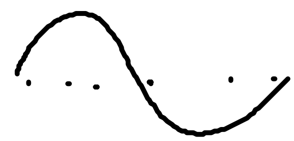
$$= \frac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty}}{4} h^{n+1}$$

<u>Bsp</u>: $f = \sin(\omega x) \quad \Rightarrow \quad \|f^{(n+1)}\|_{L^\infty} = \omega^{n+1}$

$$\varepsilon = \frac{\omega^{n+1} h^{n+1}}{4}$$

$\omega h < 1$: n groß

$\omega h > 1$: n klein: $n = 1$



<u>Bsp</u> Runge-Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty} \approx (n+1)!$$

$$\varepsilon = \frac{(n+1)!\, h^{n+1}}{4} \approx \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,\sqrt{n+1}\left((n+1)\frac{h}{e}\right)^{n+1}$$

$$\varepsilon = \sqrt{n}\left(n\frac{h}{e}\right)^{n}$$

Ableiten $$\varepsilon' = \frac{\cancel{\left(n\frac{h}{e}\right)^{n}}}{2\sqrt{n}} + \sqrt{n}\,\cancel{\left(n\frac{h}{e}\right)^{n}}\left(\log\left(n\frac{h}{e}\right)+1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + n\left(\log\left(n\frac{h}{e}\right)+1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \log\left(n\frac{h}{e}\right) = -\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\Rightarrow n = \frac{e}{h}\cdot e^{W\left(-\frac{h}{2}\right)-1}$$, W: Produktlogarith.
„Lambertsche W-Funkt."

Ansatz $\log\left(n\frac{h}{e}\right) = -1$

$$\Rightarrow n\frac{h}{e} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow n h = 1$$