Martin Weiser

Waveletmethoden zur Bildkompression

Disputationsvortrag

Freie Universität Berlin

Fachbereich Mathematik und Informatik

18. 7. 2001

Übersicht

- Transformationskodierung
- Wavelets
  - Multi–Skalen–Analyse
  - Schnelle Wavelet–Transformation
  - Daubechies–Wavelets
- Quantisierung & Kodierung
- Resultate

Graustufenbild: $f\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ meßbar

y

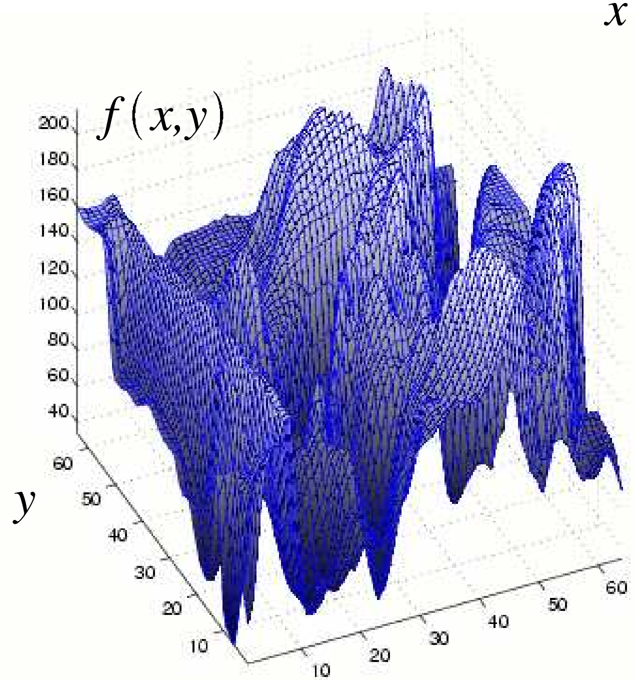
x

Kompressionsaufgabe:

> Finde $\tilde{f}$, darstellbar mit N Bits,
> so daß $\|\tilde{f} - f\|$ möglichst klein ist.

Wahl der Norm:

- $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ einfachste Wahl
- an menschliche Wahrnehmung und an das Bild angepaßtes Abstandsmaß für optimale Resultate erforderlich



Basiswahl → Quantisierung → Entropie–Kodierung →

$$f=\sum \alpha_i \psi_i$$

$$\tilde{f}=\sum \tilde{\alpha}_i \psi_i$$

$$\tilde{\alpha}_i = q(\alpha_i) \in \{q_0, \dots, q_r\}$$

$q_0=0$ $q_3=1101$
$q_1=100$ $q_4=\dots$
$q_2=101$ $\dots$

011010
010111
100010
⋮

Basisdarstellung ← Dequantisierung ← Dekodierung ←

exakt | verlustbehaftet (Rundung) | exakt

Vektorquantisierung: informationstheoretisch optimal, sehr aufwendig
skalare Quantisierung: einfach, nur bei statistisch unabhängigen Koeffizienten optimal

Übliche Darstellung:

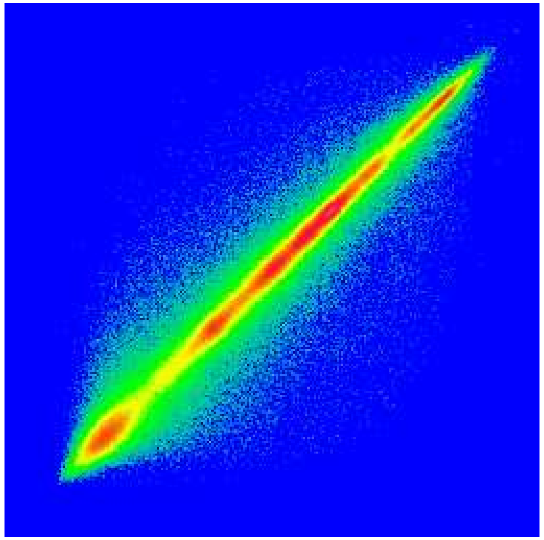
- Pixelbasis (Boxfunktionen)
- 256 Helligkeitsstufen (8bpp)

Nachteil:

