Adaptive Runge-Kutta-Verfahren

Startwert y_0

Schrittweite h

gesucht: Approximation an $y(h)$

y erfüllt $\dot{y} = f(t,y)$

Stufenwerte $k_i = f\left(\alpha_i h,\ y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\right)$, $i = 1, \dots, s$

$$y(h) \approx y_1 := y_0 + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i k_i$$

$$\begin{array}{c|cccc}
\alpha_1 & & & & \\
\vdots & \beta_{21} & & & \\
 & \vdots & & & \\
\alpha_s & \beta_{s1} & \dots & \beta_{s,s-1} & \\
\hline
 & \gamma_1 & \dots & \dots & \gamma_s
\end{array}$$

Bsp: Euler-Verfahren

$$\begin{array}{c|c}
0 & \\
\hline
 & 1
\end{array}$$

Ordnungsbedingungen

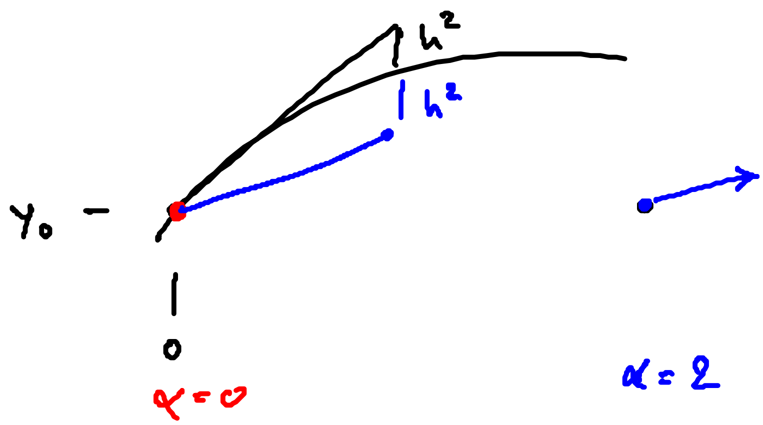
$$\frac{y_1 - y(h)}{h} = O(h) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} \gamma_i = 1 \qquad \mathbb{1} \cdot \gamma = 1$$

$$= \mathcal{O}(h^2) \iff \alpha_i = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ik} \qquad\qquad \beta \mathbb{1} = \alpha$$

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \gamma_i = 1/2 \qquad\qquad \alpha \cdot \gamma = 1/2$$

$$= \mathcal{O}(h^3) \iff \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2 \gamma_i = 1/3 \qquad\qquad \alpha^2 \cdot \gamma = 1/3$$

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i \sum_{k=1}^{s} \beta_{ik} \alpha_k = 1/6 \qquad\qquad \gamma^T \beta \alpha = 1/6$$



lokale Fehlerschätzung

$\varepsilon = \|y(h) - y_1\| \approx \|\hat{y}_1 - y_1\|$ mit einem weiteren RK-Verfahren höherer Ordnung $(p+1)$

Aufwand ist gut verdoppelt!

Recycling der Stufenwerte k_i:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \alpha \\ \hat{\beta} &= \beta \\ \hat{\gamma} &\neq \gamma \end{aligned}\right\}$$ keine zusätzlichen Auswertungen von f! (eingebettete Verfahren)

adaptive Integration (ein Schritt)

do

for $i = 1, \dots, s$

$$k_i := f\left(\alpha_i h, \; y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\right)$$

$$y_1 := \sum \gamma_i k_i$$

$$\hat{y}_1 := \sum \hat{\gamma}_i k_i$$

$$\varepsilon := \| \gamma_i - \hat{\gamma}_i \|$$

$$h := \sqrt[p+1]{\rho \frac{TOL}{\varepsilon}} \cdot h \quad , \; \rho < 1$$

Ziel $\varepsilon = TOL$

$$\varepsilon(h) \approx c \cdot h^{p+1}$$

$$\varepsilon(h_{opt}) \approx c \cdot h_{opt}^{p+1} = TOL$$

$$\Rightarrow \quad h_{opt} = \sqrt[p+1]{\frac{TOL}{\varepsilon}} \cdot h$$

until $\varepsilon \leq TOL$

$$y := \hat{y}_1$$

also gleich: $\hat{y}$ Ordnung $p-1$

y Ordnung p

Konstruktion eingebetteter Verfahren

Heun:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

$$y_1 = y_0 + h\left(\tfrac{1}{2} f(y_0) + \tfrac{1}{2} f(y_0 + h f(y_0))\right)$$

$\leftarrow$ expl. Euler eingebettet

klassisches Runge-Kutta-Verf. $p = 4$

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\
\hline
 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_4
\end{array}$$

einzubettendes Verfahren mit $p=3$

Bedingungsgleichungen für $p=3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \\ \hat{\gamma}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Matrix ist regulär
$\Rightarrow$ ex. eindeutige Lösung
$\left[\frac{1}{6} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{6}\right]$

einzubettendes Verfahren mit $p=2$ führt zu ~~e~~ffizienter Schrittweitenwahl!

