Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
M.Sc. math. Stephan Schwartz

Diskrete Optimierung im Verkehr (WS 2014)

Übungsblatt 13

Abgabe: Fr, 05. Februar 2015, in der Übung

Aufgabe 1. **2+2+2+2+2 Punkte**

Für das Steinerzusammenhangsproblem in einem Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und allen Pfaden, die genau 4 Knoten miteinander verbinden, wird auf dem Übungsblatt folgender Greedy-Algorithmus vorgeschlagen:

1. Wähle einen beliebigen Pfad und markiere die durch ihn verbundenen Knoten.
2. Solange es noch nicht markierte Knoten gibt, wähle einen Pfad, der einen unmarkierten mit einem markierten Knoten verbindet, und markiere alle durch diesen Pfad neu verbundenen Knoten.

Die Studenten diskutieren:

Anton: Es gibt Graphen, für die es keine Lösung gibt.
Beate: Falls es eine Lösung gibt, dann findet der Greedy-Algorithmus eine.
Claudia: Gibt es zwischen jedem Paar von Knoten zwei verschiedene Wege, dann liefert der Greedy-Algorithmus eine Lösung mit einer minimalen Pfadanzahl.
Doreen: Ist das Problem lösbar und $n-1$ durch drei teilbar, dann gibt es eine Lösung, so dass keine zwei Pfade die gleiche Kante benutzen.
Emil: Wenn es eine Lösung gibt, dann werden mindestens $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ viele Pfade benötigt.

Welche dieser Aussagen stimmen? Begründe!

Aufgabe 2. **10 Punkte**

Betrachte das Kürzeste-Passagierfahrzeiten-Problem mit folgenden Daten:

$$
\begin{aligned}
&G = (V, E)\\
&V = \{1, \dots, n\}^2\\
&E = \{(i,j)(k,l) \in V^2 : |i-k| + |j-l| = 1\}\\
&L = \{((i,1), \dots, (i,n)), i = 1, \dots, n, ((1,j), \dots, (n,j)), j = 1, \dots, n\}\\
&\tau \equiv \mathbb{1}\\
&\sigma = 1
\end{aligned}
$$

Wie viele elementare Operationen führt der Kürzeste-Passagierfahrzeiten-Algorithmus aus, bis die kürzeste Reiseroute von $(1,1)$ nach (n,n) berechnet ist?

Aufgabe 3. **10 Punkte**

Betrachte das Steinerzusammenhangsproblem auf einem Baum $G = (V, E)$ mit Terminals T. Charakterisiere die T-Pfadschnitte.

Aufgabe 4. **10 Punkte**

Betrachte das folgende Unterproblem des Linienplanungsproblem zur Direktfahrermaximierung:

$$(\mathrm{P}) \underline{\Lambda}_e \leq \sum_{\ell \in \mathcal{L}_e} f_\ell \leq \overline{\Lambda}_e \qquad \forall\, e \in E$$
$$f_\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad \forall\, \ell \in \mathcal{L}.$$

Zeige, dass es NP-hart ist, dieses Problem zu lösen. Hinweis: Reduziere das NP-harte Problem "Exact Cover by 3-Sets" (X3C) auf (P). Bei (X3C) ist eine endliche Menge X und Menge von 3-elementigen Teilmengen $\mathcal{X}$ von X gegeben; es wird gefragt, ob es eine Partition von X in Teilmengen aus $\mathcal{X}$ gibt.

Aufgabe 5. **Präsenzübung**

Entwickle ein *Linienplanungsmodell zur Kostenminimierung* in Anlehnung an Claessens, van Dijk & Zwaneveld [1998]. Ausgangspunkt ist die folgende Formulierung in Form eines nichtlinearen Programms:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \left\lceil \tfrac{f_\ell T_\ell}{T} \right\rceil (C^t + C^c z_\ell) + d_\ell f_\ell (c^t + c^c z_\ell) & \\
\underline{\Lambda}_e \leq \sum_{\ell \ni e} f_\ell \leq \overline{\Lambda}_e & \qquad \forall\, e \in E \\
\sum_{\ell \in \mathcal{L}_e} \kappa f_\ell z_\ell \geq \rho_e & \qquad \forall\, e \in E \\
\underline{z} \leq z_\ell \leq \overline{z} & \qquad \forall\, \ell \in \mathcal{L} \\
f_\ell, z_\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} & \qquad \forall\, \ell \in \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Hierbei bestimmt die Variable f_ℓ die Frequenz von Linie ℓ und z_ℓ die Anzahl an Wagen in einem Zug der Linie ℓ. Die Parameter haben die folgende Bedeutung:

- ρ_e Fahrgastvolumen auf Kante e
- $\underline{\Lambda}_e, \overline{\Lambda}_e$ untere und obere Schranke für die Anzahl Züge pro Kante
- $\underline{z}, \overline{z}$ untere und obere Schranken für die Anzahl an Wagen pro Zug
- κ Kapazität eines Wagens
- C^t Fixkosten pro Zug
- C^c Fixkosten pro Wagen
- c^t Betriebskosten pro Zug und Längeneinheit
- c^c Betriebskosten pro Wagen und Längeneinheit
- T_ℓ Umlaufzeit von Linie ℓ
- T Planungshorizont
- d_ℓ geographische Länge von Linie ℓ

Beachte, dass diese Formulierung nichtlinear ist!

a) Reformuliere das Linienplanungsproblem zur Kostenminimierung als ganzzahliges lineares Programm, indem Du die möglichen Kombinationen aus Frequenz und Wagenzahl enumerierst. Nimm folgende Möglichkeiten an:
   - $\mathcal{F} = \{1, 2\}$ Frequenzen
   - $\mathcal{C} = \{3, 4, 5\}$ Wagen pro Zug

b) Implementiere das Modell in `Zimpl` für das holländische ICE-Netz. Das Infrastrukturnetz ist in den Dateien `nodes.dat` und `edges.dat` gegeben, das Passagiervolumen pro Kante in `load.dat`, die Nachfragematrix in `od.dat`, die Fahrzeit pro Kante in *times.dat*. Verwende zur Berechnung der Umlaufzeiten die folgenden Wendezeiten:

```
param tt[O] := <"Ehv"> 5, <"Gn"> 5, <"Gvc"> 5, <"Hgl"> 5,
  <"Lls"> 5, <"Rsdg"> 5, <"Std"> 5, <"Apd"> 13.8, <"Asn"> 13.8,
  <"Gv"> 13.8, <"Hr"> 13.8, <"Mt"> 13.8, <"Shl"> 13.8,
  <"Zvg"> 13.8, <"Ah"> 14.1, <"Asd"> 14.1, <"Asdz"> 14.1,
  <"Bd"> 14.1, <"Lw"> 14.1, <"Odzg"> 14.1, <"Rtd"> 14.1,
  <"Ut"> 14.1, <"Zl"> 14.1;
```

Die Umlaufzeit ist dann

```
  param TT[<l> in L] := sum <l,u,v> in line: time[u,v] +
tt[ord({<ll,u,v> in line with ll == l}, 1, 2)]
+ tt[ord({<ll,u,v> in line with ll == l},
             card({<ll,u,v> in line with ll == l}), 3)];
```

Dabei bezeichnet `time` die Fahrzeit auf den Kanten.