Frequenzplanung im Mobilfunk

von Andreas Eisenblätter, Martin Grötschel und Arie M. C. A. Koster

Telekommunikation ist seit Jahren „in“. Zunächst gab es einen enormen Aufschwung; neue Technologien und Dienste haben eine überwältigende, nicht vorhersehbare Akzeptanz gefunden. Derzeit ist – ausgelöst durch die UMTS-Lizenzversteigerungen, Rezessions- und Sättigungstendenzen – eine Krise zu verzeichnen. Viele (auch wir) sind davon überzeugt, dass technischer Fortschritt und nützliche Dienste demnächst die Stimmung wieder ändern werden. Wenigen ist allerdings bewusst, welche Rolle Mathematik bei der Entwicklung und dem effizienten Einsatz vieler der neuen Kommunikationstechnologien spielt. In diesem Artikel soll kein Überblick über diesen umfangreichen Themenkreis gegeben werden. Wir zeigen lediglich an einem konkreten Beispiel aus dem Mobilfunk, der Frequenzplanung in GSM-Funknetzen, was man durch geeignete Modellierung der praktischen Fragestellung und den Einsatz problemadäquater Algorithmen erreichen kann.

Das General System for Mobile Communication, kurz GSM, ist die in Europa vorherrschende Mobilfunktechnologie. Weltweit nutzen derzeit mehr als eine halbe Milliarde Kunden in über 150 Ländern diesen Standard. Eines der Hauptprobleme aller Formen der Funkkommunikation ist die beschränkte Verfügbarkeit von Frequenzen. Das gilt auch für den GSM-Mobilfunk, dem – je nach Land oder Region – Frequenzbänder in den Bereichen um 450, 900, 1800 und 1900 MHz zur Verfügung stehen.

Eine Mobilfunkfirma kann nicht alle vorhandenen GSM-Frequenzen nutzen. Die Lizenz zur Nutzung muss üblicherweise bei einer nationalen Regulierungsinstanz gekauft werden. Dies geschieht über komplizierte wettbewerbliche Ausschreibungen oder durch Auktionen. Jeder Mobilfunkbetreiber erwirbt – abhängig vom erwarteten Geschäft, von den im jeweiligen Land geltenden Regulierungsverfahren, von den rechtlichen Rahmenbedingungen und von den Kosten – ein gewisses *Frequenzspektrum*, das er für seine Aktivitäten nutzen möchte. Ein solches Spektrum ist im Falle von GSM in Frequenzintervalle eingeteilt, welche *Kanäle* genannt werden. Jedes Mobilfunkunternehmen spricht dann von „seinen Kanälen“. Die in Deutschland tätigen Mobilfunkanbieter haben jeweils zwischen 70 und 120 Kanäle zu ihrer Verfügung.

Eine Mobilfunklizenz ist mit umfangreichen rechtlichen und technischen Verpflichtungen verbunden. Die Unternehmen dürfen in der Regel nicht nur zentrale Orte bedienen. Sie sind gehalten, die Gesamtregion, für die sie eine Lizenz erwerben, innerhalb einer gewissen Zeitspanne abzudecken. Es gibt Auflagen bezüglich der Stationierung von Antennen und anderem Gerät, bezüglich der Sendestärken, etc. Die Errichtung eines Mobilfunknetzes ist teuer. Es muss so geplant werden, dass es

- kostengünstig ist
- den gegenwärtigen Bedarf befriedigt und
- problemlos und preiswert veränderter Nachfrage angepasst werden kann.

Die Hardware- und Softwareinfrastruktur, die ein Mobilfunkunternehmen installieren muss, ist aufwendig. Wir geben eine kurze (unvollständige) Skizze.

Mobiltelefone selbst sind schon kleine technische Wunderwerke, bei deren Design und Herstellung bereits viel Mathematik einfließt. Wenn ein Handy angeschaltet ist, steht es in regelmäßigem Funkkontakt mit dem System. Der Signal-, Sprach- und Datenverkehr zwischen den mobilen Einheiten und dem System (mit verschlüsselten, Fehler korrigierenden Codes) wird über so genannte Base Transceiver Stations (BTSs) abgewickelt. Diese steuern die Mobilfunkantennen, siehe Abb. 4, und bilden die unterste Schicht eines hierarchisch aufgebauten Systems, siehe hierzu Abb. 1. Jede BTS ist mit einem Base Station Controller (BSC) per Kabel oder Richtfunk verbunden. Jeder BSC ist wiederum an ein sogenanntes Mobile Switching Center (MSC) angeschlossen. Die MSCs sind durch ein Festnetz, auch Kernnetz genannt, miteinander verbunden. Dieses bildet das Rückgrat des Gesamtsystems. Bei der Planung dieses Systems sind u. a. folgende Aufgaben zu lösen:

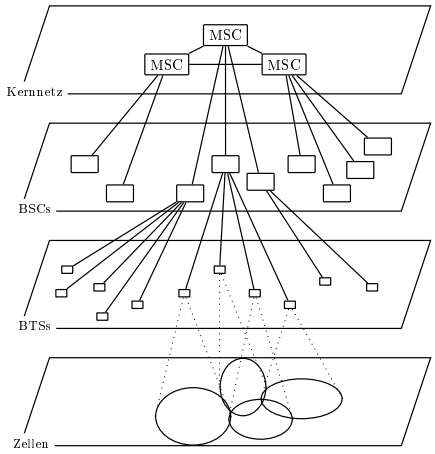


Abb. 1: Hierarchische GSM-Infrastruktur

- Wo sind BTSs aufzubauen, wo BSCs und MSCs einzurichten?
- Welche BTS verbindet man mit welchem BSC, welchen BSC mit welchem MSC?
- Welche Topologie (Ingenieure der Nachrichtentechnik meinen damit graphentheoretische Strukturen) sollen die Netze haben, die MSCs und die anderen Netzkomponenten miteinander verbinden?
- Wie werden die technischen Geräte dimensioniert, mit welchen Kapazitäten werden die Verbindungen ausgestattet?