- grobe Quantisierung führt zu deutlich sichtbaren Fehlern
- hohe Korrelation der Koeffizienten
  → ineffiziente Entropiekodierung

Original 8bpp

quantisiert 2bpp



Korrelation benachbarter Pixel

Dekorrelation: Entropiekodierung quantisierter Koeffizienten nur einfach und effizient bei dekorrelierten Koeffizienten (für „typische“ Bilder)

Approximation: glatte Bildbereiche durch wenige Basisfunktionen darstellbar

Lokalität im Ort (kleiner Träger): lokale Bilddetails (Kanten) beeinflussen nur wenige Koeffizienten

Lokalität in der Frequenz: Ähnlichkeit zur Fourier–Transformation führt zu Verdichtung des Bildinhalts in wenigen Koeffizienten

Effiziente Transformation!

Glattheit: glatte Quantisierungsfehler sind unauffälliger als unstetige

Symmetrie: symmetrische Quanti–sierungsfehler sind unauffälliger

Orthogonalität: Transformation einfach implementierbar, numerisch gut konditioniert, Koeffizientenfehler ist Bildfehler

Definition

$\psi \in L_2(\mathbb{R})$ heißt Wavelet, falls für die Fouriertransformierte $\hat{\psi}$ gilt:

$$0 < \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \, d\omega < \infty$$