Ausweg: eine weitere Stufe
Nachteil: mehr Aufwand ....
es sei denn, man kann die zusätzliche Stufe recyclen!

Fehlberg-Trick

$$k_s = f(h, y_1)$$

wird ohnehin im nächsten Schritt gebraucht!

(FSAL-Eigenschaft first same as last)

Erweiterung des Butcher-Schemas:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & & \\
1 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 0 \\
\hline
 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\gamma}_3 & \hat{\gamma}_4 & \hat{\gamma}_5
\end{array}
$$

Ordnungsbedingungen:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_5 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}
\quad \text{hat Kern} \quad
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

also Lösungen

$$\hat{\gamma} = \left[1/6 \;\; 1/3 \;\; 1/3 \;\; 1/6+\delta \;\; 0-\delta \right]$$

zB $\delta = -1/6 \quad \hat{\gamma} = \left[1/6 \;\; 1/3 \;\; 1/3 \;\; 0 \;\; 1/6 \right]$

Welche Ordnung? $p=3$ oder $p=4$ kommen in Frage

Approximation der Exponentialfunktion (Übung 8.3(b))

$$R(h) = 1 + h\,\alpha^T (I - h\beta)^{-1} \mathbb{1}$$

fehlt auf Übungsblatt!

$$= 1 + h + \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{6}h^3 + \frac{1}{36}h^4 + \frac{1}{144}h^5$$

falsch: bei Exp-Fkt ist es $1/24$

$\Rightarrow$ eingebettete Verfahren hat Ordnung 3

Extrapolationsverfahren

explizites Euler-Verf. $y_{(n+1)h} = y_{nh} + h f(y_{nh})$

Es gilt die asymptotische Entwicklung in h [nicht h^2]

$$\| y(h) - y_{n\frac{h}{n}} \| = \sum_{k=2}^{m} \sigma_k \left(\frac{h}{n}\right)^k + O\left(\left(\frac{h}{n}\right)^{m+1}\right)$$

Also Extrapolation mit Folge $n_{i+1} > n_i$ gegen $\frac{h}{n_i} \to 0$

$$\begin{array}{lcllll}
y_{n_1 \frac{h}{n_1}} & = & y_{11} & \searrow & & \\
\vdots & & \vdots & \to & & \\
y_{n_m \frac{h}{n_m}} & = & y_{m1} & \to & \to & y_{mm}
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\| y(h) - y_{mm} \|}{h} = O(h^m) \quad \text{falls } f \text{ glatt}$$

Wahl der Folge n_i:

- Romberg $1, 2, 4, 8, 16, \dots$
- harmonisch $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Extrapolationstableau (Polynominterpolation Aitken/Neville)

$$y_{ik} = y_{i,k-1} + \frac{y_{i,k-1} - y_{i-1,k-1}}{\frac{n_i}{n_{i-k+1}} - 1}$$

Extrapolationsverfahren sind Runge-Kutta-Verfahren

Bsp: $y_{11} = y_0 + h f(y_0)$ Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Ordnung 1

$$y_{21} = y_0 + \frac{h}{2} f(y_0) + \frac{h}{2} f\left(y_0 + \frac{h}{2} f(y_0)\right)$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Ordnung 1

$$y_{22} = y_{21} + \frac{y_{21} - y_{11}}{\frac{2}{1} - 1} = 2y_{21} - y_{11}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Ordnung 2
mod. Euler

$$y_{31} = y_0 + \frac{h}{3} f(y_0) + \frac{h}{3} f\left(y_0 + \frac{h}{3} f(y_0)\right) + \frac{h}{3} f(\ldots\ldots)$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & \\ \hline & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}$$

$$y_{32} = y_{31} + \frac{y_{31} - y_{21}}{\frac{3}{2} - 1} = 3y_{31} - 2y_{21}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/3 & 1/3 & 0 & & \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & \\ \hline 3\cdot & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ -2 & 1/2 & 1/2 & & \\ \hline = & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$y_{33} = y_{32} + \frac{y_{32} - y_{22}}{\frac{3}{1} - 1} = \frac{3}{2} y_{32} - \frac{1}{2} y_{22}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/3 & 1/3 & 0 & & \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & \\ \hline 3/2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
-\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & 0 & -2 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
y_{11} & & & \\
\vdots & \ddots & & \\
 & & y_{m-1,m-1} & \\
y_{m1} & & y_{m,m-1} & \to y_{m,m}
\end{array}
$$

bessere Fehlerkonstante

Ordnung $m-1$

Ordnung m