Diese und viele andere Fragen führen zu sehr großen und komplizierten Optimierungsproblemen, an denen im Konrad–Zuse–Zentrum (ZIB) und in anderen Institutionen in Verbindung mit der einschlägigen Industrie gearbeitet wird.

Wir wollen uns hier einer speziellen, für die Qualität der Verbindungen ungemein wichtigen Aufgabe widmen: der Zuweisung von Funkfrequenzen.

Wie kommt ein mathematisches Forschungsinstitut wie das ZIB an ein solches Projekt? Das ZIB arbeitet seit mehr als zehn Jahren erfolgreich an der Planung von Festnetzen. Einer unserer Partner, die Firma E-Plus, fragte uns, ob wir uns nicht an einer laufenden Ausschreibung zur Frequenzplanung beteiligen wollten. Diese Ausschreibung war ungewöhnlich, denn es wurde nicht nur eine Software zur Lösung eines verbal beschriebenen Problems gesucht; besonderer Wert wurde auch auf die Darstellung und Begründung des hinter der Lösung liegenden mathematischen Modells gelegt. Das hörte sich spannend an. Wir haben an der Ausschreibung teilgenommen und den Zuschlag erhalten. In unserem Artikel skizzieren wir dieses Frequenzplanungsproblem und was daraus geworden ist.

Technische Details, die Sie schon immer wissen wollten

Die oben bereits erwähnten BTSs führen den Funkverkehr mit den Mobiltelefonen. Derzeit kontrolliert eine BTS meistens 3 Antennen an ihrem Standort. Eine Antenne kann wiederum mit mehreren (derzeit selten mehr als 6) Transmitter/Receiver Units (TRXs) bestückt werden. Eine TRX kann 6 bis 8 Teilnehmer gleichzeitig bedienen. Dies geschieht durch „time division“, d. h. jedes Gespräch wird in sehr kurze Zeitscheiben zerhackt, so dass jedem Teilnehmer tatsächlich nur rund ein Achtel der Gesprächszeit zur Verfügung steht. Er merkt davon aber nichts.

Das Gebiet, das eine Antenne abdeckt, nennt man Zelle.* In einer Zelle können also maximal rund 40 Telefonate gleichzeitig geführt werden. Solche Zellen, jeweils eine von einer BTS gesteuert, sind in Abb. 1 angedeutet.

Dicht besiedelte Gebiete und Zonen mit hohem Publikumsverkehr müssen daher mit mehreren Zellen gleichzeitig ausgestattet werden, um das Verkehrsaufkommen bedienen zu können. Das Problem ist nun, dass Antennen, die gleiche oder benachbarte Kanäle benutzen, im Überschneidungsbereich Interferenz erzeugen, so dass Telefonate gestört oder überhaupt nicht möglich sind, siehe Abb. 2. So etwas muss vermieden werden!

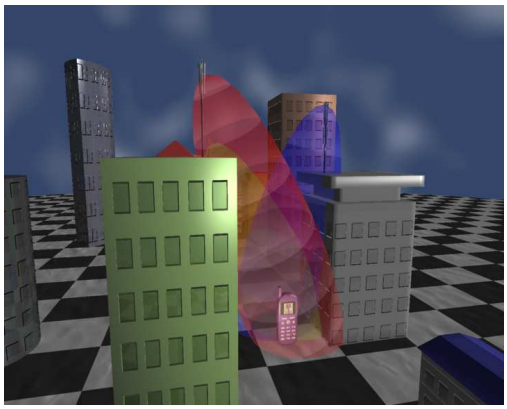


Abb. 2: Überlappende Zellen stören sich

Kommen wir zu weiteren Zahlen. Die deutschen Mobilfunkanbieter haben jeweils ein Netzwerk von 25.000 – 60.000 TRXs aufgebaut. Nehmen wir Durchschnittswerte, so müssen die rund 100 erworbenen Kanäle auf rund 40.000 TRXs verteilt werden. Jeder Kanal wird also im Durchschnitt von 400 TRXs verwendet. Wenn man diese „schön gleichmäßig“ über die Landschaft verteilt, sollte es eigentlich nicht zu Interferenzen kommen. Leider ist das Problem nicht ganz so einfach zu lösen.

Frequenzzuweisung

Die Aufgabe, die verfügbaren Kanäle unter Beachtung verschiedener Nebenbedingungen den vorhandenen TRXs zuzuweisen mit dem Ziel, Interferenz möglichst zu vermeiden, nennen wir *Frequenzplanungsproblem*. Dieses Problem wird auch Kanalzuweisungsproblem (Englisch: frequency oder channel assignment problem) genannt. Als Standard-Kurzbezeichnung hat sich FAP durchgesetzt. Welche

*Daher kommt der Name *Cell Phone*, welcher im englischen Sprachraum verwendet wird. Das Wort *Handy* scheint eine deutsche Sprachschöpfung zu sein.

Nebenbedingungen zu berücksichtigen sind, was „gute“ Frequenzpläne sind, diskutieren wir im Folgenden.