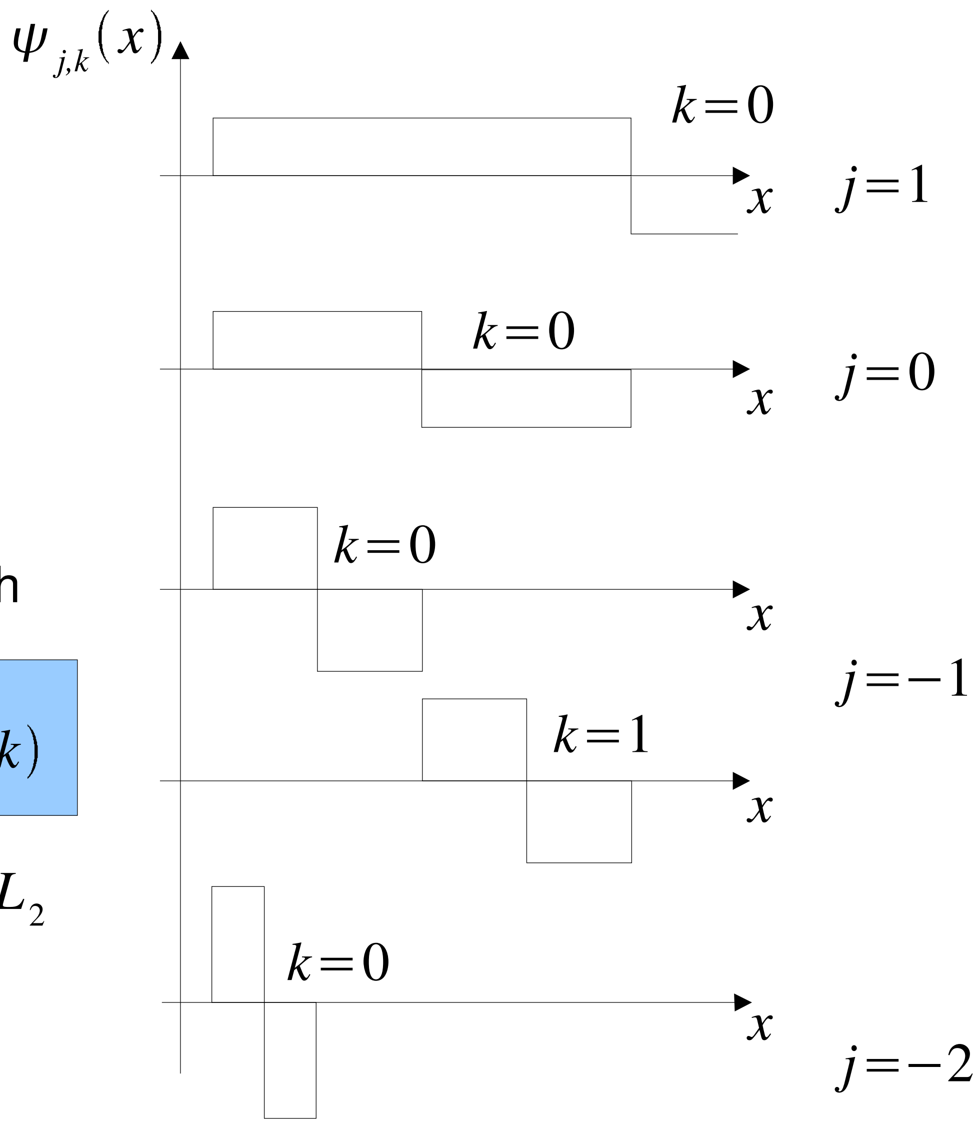
Aus geeigneten Wavelets entsteht durch

- Translation
- Skalierung

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j} x - k)$$

eine Waveletbasis $\{\psi_{j,k} | j,k \in \mathbb{Z}\}$ von L_2

Beispiel: Haar–Wavelet



(Meyer ’86, Mallat ’89)

Hierarchisch geschachtelte Räume

$$V_j,\ j\in\mathbb{Z}$$

bilden eine Multi–Skalen–Analyse, falls gilt:

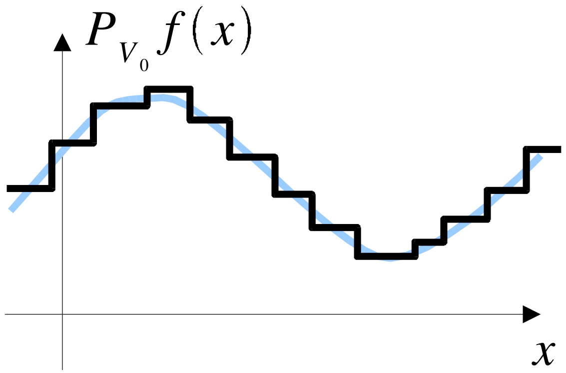
$$V_{j+1}\subset V_j$$

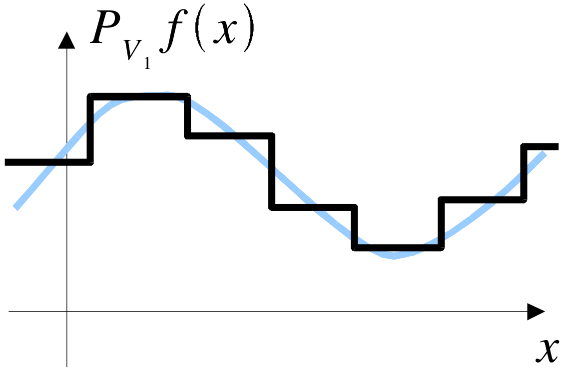
$$\overline{\bigcup V_j}=L_2$$

$$\bigcap V_j=\{0\}$$

$$f\in V_j \Leftrightarrow f(2^j\cdot)\in V_0$$

$$f\in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot-k)\in V_0$$

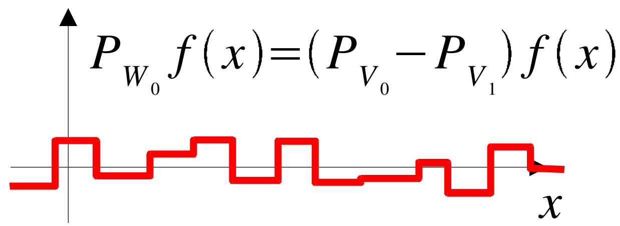




Für die orthogonalen Komplemente W_{j+1} von V_{j+1} in V_j gilt dann

$$V_j=V_{j+1}\oplus W_{j+1}$$

$$L_2=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$$



Theorem (Multi–Skalen–Analyse)

Existiert zur Multi–Skalen–Analyse V_j eine Skalierungsfunktion $\phi \in V_0$, so daß

$\{\phi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthogonalbasis von V_0 ist,

dann existiert eine orthonormale Wavelet–Basis $\{\psi_{j,k} | j,k \in \mathbb{Z}\}$
von L_2, so daß $\psi_{j,k} \in W_j$

Einfache Berechnung der Basiskoeffizienten:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

1. Es existieren Filterkoeffizienten h_k

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \phi_{-1,k}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \phi(2x-k)$$

