Martin Weiser

Waveletmethoden zur Bildkompression

Disputationsvortrag
18. 7. 2001
Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin

1 Literatur

1.1 Monographien

R. Clarke, *Digital Compression of Still Images and Video*, Academic Press, 1995.

Umfassende Darstellung verschiedener Verfahren zur Kompression von Bildern und Videosequenzen.

I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.

Umfassendes, gut lesbares Standardwerk zur Wavelettheorie.

A. Louis, P. Maaß, A. Rieder, *Wavelets*, Teubner, 1994.

Standardwerk zu Wavelets, mit Anwendungen.

1.2 Artikel

R. Buccigrossi, E. Simoncelli, *Image Compression via Joint Statistical Characterization in the Wavelet Domain*, IEEE Trans. Image Proc. 8, 1688–1701, 1999.

Konstruktion eines eingebetteten Wavelet-Kompressors, der direkt die statistische Abhängigkeit örtlich benachbarter Waveletkoeffizienten zur effizienten Kodierung nutzt.

W. Dahmen, *Wavelet and multiscale methods for operator equations*, Acta Numerica 6, 55–228, 1997.

Übersicht über die Grundlagen der Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen mit Waveletansätzen.

W. Dahmen, *Kompression und Konzentration von Information — Wavelets als mathematisches Mikroskop*, Preprint RWTH Aachen, 2000.

Populärmathematische Darstellung der Verwendung von Wavelets zur Bildkompression und Diskretisierung partieller Differentialgleichungen.

I. Daubechies, *Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 41, 909–996, 1988.

Ausführliche, grundlegende Arbeit zur Konstruktion orthonormaler Wavelets mit kompaktem Träger.

G. Davis, A. Nosratinia, *Wavelet-based Image Coding: An Overview*, in B. Datta (ed.), Applied and Computational Control, Signals, and Circuits, Birkhäuser, 1999.

Übersicht über alle wesentlichen Aspekte Wavelet-basierter Bildkompression. Keine Wavelettheorie.

P. Maaß, T. Boskamp, V. Dicken, R. Bischoff, H. Peters, H.-G. Stark, *Bilddatenkompression mit Wavelet-Methoden*, in K.-H. Hoffmann et al. (eds.), Mathematik: Schlüsseltechnologie für die Zukunft, Springer, 385–394, 1997.

Knappe Übersicht über die zur Kompression mittels Wavelets eingesetzten Techniken.

F. Meyer, A. Averbuch, J.-O. Strömberg, *Fast Adaptive Wavelet Packet Image Compression*, IEEE Trans. Image Proc 9, 2000.

Konstruktion eines Kompressionsverfahrens, das eine dem Bild angepaßte Wavelet-Paket-Basis zur Kompression nutzt.

A. Said, W. Pearlman, *A New Fast and Efficient Image Codec Based on Set Partitioning in Hierarchical Trees*, IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Tech. 6, 243–250, 1996.

Überraschend einfache und effiziente Zerotree-Variante, die noch immer eine Meßlatte auch für wesentlich komplexere Algorithmen darstellt.

J. Shapiro, *Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients*, IEEE Trans. Signal Proc. 41, 3445–3462, 1993.

Wegweisende Arbeit über eingebettete Verfahren sowie Ausnutzung statistischer Abhängigkeit örtlich benachbarter Waveletkoeffizienten.

G. Strang, *The Search for a Good Basis*, in D. Griffiths et al. (eds.), Numerical analysis 1997, Addison Wesley, 1997.

Algebraischer Zugang zur Konstruktion von Filterbänken und Waveletbasen mit viel Motivation.

W. Sweldens, *The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 3, 186–200, 1996.

Verfahren zur rekursiven Konstruktion von Wavelets aus einfacheren Wavelets.

2 Glossar

biorthogonale Wavelets: Zwei zueinander duale, nichtorthogonale Waveletbasen $\psi_{j,k}$ und $\tilde{\psi}_{j,k}$ mit $\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{jl}\delta_{km}$. Bei der Darstellung

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

heißt $\tilde{\psi}$ das *Analyse-Wavelet* und ψ das *Synthese-Wavelet.* Biorthogonale Wavelets bieten mehr Konstruktionsfreiheiten (z. B. für mehr verschwindende Momente in $\tilde{\psi}$ und glatteres ψ) und werden dementsprechend orthogonalen Wavelets zur Bildkompression vorgezogen.

eingebettete Verfahren: Kompressionsverfahren mit folgender Eigenschaft. Sind $b_i, 0 \leq i \leq l_b$ und $c_i, 0 \leq i \leq l_c$ Darstellungen der Approximationen f_b und f_c von f als Bitfolgen, so gilt

$$\|f_b - f\|_2 \leq \|f_c - f\|_2 \Rightarrow l_c \leq l_b \wedge c_i = b_i, 0 \leq i \leq l_c\,.$$

Dadurch können Approximationen unterschiedlicher Qualität aus ein und derselben Darstellung gewonnen werden, indem mehr oder weniger Daten gelesen werden.

JPEG: Joint Photographers Expert Group. Standardisierungsgremium für Bildkompression. Der weitverbreitete JPEG-Kompressionsstandard beruht auf der diskreten Kosinustransformation. Der Nachfolgestandard JPEG 2000 (wird voraussichtlich 2002 verabschiedet) basiert auf Waveletverfahren.

Momente: Die Größen

$$M_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x)\, dx$$

werden als die n-ten Momente von ψ bezeichnet. Je mehr Momente verschwinden ($M_n = 0$ für $n < s$), desto besser lassen sich glatte Bildbereiche auf der gröbsten Skala approximieren und desto kleiner sind die Waveletkoeffizienten.

PSNR: Peak Signal to Noise Ratio. Gebräuchliches Maß zur Bewertung des Approximationsfehlers.

$$\mathrm{PSNR} = -20 \log_{10} \|f - \tilde{f}\|_{L_2}$$

Wavelet-Pakete: Wavelets auf feiner Skala haben zwar eine gute Ortslokalisation, aber eine schlechte Frequenzlokalisation. Das ist angemessen für einzelne lokale Effekte wie Kanten in Bildern, aber nicht für oszillatorische Effekte (z.B. Lattenzäune oder Ziegelmauern). Durch eine Aufspaltung der Komplementräume $W_j = W_j^a \oplus W_j^b$ mit den zugehörigen Basisfunktionen

$$\psi^a(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \psi(2x - k)$$
$$\psi^b(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \psi(2x - k)$$

lassen sich Basen erzeugen, die eine bessere Frequenzauflösung auf Kosten größerer Träger der Basisfunktionen erzielen. Diese Aufspaltung kann natürlich rekursiv fortgesetzt werden.