Interferenzbestimmung

Zu Beginn des Mobilfunks dachte man, dass die relativ geringen Antennenleistungen nur zu Interferenzen in der lokalen Umgebung führen. Dies trifft jedoch keineswegs zu. Interferenzen treten über lange Distanzen auf.

Jeder Mobilfunkanbieter unterhält Abteilungen, die die Wellenausbreitung von Antennen sehr genau untersuchen. Geplant wird der Aufbau von Antennen heutzutage mit digitalen Landschaftsszenarien, die genaue Daten (im Meterbereich!) über Geländeformen, Häusergrößen, Straßenbiegungen etc. enthalten, und mit theoretischen Wellenausbreitungsmodellen, die Antennencharakteristiken, Signalrichtungen und -stärken, Stärkeabfall, Filterung, Geländegeometrie, Vegetation und u. U. auch Witterungsbedingungen berücksichtigen. Abb. 3 zeigt ein Beispiel für eine Signalstärkenprädiktion (E-Plus stellte das Bild freundlicherweise zur Verfügung). Die Theorie wird durch praktische Messungen überprüft. Am Ende dieses aufwendigen und teuren Prozesses, der aus einer Kombination von theoretischen Berechnungen, komplexen Datenmodellen und praktischen Messungen besteht, erkennt man Zonen, die hohe Interferenz aufweisen.

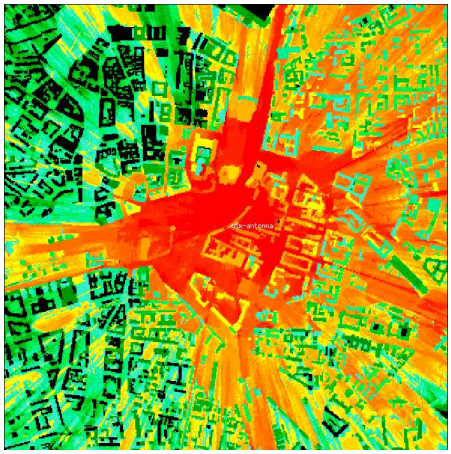


Abb. 3: Prädiktion der Signalstärke einer GSM-Antenne

Es hat sich eingebürgert, für zwei TRXs i und j eine Zahl c_{ij}, $0 \leq c_{ij} \leq 1$, zu definieren, die die Gleichkanalinterferenz in den von i und j überstrahlten Zellen quantifiziert, wenn i und j auf dem gleichen Kanal senden. Für c_{ij} gibt es jedoch keine einheitliche Definition. Wenn z. B. die Interferenz in einem kleinen Zellüberschneidungsbereich sehr hoch ist, ist dann c_{ij} größer als wenn die Interferenz in einem viel größeren Bereich relativ gering ist? Auf diese und ähnliche Fragen gibt es keine eindeutige Antwort. Jede Firma hat ihre eigenen Regeln und auf Erfahrung und Vergleichsmessungen basierenden „Rezepte“.

Frequenzplanung durch Färbung von Graphen

Wenn man derartige Zahlen hat, wie stellt man dann einen guten Frequenzplan auf? Eine offensichtliche Idee, die in den Anfangszeiten des Mobilfunks umgesetzt wurde, ist die Formulierung dieser Aufgabe als ein Graphenfärbungsproblem. Wie geht das?

Jede TRX wird als Knoten eines Graphen aufgefasst. Nun kommt ein „Schritt der Willkür“. Man definiert einen Parameter λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, genannt Akzeptanzniveau, und führt eine Kante ij zwischen den Knoten i und j ein, wenn die Gleichkanalinterferenz $c_{ij} > \lambda$ ist. Auf diese Weise erhält man einen Graphen $G_\lambda = (V, E_\lambda)$, wir nennen ihn λ-Interferenzgraph, der abhängig davon ist, welche Gleichkanalinterferenz zwischen zwei TRXs als tolerierbar angesehen wird.

Jetzt erinnern wir uns daran, dass man einen Graphen k-färbbar nennt, wenn man die Knoten des Graphen mit k Farben so einfärben kann, dass je zwei benachbarte Knoten verschiedene Farben haben. Die minimale Anzahl k, mit der man einen Graphen G färben kann, heißt Färbungs- oder chromatische Zahl. Sie wird mit $\chi(G)$ bezeichnet.

Besitzt nun eine Mobilfunkfirma N fortlaufende Funkkanäle und kann man „ihren“ λ-Interferenzgraphen mit $k \leq N$ Farben färben, dann hat man offensichtlich das Frequenzzuweisungsproblem in dem Sinne gelöst, dass jeder TRX ein Kanal (gleich Farbe) so zugewiesen werden kann, dass zwischen zwei TRXs mit gleichem Sendekanal höchstens die Interferenz λ besteht.

Der Lösungsweg ist damit vorgezeichnet. Man startet mit einem Akzeptanzniveau λ, das man erreichen möchte. Man berechnet $\chi(G_\lambda)$. Ist $\chi(G_\lambda) \leq N$, ist man fertig. Man kann natürlich versuchen, den Schwellenwert λ noch weiter nach unten zu drücken. Ist $\chi(G_\lambda) > N$, so muss man λ erhöhen und durch Variation von λ und anschließende Berechnung von $\chi(G_\lambda)$ so lange fortfahren, bis eine akzeptable Frequenzzuweisung erreicht wird.