2. Die Fouriertransformierte läßt sich darstellen als

$$\hat{\phi}(\xi) = H(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2) \qquad \text{mit} \qquad H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{ik\xi} \qquad 2\pi\text{–periodisch}$$

3. Aus der Orthogonalität von $\phi(\cdot), \phi(\cdot - k)$ folgt

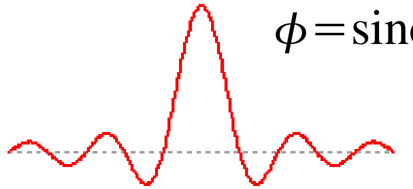
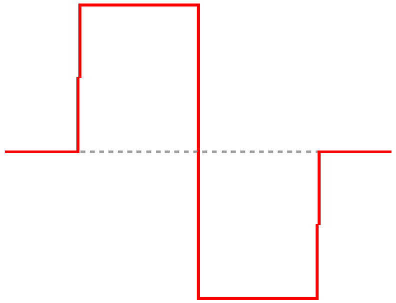
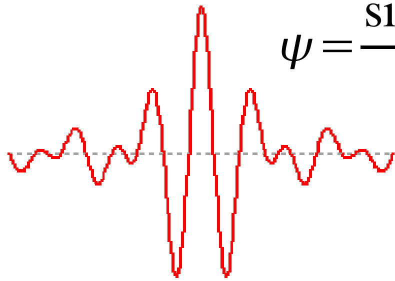
$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi+\pi)|^2 = 1 \qquad \text{f. ü.}$$

4. Jedes $f \in W_0$ läßt sich darstellen als

$$\hat{f}(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{H(\xi/2+\pi)}\,\nu(\xi)\hat{\phi}(\xi/2) \qquad \text{mit } \nu(\xi)\ 2\pi\text{–periodisch}$$

5. Ansatz:

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{H(\xi/2+\pi)}\,\hat{\phi}(\xi/2)$$

	Haar–Wavelet	Littlewood–Paley–Wavelet
Skalierungsfunktion		 $\phi = \mathrm{sinc}(\pi x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$
Wavelet		 $\psi = \dfrac{\sin 2\pi x - \sin \pi x}{\pi x}$
Filterkoeffizienten	$h_0 = 1/\sqrt{2}$ $h_1 = 1/\sqrt{2}$ $h_n = 0$ sonst	$h_0 = 1/\sqrt{2}$ $h_n = 0$ n gerade $h_n = (-1)^{\left\lfloor \frac{\lvert n\rvert - 1}{2} \right\rfloor} \dfrac{\sqrt{2}}{n\pi}$ n ungerade

$$\psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \phi_{-1,n} \quad \Rightarrow \quad \psi_{j,k}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_{n-2k} \phi_{j-1,n}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle f, \psi_{j,k}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_{n-2k} \langle f, \phi_{j-1,n}\rangle}$$

Faltung mit Filterkoeffizienten und Downsampling

$$\phi_{j,k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{n-2k} \phi_{j-1,n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle f, \phi_{j,k}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{n-2k} \langle f, \phi_{j-1,n}\rangle}$$

Alle Waveletkoeffizienten $\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ effizient berechenbar,falls

