Zur Oberflächenstruktur des Travelling Salesman Polytopen

M. Grötschel und M.W. Padberg, Bonn

Das Travelling Salesman Problem (TSP) läßt sich wie folgt formulieren:

> Gegeben seien n Städte $1,\dots,n$ und Entfernungen c_{ij} zwischen diesen. Gesucht ist eine kürzeste Tour durch alle n Städte, die in Ort 1 beginnt und endet.

Das TSP heißt symmetrisch, falls $c_{ij}=c_{ji}$, sonst asymmetrisch. Zunächst betrachten wir nur den asymmetrischen Fall.

Um das TSP algebraisch behandeln zu können, identifiziert man den Weg von der Stadt i zur Stadt j mit einer Variablen x_{ij} und interpretiert diese wie folgt:

> falls $x_{ij}=1$, ist der Weg von i nach j zu nehmen,
> falls $x_{ij}=0$, ist der Weg von i nach j nicht zu nehmen.

Die Variablen x_{ij} fassen wir zu einem Vektor $x=(x_{11},x_{12},\dots,x_{1n},x_{21},\dots,x_{nn})\in\mathbb{R}^{n^2}$ zusammen.

Graphentheoretisch beschreibt man das TSP durch einen gerichteten, vollständigen, schlingenfreien Graphen $G=(V,E)$, d.h. $V=\{1,2,\dots,n\}$, $E=\{(i,j)\mid i,j=1,\dots,n, i\neq j\}$. Dabei repräsentiert der Knoten $i\in V$ die Stadt i und die Kante (i,j) den Weg von der Stadt i zur Stadt j.

Viele Lösungsansätze für das TSP nutzen dessen Verwandtschaft zum Assignment Problem (AP) aus, dieses lautet

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad x\in P_A^n=\{x\in\mathbb{R}^{n^2}\mid x\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \text{ für } j=1,\dots,n,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \text{ für } i=1,\dots,n\}$$

in: H. J. Zimmermann, A. Schub, H. Späth, J. Stoer (eds.)
Proceedings in Operations Research 4,
Physica Verlag, Würzburg, 1974, 207 – 211

P_A^n heißt der Assignment Polytop, welcher aufgrund der totalen Unimodularität des Restriktionensystems nur ganzzahlige Ecken besitzt. Bekanntlich ist jede Lösung des TSP eine Lösung des AP (siehe [3]), aber nicht umgekehrt. Dantzig, Fulkerson und Johnson [2] haben die folgenden Ungleichungen, die sogenannten Subtour Elimination Constraints, angegeben, die alle Ecken von P_A^n abschneiden, die nicht Touren sind:

$$(S_k) \quad \sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ i \neq j}} x_{ij} \leq k, \; |S| = k+1, \; S \subset V,$$

und $k=0,1\ldots\left[\frac{n}{2}\right]-1$. Dabei ist $[r]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich r. Sei $P_S^n = \{x \in P_A^n \mid x$ erfüllt S_k, $k=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]-1\}$, so repräsentieren alle ganzzahligen Ecken von P_S^n Touren; es zeigt sich aber, daß P_S^n auch nicht-ganzzahlige Ecken besitzt. Definieren wir nun den Travelling Salesman Polytopen P_T^n als die konvexe Hülle aller Touren, d.h. $P_T^n = \text{conv}\{x \in P_S^n \mid x$ ganzzahlig$\}$, so hat P_T^n nach Definition nur ganzzahlige Ecken, dafür ist aber sehr wenig über die Struktur von P_T^n bekannt. (In [6] haben Padberg und Rao gezeigt, daß der Diameter von P_T^n für $n \geq 6$ genau 2 ist.)

Durch konstruktive Beweisführung haben wir in [4] die folgenden Ergebnisse erhalten:

Satz 1: Die Dimension von P_T^n ist $d_n := n^2 - 3n+1$, falls $n \geq 3$.

Satz 2: Die Subtour Elimination Constraints (S_k) definieren Facetten von P_T^n für k=1 und k=2 und für alle $n \geq 5$.