Das berühmteste Resultat der Graphentheorie besagt, dass jeder planare Graph mit vier Farben gefärbt werden kann. Das hilft uns jedoch nicht sonderlich, denn Graphen des Typs G_λ sind weit davon entfernt, planar zu sein. In unseren Anwendungen tauchen Graphen auf, die vollständige Untergraphen

(Cliquen) mit über einhundert Knoten enthalten. Cliquen in planaren Graphen haben jedoch höchstens vier Knoten.

Graphenfärben reicht nicht

Diese Art der mathematischen Modellierung der Frequenzzuweisungsaufgabe bringt mehrere Probleme mit sich.

1. Die exakte Berechnung von $\chi(G)$ ist theoretisch ein NP-schweres Problem und praktisch, zumindest für Graphen G_λ, wie sie in der Frequenzplanung auftreten, kaum durchführbar. Stattdessen gibt es eine Unmenge von Heuristiken. Eine gute Approximation von $\chi(G)$ ist theoretisch auch nicht erreichbar. Ordentliche Approximation in der Praxis benötigt enorme Laufzeiten.

2. Diese Modellierung ist zu einfach. Eine Färbung, bei der alle Knotenpaare fast die Gleichkanalinterferenz λ haben, wird als genauso gut angesehen, wie eine andere, bei der dies nur für ein Knotenpaar der Fall ist und alle anderen Interferenzen gering sind.

Als noch schwerwiegender erwies sich die „Intoleranz“ des Färbungsmodells gegenüber weiteren Nebenbedingungen. Wir wollen drei dieser zusätzlichen Forderungen an die Kanalzuweisung erwähnen.

3. An vielen Orten sind nicht alle lizensierten Kanäle verfügbar. Das kann daran liegen, dass priorisierter Funkverkehr (z. B. des Militärs) in gewissen Regionen einige Kanäle blockiert. Typisch ist eine derartige Situation in Randzonen, wo man mit Mobilfunkanbietern in angrenzenden Ländern Vereinbarungen darüber erzielen muss, wer an welchen Standorten welche Kanäle benutzen darf oder nicht.

4. In der Anfangszeit des Mobilfunks standen Antennen weit auseinander, und jede Antenne war nur mit einer TRX bestückt. Heute sehen wir, siehe Abb. 4, auf vielen Häusern mehrere Antennenmasten mit jeweils mehreren Antennen. Aus technischen Gründen dürfen so nahe beieinander liegende Antennen nicht auf benachbarten Kanälen senden. Damit kann das Färbungsmodell nicht umgehen, denn eine Nachbarschaft von Farben ist nicht definiert. Man muss Zahlen statt Farben verwenden und numeriert z. B. die verfügbaren Kanäle von dem untersten bis zum obersten Frequenzintervall durch. Will man „Nachbarschaftsbelegung“ ausschließen, so verlangt man z. B., dass, wenn TRX i auf Kanal $f(i)$ sendet, eine benachbarte TRX nicht auf den Kanälen $f(i)-2$, $f(i)-1$, $f(i)$, $f(i)+1$, $f(i)+2$ senden darf. Man nennt derartige Einschränkungen Separationsbedingungen.

Abb. 4: Benachbarte Antennen müssen „separiert“ werden

5. In der Praxis hat sich gezeigt, dass nicht nur Gleichkanal- sondern auch Nachbarkanal-Interferenz eine Rolle spielt. Das heißt, wenn eine TRX auf Kanal k und eine andere auf Kanal $k+1$ oder $k-1$ sendet, dann können ebenfalls störende Interferenzen auftreten. Sie sollten auch im Modell berücksichtigt werden.

Verallgemeinertes Färben

Diese und andere Nebenbedingungen haben zur Weiterentwicklung der Graphentheorie beigetragen. Forderung 3 hat zur Untersuchung von so genannten *Listen-Färbungsproblemen* herausgefordert. Hier ist zusätzlich zu einem Graphen G für jeden Knoten i eine Liste $L(i)$ von erlaubten Farben gegeben. Das Listen-Färbungsproblem lautet dann: Mit wieviel Farben kann man G färben, so dass je zwei benachbarte Knoten verschiedene Farben haben und jeder Knoten eine Farbe aus seiner Liste $L(i)$ enthält?

Nebenbedingung 4 hat die Forschung auf *T-Färbungsprobleme* gelenkt. Hierbei ist neben dem Graphen $G=(V,E)$ für jede Kante $ij \in E$ eine Menge $T(ij)$ von Zahlen gegeben. Die Aufgabe ist, jedem Knoten i eine natürliche Zahl (Farbe) $f(i)$ so zuzuweisen, dass für jede Kante ij der Wert $|f(i)-f(j)|$

nicht in der Menge $T(ij)$ liegt. Typischerweise wird dabei verlangt, dass die Zahlen $f(i)$ in einem vorgegebenen Intervall liegen oder dass sie im Intervall $\{0, 1, ..., k\}$ liegen müssen und k so klein wie möglich gemacht werden soll.

Beide Verallgemeinerungen haben zu spannenden Forschungsfragen geführt. Wichtige Sätze der traditionellen Färbungstheorie sind (mit Modifikation natürlich) in den allgemeinen Rahmen übertragen worden. Zur praxisadäquaten Lösung der Frequenzplanung reicht das jedoch bei weitem noch nicht aus.

Unser Modell

In der Tat kann man nicht davon sprechen, dass ein einheitliches, von allen in der Frequenzplanung Tätigen akzeptiertes mathematisches Modell vorhanden ist. Dafür gibt es allein schon bei der Definition der Interferenz zwischen zwei Zellen zu viele Möglichkeiten, die Parameter c_{ij} oder ähnliche „Konfliktgrößen“ zu definieren.