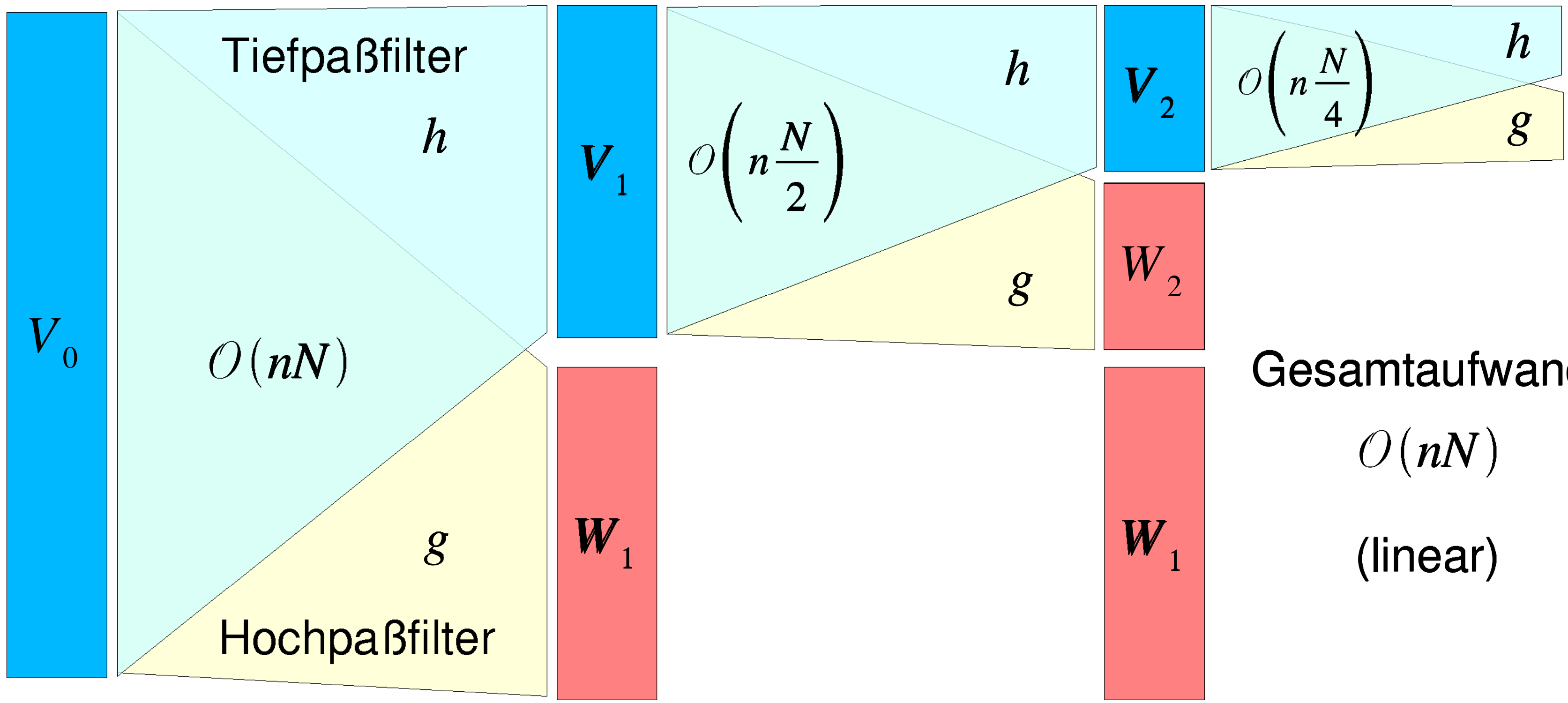
ϕ kompakten Träger hat

$h_n = 0, g_n = 0$ für fast alle n

$\longrightarrow \langle f, \phi_{0,k}\rangle \approx f(k)$ (trivial) berechenbar

$\longrightarrow \langle f, \psi_{j,k}\rangle, \langle f, \phi_{j,k}\rangle$ berechenbar für $j \geq 0$

