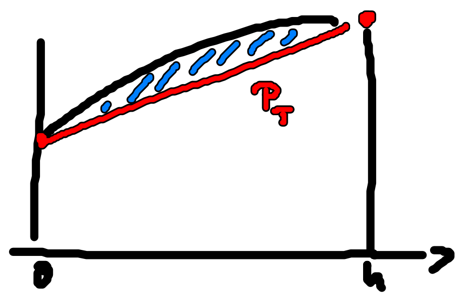
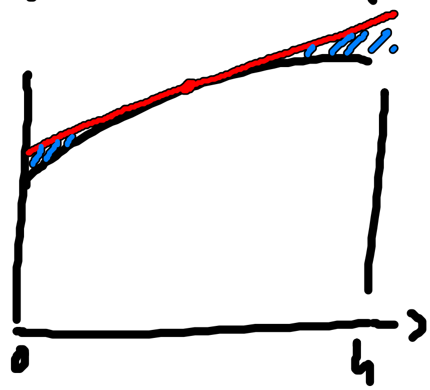
Einfachste Newton-Cotes-Formeln

(i) Trapezregel



(ii)



(i) Trapezregel: punktweiser Approximationsfehler

$$f(t) - P_T(t) = \frac{f''(\tau_t)}{2!}\,\omega_2(t) = \frac{f''(\tau_t)}{2}\,t(t-h)$$

Daher $\displaystyle\int_0^h f(t)\,dt - \int_0^h P_T(t)\,dt$

$$= \int_0^h \frac{f''(\tau_t)}{2}\,\underbrace{t(t-h)}_{\leq 0}\,dt$$

(a) $\displaystyle \geq \max_{\tau\in[0,h]} f''(\tau)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{h^3}{6}\right) = -\max f''(\tau)\,\frac{h^3}{12}$

(b) $\displaystyle \leq \min_{\tau\in[0,h]} f''(\tau)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{h^3}{6}\right) = -\min f''(\tau)\,\frac{h^3}{12}$

Wg Stetigkeit von f'' und Zwischenwertsatz ex.

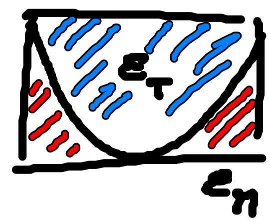
$\tau \in [0,1]$ mit

$$e_T = \frac{h}{2}\left(f(0)+f(h)\right) - \int_0^h f(t)\,dt = f''(\tau)\,\frac{h^3}{12}.$$

(ii) Mittelpunktregel: punktweise Approximationsfehler nach Hermite-Interpolation in $t=\frac{h}{2}$

$$f(t) - P_M(t) = \frac{f''(\tau_t)}{2!}\,\omega_2(t) = \frac{f''(\tau_t)}{2}\left(t-\frac{h}{2}\right)^2$$

$$e_M = h\,f(h/2) - \int_0^h f(t)\,dt = -f''(\tau)\,\frac{h^3}{24}$$



Beobachtung: $e_M \approx -\frac{1}{2}\,e_T$

$$3\,e_{TM} = \int_0^h (2P_M + P_T)\,dt - 3\int_0^h f(t)\,dt = -\frac{2h^3}{24}\,f''(\tau_M) + \frac{h^3}{12}\,f''(\tau_T)$$

≈ 0

Achtung: τ hängt von f und Quadraturformel ab!

$\tau_M \neq \tau_T$

Falls $f''=\text{const}$, so gilt $e_{TM}=0$,
also gemittelte Formel ist exakt für alle Polynome bis zweiten Grades.

Auch sonst: $|3\,e_{TM}| = \left[-f''(\tau_M) + f''(\tau_T)\right]\frac{h^3}{12}$

$$\leq h \cdot \|f'''\|_{L^\infty[0,h]} \cdot \frac{h^3}{12}$$

$$\Rightarrow |e_{TM}| \leq \frac{h^4}{36} \|f'''\|_{L^\infty[0,h]}$$

Interpretation:

$$\frac{1}{3} \int_0^h \left(2P_M(t) + P_T(t)\right) dt$$

$$= \frac{1}{3}\left(2h\, f\left(\tfrac{h}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(f(0) + f(h)\right)\right)$$

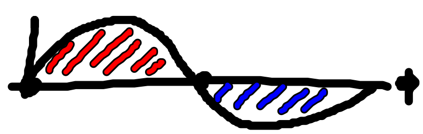
$$= \frac{1}{6} f(0) + \frac{2}{3} f\left(\tfrac{h}{2}\right) + \frac{1}{6} f(h)$$

ist die Simpson-Regel.

Simpson-Regel kann noch mehr:

$$e_{TM} = \frac{f^{(4)}(\tau_s)}{?} \cdot h^5,$$

kubische Polynome werden exakt integriert



kubischer Interpolationsfehler hebt sich im Integral weg.

Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung

negative Gewichte ab 8. Ordnung

(i) Monotonie wird verletzt: $f > 0$ und $I[f] < 0$ gleichzeitig möglich

(ii) Kondition der Integration / Summation

$$f(x) = \sum w_i x_i$$

$$\kappa_{abs} = \max_{\delta x} \frac{|f(x+\delta x) - f(x)|}{\|\delta x\|_\infty} = \frac{|\sum w_i \delta x_i|}{\max |\delta x_i|} = \sum |w_i|$$

wegen $\sum w_i = 1$ gilt $\kappa_{abs} \geq 1$ und $\kappa_{abs} = 1$ für ausschließlich positive Gewichte.