Wir stellen hier ein mathematisches Modell vor, auf das wir uns nach langem Abwägen verschiedener anderer Möglichkeiten mit der Firma E-Plus geeinigt haben. E-Plus sieht sich in der Lage, dieses Modell mit qualitativ akzeptablen Daten zu versehen (ein wichtiger Faktor für den sinnvollen Einsatz von Mathematik), und ist durch Überprüfung von Modelllösungen in der Praxis zu der Überzeugung gelangt, dass Frequenzpläne, die mit diesem Modell erstellt wurden, eine gute Ausgangsbasis für die praktische Umsetzung sind. Aufgrund von zusätzlichen Nebenbedingungen oder irgendwelchen Besonderheiten, die man nicht im Modell berücksichtigen kann oder will, erfolgt die Umsetzung selten eins–zu–eins. Es werden häufig leichte Modifikationen am berechneten Frequenzplan vorgenommen, die die Lösungsqualität jedoch nur geringfügig verändern.

Jeder Transmitter/Receiver Unit im betrachteten Gebiet ordnen wir einen Knoten eines Graphen zu. Sei V die Menge dieser Knoten und $E(V) := \{ij : ij \in V\}$ die Menge aller ungeordneten Paare von Knoten, also die Menge aller potentiellen Kanten des Graphen. Zwischen zwei Knoten i und j enthält der Graph eine Kante ij, wenn mindestens einer der drei folgenden Sachverhalte vorliegt:

1. Wenn TRX i und TRX j auf dem gleichen Kanal senden, entsteht Interferenz. Wir bezeichnen diese Gleichkanalinterferenz mit c_{ij}^{co} (*co*-channel interference). c_{ij}^{co} ist eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Wir setzen
$$E^{co} := \{ij \in E(V) : c_{ij}^{co} > 0\}.$$
2. Wenn TRX i und TRX j auf Nachbarkanälen senden, entsteht Nachbarkanalinterferenz. Diese wird mit c_{ij}^{ad} bezeichnet, es gilt ebenfalls $0 \le c_{ij}^{ad} \le 1$. Wir setzen
$$E^{ad} := \{ij \in E(V) : c_{ij}^{ad} > 0\}.$$
3. Zwischen TRX i und TRX j besteht eine Separationsbedingung. In diesem Falle ist eine positive ganze Zahl d_{ij} gegeben, so dass die i bzw. j zugewiesenen Kanäle $f(i)$ und $f(j)$ die Bedingung $|f(i) - f(j)| \ge d_{ij}$ erfüllen müssen. Wir setzen
$$E^{d} := \{ij \in E(V) : d_{ij} > 0\}.$$

Damit erhalten wir einen Graphen $G = (V, E)$ mit $E = E^{co} \cup E^{ad} \cup E^{d}$, wobei jede Kante $ij \in E$ mit mindestens einem der drei Werte c_{ij}^{co}, c_{ij}^{ad}, d_{ij} verknüpft ist.

Da jeder Mobilfunkanbieter bereits eine feste Anzahl von Kanälen besitzt, hat es keinen Sinn, die Kanalzahl zu minimieren. Ziel muss es sein, bestmöglichen Gebrauch von den vorhandenen Ressourcen zu machen. Mit $C = \{1, 2, ..., k\}$ bezeichnen wir das Spektrum der verfügbaren Kanäle.

Für jeden Knoten $i \in V$ müssen wir uns noch merken, welche Kanäle an seinem Aufstellungsmast verboten sind oder nicht. Mit $F_i \subseteq C$ bezeichnen wir die bei i erlaubten Kanäle.

Damit sind alle Daten unseres Modells beschrieben. In Kurzform sprechen wir einfach von dem Frequenzplanungsproblem $N = (V, E, C, (F_i)_{i \in V}, d, c^{co}, c^{ad})$.

Was wir noch nicht verraten haben, ist die Zielfunktion. Hier könnte man versuchen, mit k Frequenzen auszukommen und die größte Interferenz so klein wie möglich zu halten. Wir haben uns dafür entschieden, die Summe aller auftretenden Gleichkanal- und Nachbarkanalinterferenzen zu minimieren.

Jetzt ist unser Modell komplett, und wir können es als ganzzahliges lineares Programm aufschreiben.

$$\min \quad \sum_{ij \in E^{co}} c_{ij}^{co} z_{ij}^{co} + \sum_{ij \in E^{ad}} c_{ij}^{ad} z_{ij}^{ad} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{f \in F_i} x_{if} = 1 \qquad \forall i \in V \tag{2}$$

$$x_{if} + x_{jg} \le 1 \qquad \forall ij \in E^{d},\ f \in F_i, g \in F_j:\ |f - g| < d_{ij} \tag{3}$$

$$x_{if} + x_{jf} \le 1 + z_{ij}^{co} \qquad \forall ij \in E^{co},\ f \in F_i \cap F_j \tag{4}$$

$$x_{if} + x_{jg} \le 1 + z_{ij}^{ad} \qquad \forall ij \in E^{ad},\ f \in F_i, g \in F_j:\ |f - g| = 1 \tag{5}$$