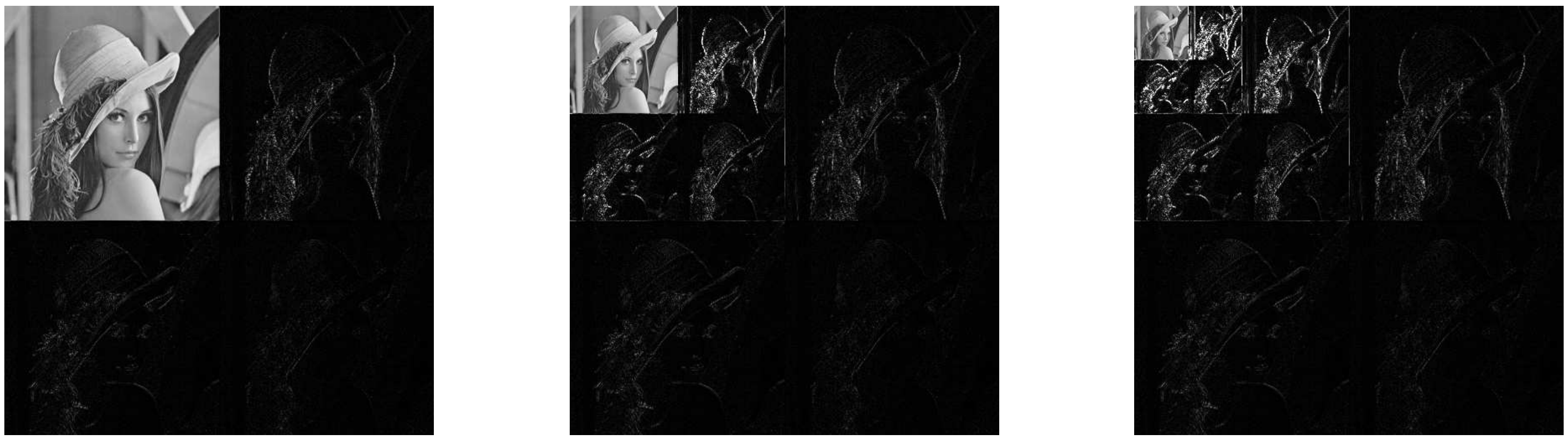
Schnelle Wavelet–Transformation II



Gesamtaufwand:

$\mathcal{O}(nN)$

(linear)



(Daubechies '88)

Nur endlich viele Filterkoeffizienten h_k $\longrightarrow$ von h_k (oder H) ausgehen!

Kandidat für Skalierungsfunktion:

$$\hat{\phi}(\xi)=H(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\phi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\xi)}$$

Notwendige Bedingungen für orthonormale Waveletbasis:

$$|H(\xi)|^2+|H(\xi+\pi)|^2=1$$

$$H(0)=1$$

Durch geeignete Wahl von H lassen sich orthonormale Waveletbasen auf die gewünschten Eigenschaften Lokalität, Approximationskraft und Glattheit zuschneiden. Es sind jedoch i. a. nicht alle Eigenschaften gleichzeitig zu erreichen.

(Daubechies '88, Cohen '90)

Theorem

Gilt für ein trigonometrisches Polynom $H(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{2N-1} h_n e^{-in\xi}$

$$|H(\xi)|^2+|H(\xi+\pi)|^2=1$$

$$H(0)=1$$

$$H(\xi)\neq 0 \quad \text{für} \quad \xi\in[-\pi/2,\pi/2]$$

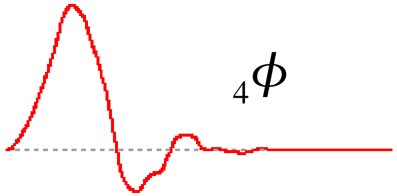
dann erzeugt die Skalierungsfunktion $\hat{\phi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\xi)$

einen kompakten Träger und erzeugt eine Multi–Skalen–Analyse mit zugehörigem orthogonalem Wavelet

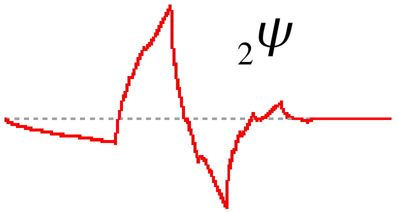
$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n h_{-n+1}\phi(2x-n)$$

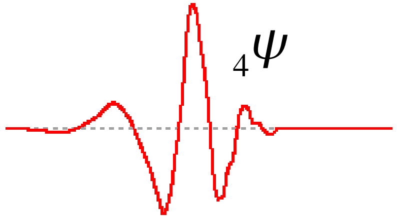
(Daubechies ’88)