Eine Ungleichung $ax \leq a_o$ definiert eine Facette eines Polytopen P, falls (i) $\dim P \cap \{x \mid ax = a_o\} = \dim P - 1$ und (ii) $P \subset \{x \mid ax \leq a_o\}$.

Seien $K_i \subset V$, $K_i \neq \emptyset$, $i=0,1,\ldots k$ und gelte $|K_o \cap K_i| = 1$, $i=1,\ldots k$.

Sei $K^1 = \bigcup_{i=o}^{k} \{(p,q) \mid p,q \in K_i,\; p \neq q\}$, dann ist die folgende Ungleichung gültig für P_T^n (d.h. alle Touren erfüllen diese Ungleichung):

$$\text{(UC1)} \quad \sum_{(i,j) \in K^1} x_{ij} \leq s(K^1) := |K_o| + \sum_{h=1}^{k} (|K_h| - 1) - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle,$$

wobei $\langle r \rangle$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich r bezeichnet.

In: H.J. Zimmermann, A. Schub, H. Späth, J. Stoer (eds.) Proceedings in Operations Research 4, Physica Verlag, Würzburg, 1974, 207-214

Die Ungleichung (UC1) ist eine direkte Übertragung der "comb-inequality", die Chvatal [1] für das symmetrische TSP abgeleitet hat.

Seien $K_i \subset V$, $K_i \neq \emptyset$, $i=0,1,\ldots,k$ und K^1 wie oben definiert.

Seien $p,q \in V - \bigcup_{i=o}^{k} K_i$ und $p \neq q$, sei

$K^2 = K^1 \cup \{(p,j) \mid j \in K_o\} \cup \{(j,q) \mid j \in K_o\} \cup \{(p,q)\}$, dann ist die Ungleichung

$$\text{(UC2)} \qquad \sum_{(i,j)\in K^2} x_{ij} \leq s(K^1) + 1$$

gültig für P_T^n. Darüberhinaus zeigt sich (siehe [4])

Satz 3: Gilt in der Definition der Ungleichung (UC2) $k=1$, $|K_o|=1$ und $|K_1| = n-2$, dann definiert (UC2) eine Facette von P_T^n für $n \geq 4$.

Satz 4: Gilt in der Definition der Ungleichung (UC2) $k=1$, $|K_o|=1$ und $|K_1|=2$, dann definiert (UC2) eine Facette von P_T^n für $n \geq 6$.

Seien $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1} \in V$ beliebige aber verschiedene Indizes, und sei $2 \leq k \leq n-2$. Dann ist die Ungleichung

$$(D_k) \qquad \sum_{j=1}^{k} x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_{k+1} i_1} + 2 \sum_{j=2}^{k} x_{i_j i_1} + \sum_{j=3}^{k} \sum_{h=3}^{j-1} x_{i_j i_h} \leq k$$

eine gültige Ungleichung für P_T^n. Darüberhinaus ist für $k=2$ die Ungleichung D_2 äquivalent zur (UC2)-Ungleichung von Satz 3, definiert also eine Facette von P_T^n. (Zwei gültige Ungleichungen heißen äquivalent, falls sie von derselben Eckenmenge von P_T^n mit Gleichheit erfüllt werden. Offensichtlich gibt es, da $\dim P_T^n = n^2-3n+1 < n^2$, zu jeder Facette F eine unendliche Anzahl von linearen Ungleichungen $ax \leq a_o$ mit $F = P_T^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid ax = a_o\}$). Für (D_k)-Ungleichungen zeigen wir in [4]

Satz 5: (D_k)-Ungleichungen definieren Facetten von P_T^n, falls $k=3$ und $n \geq 5$.

Seien $i_1, i_2, i_3, i_4 \in V$ vier verschiedene Indizes. Dann ist die folgende Ungleichung

$$(E_3) \qquad 2x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_4} + 2x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} + x_{i_4 i_1} \leq 3$$

gültig für P_T^n, und es gilt:

Satz 6: (E_3)-Ungleichungen definieren Facetten von P_T^n für $n \geq 5$.