$$x_{vf}, z_{ij}^{co}, z_{ij}^{ad} \in \{0, 1\} \tag{6}$$

Wir erklären kurz die Bedeutung der Variablen, Gleichungen und Ungleichungen. Die 0/1–Variablen x_{if} geben an, ob Kanal $f \in F_i$ der TRX i zugewiesen wird ($x_{if} = 1$) oder nicht ($x_{if} = 0$). Gleichung (2) stellt sicher, dass jeder TRX $i \in V$ genau ein Kanal zugewiesen wird. Ungleichung (3) sorgt dafür, dass zwei TRXs, zwischen denen eine Separationsbedingung besteht, nicht mit Kanälen belegt werden, die zu nah beieinander liegen. Wenn zwischen zwei TRXs i, j Gleichkanalinterferenz besteht, d.h. $ij \in E^{co}$, und sie gleiche Kanäle zugewiesen bekommen, also $x_{if} = x_{jf} = 1$, dann erzwingt Ungleichung (4), dass die 0/1-Hilfsvariable z_{ij}^{co} auf 1 gesetzt wird. Analog sorgt Ungleichung (5) dafür, dass die 0/1-Hilfsvariable z_{ij}^{ad} den Wert 1 erhält, falls i und j mit benachbarten Kanälen belegt werden und zwischen i und j Nachbarkanalinterferenz besteht. Die Hilfsvariablen z_{ij}^{co} und z_{ij}^{ad} dienen dazu, in der Zielfunktion (1) die Gleichkanal- und Nachbarkanalinterferenzen aufzuaddieren. Jede zulässige Lösung dieses 0/1-Programms liefert eine zulässige Lösung des Frequenzplanungsproblems. Jeder TRX i wird der (eindeutig bestimmte) Kanal $f \in F_i$ zugewiesen mit $x_{if} = 1$. Jede Optimallösung des 0/1-Programms liefert eine Interferenz minimale Frequenzzuweisung.

Man kann einwenden, dass bei diesem Modell in einigen Zellüberlappungsbereichen sehr große Interferenzen auftreten können. Dies kann man, falls notwendig, durch einen einfachen „Trick“ verhindern. Man reaktiviert den bereits erwähnten Parameter λ, das Akzeptanzniveau, und setzt für jede Kante ij des Graphen G mit $c_{ij}^{co} > \lambda$ die Separationszahl d_{ij} auf 1, falls bisher noch keine Separationsbedingung bestanden hat. Das sorgt dafür, dass i und j verschiedene Kanäle zugeordnet werden müssen.

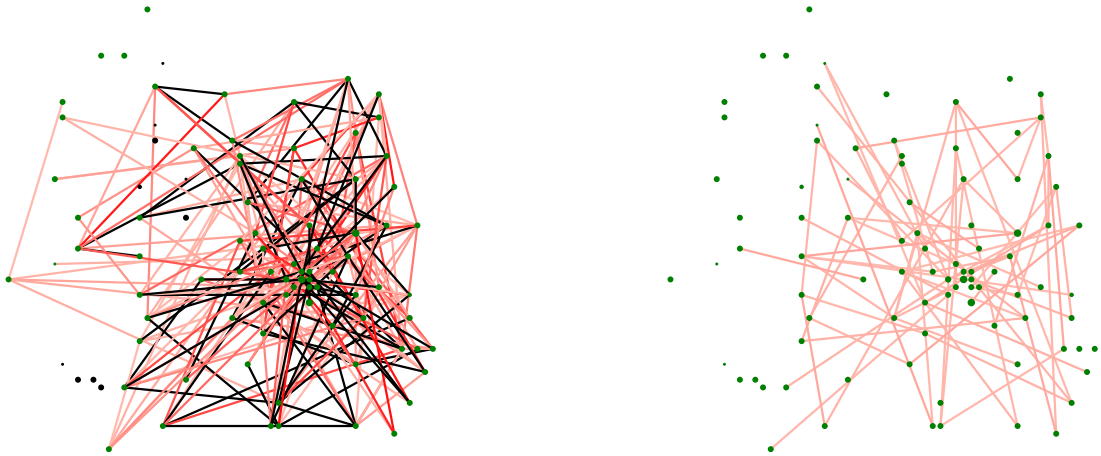
Das dargestellte Modell ist keineswegs die einzige Möglichkeit, das Frequenzplanungsproblem als 0/1- oder als ganzzahliges Programm darzustellen. Wir haben mit verschiedenen Modellen experimentiert und uns in unserem Projekt für die Untersuchung dieses Modells entschieden.

Zeitdruck

Bei der Lösung praktisch wichtiger Probleme wie dem Frequenzzuweisungsproblem steht man immer unter Zeitdruck. Der Partner will (verständlicherweise) rasch gute Lösungen sehen. Er baut das Netz auf und um, und er muss regelmäßig Frequenzen vergeben. In einem ersten „Anlauf“ haben wir daher eine Reihe von Heuristiken implementiert, von denen sich einige als sehr erfolgreich erwiesen haben. Durch schnelle Erzeugung guter Lösungen (Variationen des Greedy-Algorithmus), systematische Verbesserung (Verwendung verschiedener Austauschverfahren), stochastische Perturbationen und lokale Optimierung haben wir Algorithmen gefunden, die in kurzer Zeit Lösungen produzieren, die weit besser sind als sie bisher in der Praxis (basierend auf Färbungsalgorithmen und manueller Umplanung) verwendet wurden. Abb. 5 zeigt ein kleines reales Beispiel, wo unsere Lösung die Gesamtinterferenz um rund 96 % (also auf 4 % des ursprünglichen Wertes) reduziert hat. In Abb. 5 kennzeichnen Linien zwischen zwei Punkten Gleich- oder Nachbarkanalinterferenz des vorliegenden Frequenzplans zwischen den entsprechenden TRXs. Je blasser die Linie, desto geringer ist die Interferenz; (a) zeigt den ursprünglichen Frequenzplan, (b) unsere Verbesserung. Ein solches Ergebnis löst bei den Industriepartnern natürlich Begeisterung aus, speziell dann, wenn sich derartige Verbesserungen auch, wie in unserem Fall, in der Praxis verwirklichen lassen. E-Plus hat daher sehr schnell damit begonnen, die Frequenzplanung mit den von uns entwickelten Software-Werkzeugen durchzuführen.