Skalierungsfunktion



Wavelet

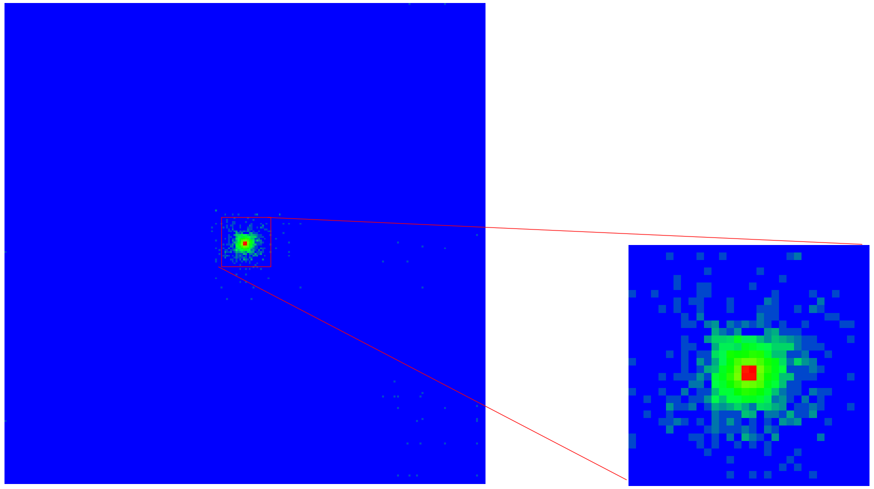




300:1

4	Filterkoeffizienten	8
$[0,3]$	Träger	$[0,7]$
$C^{0.5500}$	Hölder–Stetigkeit	$C^{1.6179}$
2	verschwindende Momente	4

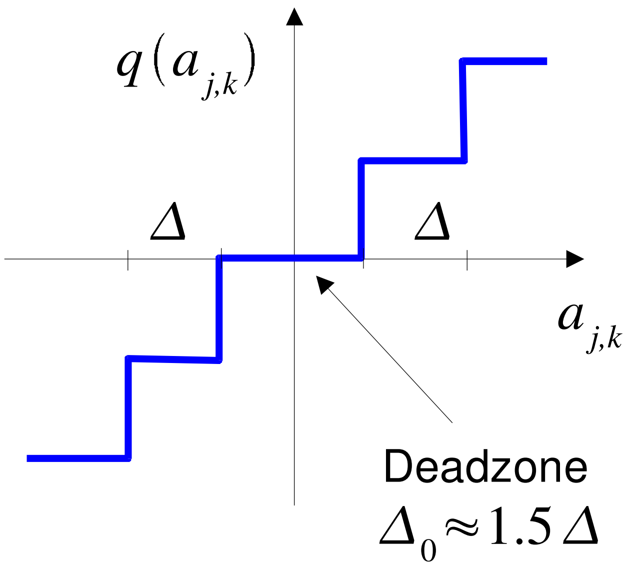
300:1



Korrelation benachbarter Waveletkoeffizienten

dekorrelierte Wavelet–Koeffizienten
→ skalare Quantisierung ausreichend

folgende Entropiekodierung der
quantisierten Koeffizienten
→ uniforme Quantisierung ausreichend



Kodierung der quantisierten Koeffizienten durch
- Huffman–Codes
- arithmetische Kodierung

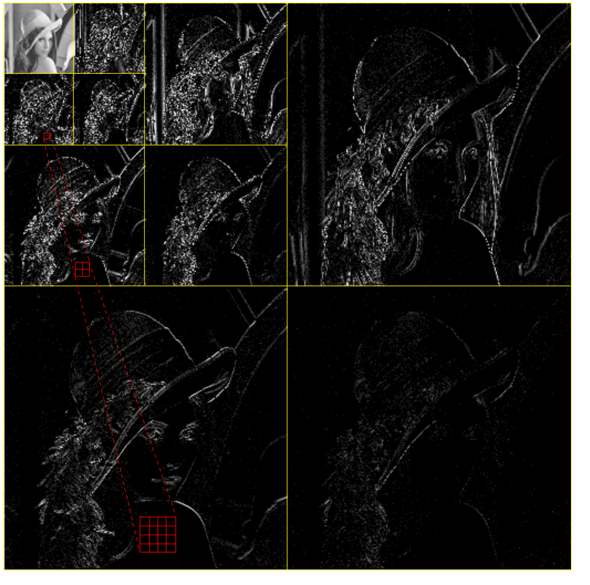
Diskrete Wahrscheinlichkeitsdichte a priori modellieren

$$P(q(a_{j,k}) = q_i) \approx e^{-s|q_i|^r}$$

oder online adaptieren

Koeffizienten dekorreliert, aber statistisch abhängig.

Räumliche Struktur zur effizienten Kodierung nutzen:
Zerotrees (Shapiro ’93)



Resultate

Moderne Waveletmethoden

- biorthogonale Wavelets
- Wavelet–Pakete
- Zerotrees / Estimation–Quantization

- flexibel an verschiedene Aufgaben adaptierbar
- Basis des neuen JPEG 2000 Kompressionsstandards

Pixelbasis JPEG Wavelet

Kompression 64:1 (0.125 bpp)