In [4] zeigen wir weiterhin, daß für genügend großes n ($n \geq 6$ reicht aus) alle Facetten, die durch die in den obigen Sätzen angegebenen Ungleichungen definiert werden, voneinander verschieden sind. Wir berechnen die Anzahl der so gefundenen Facetten und für jede Facette die Anzahl der Touren, die auf dieser liegen. Sei

$$P_C^n := \{x \in P_S^n \mid x \text{ erfüllt (UC1), (UC2), } (E_3), (D_k)\},$$

so gilt: $P_T^n \subsetneqq P_C^n \subsetneqq P_S^n \subsetneqq P_A^n$. Das heißt, wir haben eine schärfere lineare Charakterisierung von P_T^n erhalten als allein durch die Subtour Elimination Constraints. Im allgemeinen benötigt man jedoch mehr Ungleichungen, um P_T^n vollständig durch lineare Gleichungen und Ungleichungen darzustellen.

Zur algebraischen Behandlung des symmetrischen TSP ordnet man dem Weg zwischen der Stadt i und der Stadt j (die Richtung spielt keine Rolle) eine Variable x_{ij} mit $i<j$ zu. Sei $m=\frac{1}{2}(n^2-n)$, so faßt man diese Variablen zu einem Vektor $x=(x_{12},x_{13},\dots,x_{1n},x_{23},\dots,x_{n-1n}) \in \mathbb{R}^m$ zusammen. Bei der graphentheoretischen Darstellung des symmetrischen TSP erhält man einen ungerichteten Graphen $G'=(V',E')$ mit $V'=\{1,\dots,n\}$, $E'=\{\{i,j\} \mid i,j=1,\dots,n,\ i \neq j\}$.

Definieren wir analog zum asymmetrischen TSP den symmetrischen Travelling Salesman Polytopen als die konvexe Hülle aller Touren, d.h.

$$Q_T^n := \operatorname{conv}\{x \in \mathbb{R}^m \mid x \text{ ist Tour}\},$$

so zeigen wir in [5]

Satz 7: $\dim Q_T^n = \frac{1}{2}(n^2-3n) = |E'|-|V'|$, falls $n \geq 4$.

Satz 2 ließ sich im symmetrischen Fall noch verschärfen. Betrachten wir die "Loop Constraints" (eine äquivalente Formulierung der Subtour Elimination Constraints)

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in V'-S \\ i<j}} x_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in V'-S \\ j<i}} x_{ji} \geq 2, \quad S \subset V',\ 2 \leq |S| \leq n-2$$

so konnten wir beweisen (siehe 5):

Satz 8: Alle Subtour Elimination Constraints (bzw. Loop Constraints) definieren Facetten von Q_T^n für $n \geq 4$.

Einige andere Ungleichungen, sowie die Struktur der gebrochenen Ecken von P_S^n bzw. Q_S^n (analog definiert) werden zur Zeit noch untersucht. Ebenso befindet sich ein "linear programming approach" zur Lösung des TSP in der Entwicklung.

Literaturverzeichnis:

1 Chvatal, V.: "Edmonds Polytopes and Weakly Hamiltonian Graphs", Mathematical Programming, 5 (1973) 29-40

2 Dantzig, G. und R. Fulkerson, S. Johnson: "Solution of a Large Scale Traveling Salesman Problem", Operations Research, 2 (1954) 393-410

3 Garfinkel, R. und G.L. Nemhauser: Integer Programming, Wiley, 1972

4 Grötschel, M. und M.W. Padberg: "Lineare Charakterisierungen von Travelling Salesman Problemen", Report No. 7416, Juni 1974, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn

5 Grötschel, M. und M.W. Padberg: "Linear Characterization of the Symmetric Travelling Salesman Polytope" (in Vorbereitung)

6 Padberg, M.W. und M.R. Rao: "The Travelling Salesman Polytope and a Class of Polyhedra of Diameter Two", Mathematical Programming 6 (1974)