Ergebnisse

Alle auf dem neuen Ansatz basierenden Heuristiken haben die alten Frequenzpläne deutlich verbessert. Wir konnten jedoch keine „beste Heuristik“ finden, so dass unser Programmpaket mehrere Verfahren enthält, die nacheinander ablaufen. Dieses Vorgehen hat auch andere Gründe. Frequenzplanung ist ein iterativer Prozess, der viel mehr technische Details umfasst, als wir hier darstellen können. Die Planer machen daher sehr häufig „Probeläufe“, um einige Varianten auszuprobieren und die Wirkung gewisser Festlegungen zu beurteilen. Sie möchten dann innerhalb weniger Minuten gute Antworten sehen. Es kommt also auch darauf an, gute Frequenzpläne schnell zu generieren. Erst in der letzten Phase der Planung werden aufwendige Verfahren „angeworfen“, die dann die endgültigen Frequenzzuweisungen berechnen. Die Algorithmen müssen verschiedene Zusatzanforderungen beachten. Die Änderung einer Frequenz einer TRX erfordert Aufwand. Es ist daher bei „kleinen Revisionen“ (wenn z.B. nur einige neue Antennen in Betrieb genommen werden) erwünscht, dass nur sehr wenige der bereits installierten TRXs umgestimmt werden. Man hat dann Nebenbedingungen der Art zu beachten, dass höchstens s der TRXs ihre Frequenz ändern dürfen. All das kann man sehr gut mit unserem Modell und den Heuristiken bewerkstelligen. Sie haben sich erfolgreich in der Praxis bewährt und tragen wesentlich zur Qualitätsverbesserung des Mobilfunks bei.



(a) vorher (b) nachher

Abb. 5: Frequenzpläne vor und nach der Optimierung

Wie gut sind die Ergebnisse?

Den Stand der Technik deutlich zu verbessern, ist sehr erfreulich. Als Mathematiker ist man aber damit allein nicht zufrieden. Wir möchten auch eine Qualitätsgarantie geben. In unserem Falle bedeutet das die Berechnung einer unteren Schranke für die Gesamtinterferenz, also eines Wertes, der durch keinen Frequenzplan unterschritten werden kann. Man wünscht sich, einen Interferenzwert I (durch eine Heuristik) und eine untere Schranke U berechnen zu können, so dass $p = 100 \cdot (I - U)/U$ ein kleiner Wert ist. p gibt also eine obere Schranke für die prozentuale Abweichung des gefundenen Wertes I vom wahren Optimum an.

Bei vielen kombinatorischen Optimierungsproblemen (wie zum Beispiel dem Travelling–Salesman–Problem) hat man derartige Verfahren gefunden, die in den meisten praktischen Instanzen exzellente Gütegarantien liefern.

In unserem Falle ist das nicht so. Wir hatten gehofft, durch die Formulierung des Frequenzzuweisungsproblems als lineares ganzzahliges Programm einen guten Ansatz gefunden zu haben. Die Standardmethode zur Bestimmung einer (ersten) unteren Schranke besteht dann darin, die Ganzzahligkeitsbedingungen wegzulassen. Für uns heisst dies, dass die Forderungen x_{if}, z_{ij}^{co}, $z_{ij}^{ad} \in \{0, 1\}$ ersetzt werden durch $0 \leq x_{if} \leq 1$, etc. Man löst dann das so entstehende lineare Programm, genannt zugehörige LP-Relaxierung, und hofft, dass der Zielfunktionswert der LP-Relaxierung nicht allzu weit vom Minimalwert des ganzzahligen Programms liegt. In Anwendungsfällen hat das nicht funktioniert. Die LP-Relaxierung lieferte in den meisten Problembeispielen aus der Praxis den Zielfunktionswert Null. Damit werden auch Versuche, Branch&Bound einzusetzen, sinnlos. Man kann nun Schnittebenentheorie oder „Umformulierungstricks“ einsetzen. Aber auch hier hat sich das FAP als sehr widerspenstig erwiesen.

Eigentlich ist das nicht sonderlich überraschend. Immerhin hat die Graphenfärbungstheorie nach über 100jähriger Geschichte auch noch keine praktisch auswertbaren, guten unteren Schranken für die Färbungszahl produziert. Warum sollte man dann für ein allgemeineres Problem bei den ersten Versuchen gleich etwas Besseres erwarten?

Wir haben in letzter Zeit mit anderen Ansätzen experimentiert. Man kann durch lokale kombinatorische Überlegungen (z.B. die Untersuchung großer Cliquen in G) untere Schranken, die von Null verschieden sind, produzieren. Am besten hat eine Relaxierung der Frequenzzuweisung in ein so genanntes semidefinites Programm funktioniert. Dadurch ergibt sich ein spezielles konvexes nichtlineares Optimierungsproblem, das man mit Innere-Punkt-Methoden und mit verallgemeinerten Subgradienten-Verfahren praktisch in einigermaßen akzeptabler Zeit lösen kann. Immerhin haben wir dadurch die untere Schranke von fast Null auf deutlich positive Werte anheben können. Die Gütegarantien, die sich daraus ergeben, sind jedoch immer noch sehr weit entfernt von dem, was wir uns eigentlich vorstellen. Unser praktischer Erfolg konnte also theoretisch nicht überzeugend untermauert werden.

Woran liegt das? Natürlich sind unsere Heuristiken noch verbesserungsfähig. Wir waren oft in der Lage,

die von unseren Standardheuristiken (oder Heuristiken anderer Forschungsgruppen) gefundenen Lösungen durch Ad-hoc-Methoden und großen Rechenaufwand zu verbessern. Dies deutet an, dass die (randomisierten) Austauschmechanismen in den Verbesserungsheuristiken gewisse strukturelle Eigenheiten (lokale Starrheiten) nicht erkennen und so aus lokalen Minima nicht mehr herausfinden. Die Gesamtinterferenz der in Abb. 5 (b) gezeigten heuristischen Lösung konnten wir z.B. durch „brutalen“ einwöchigen Rechenaufwand um weitere 50 % reduzieren. Die Verbesserungspotentiale bei großen Problemen sind vermutlich größer. Dennoch glauben wir, dass die Verbesserung der unteren Schranken wichtiger ist. Sie erscheinen uns zu „pessimistisch“, so dass wir kein realistisches Bild der „wahren Qualität“ eines Frequenzplanes erhalten. Hierzu ist intensive mathematische Forschung erforderlich. Es müssen bessere Relaxierungen des (in der Praxis nicht optimal lösbaren) ganzzahligen linearen Programms gefunden werden sowie Algorithmen, die diese Relaxierungen in akzeptabler Zeit optimal lösen. Erst danach kann man das hier vorgestellte Projekt aus mathematischer Sicht wirklich erfolgreich abschließen.

Weitergehende Informationen

Allgemeine Übersichten zur Technologie und Planung von GSM–Netzen sind u.a. [2, 6, 7]. Unser Projekt mit E-Plus ist detaillierter, mit mehr Formeln, alternativen Modellen, etc. in [4] beschrieben. Fast alle Details (mit Informationen zu den Algorithmen, den in der Praxis erzielten Gütegarantien und zum konkreten Einsatz der semidefiniten Programme) finden sich in [3]. Alternative Modelle, Methoden und weitere Projekte sind z.B. in [1, 5] dargestellt. Am ZIB ist ein Server zur Frequenzplanung (`http://fap.zib.de`) eingerichtet worden. Neben einer FAP-Bibliographie kann man hier insbesondere Daten von realen Frequenzplanungsproblemen finden und herunterladen. Wir sind den Firmen, die direkt oder indirekt dazu beigetragen haben, zu großem Dank verpflichtet. Üblicherweise werden Datensätze dieser Art geheim gehalten, um der Konkurrenz keinen „Einblick in das Geschäft“ zu geben. Hier haben Bell-Mobility, E-Plus, France Telecom, Siemens und Swisscom zur Unterstützung der Forschung auf diesem Gebiet Daten bereitgestellt, an denen man neue Ansätze zur Lösung von Frequenzplanungsproblemen testen kann.

Wenn man das GSM–Frequenzplanungsproblem aus praktischer Sicht mathematisch einigermaßen „im Griff“ hat, kann man mit diesen Methoden dann auch die Frequenzplanung bei der UMTS–Technologie, die in Kürze eingeführt wird, lösen? Weit gefehlt! Bei UMTS funktioniert alles ganz anders. Neue Technologien machen angewandte Mathematiker nicht arbeitslos. Im Gegenteil, sie bringen neue mathematische Herausforderungen mit sich.

Literatur

[1] K. I. Aardal, C. P. M. van Hoesel, A. M. C. A. Koster, C. Mannino und A. Sassano. Models and solution techniques for the frequency assignment problem. ZIB-Report 01–40, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 2001.

[2] Luis M. Correia, Hrg.. *Wireless Flexible Personalized Communications - COST 259: European Co-operation in Mobile Radio Research*. John Wiley & Sons Ltd., 2001. COST Action 259—Final Report.

[3] A. Eisenblätter. *Frequency Assignment in GSM Networks: Models, Heuristics, and Lower Bounds*. Cuvillier-Verlag, Göttingen, 2001.

[4] A. Eisenblätter, M. Grötschel und A. M. C. A. Koster. Frequency assignment and ramifications of coloring. ZIB-Report 00–47, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 2000. Erscheint in Kürze in Discussiones Mathematicae Graph Theory.

[5] A. M. C. A. Koster. *Frequency Assignment – Models and Algorithms*. PhD thesis, Universiteit Maastricht, 1999. Elektronisch erhältlich unter http://www.zib.de/koster/thesis.html.

[6] M. Mouly und M.-B. Pautet. *The GSM System for Mobile Communication*. Cell & Sys, France, 1992.

[7] S. M. Redl, M. K. Weber und M. W. Oliphant. *An Introduction to GSM*. Mobile Communication Series. Artech House Publishers, 1995.

Adressen der Autoren

Dr. Andreas Eisenblätter
Konrad–Zuse–Zentrum für Informationstechnik
Takustraße 7
14195 Berlin
`eisenblaetter@zib.de`

Prof. Dr. Martin Grötschel
Konrad–Zuse–Zentrum für Informationstechnik
Takustraße 7
14195 Berlin
`groetschel@zib.de`

Dr. Ir. Arie M. C. A. Koster
Konrad–Zuse–Zentrum für Informationstechnik
Takustraße 7
14195 Berlin
`koster@zib.de`