R U H R - U N I V E R S I T Ä T   B O C H U M

- Abteilung für Mathematik -

DIPLOMARBEIT

Der Satz von Frobenius für konvergente Potenzreihen

vorgelegt von: Martin Grötschel

5830 Schwelm
Nordstraße 6

Betreuer: Prof. Dr. H.-J. Reiffen

Abgabetag:

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

1. In der Literatur sind heute - bis auf geringe Unterschiede - drei Fassungen des Satzes von Frobenius bekannt. Die erste besagt, daß ein Differentialsystem auf einer reellen oder komplexen Mannigfaltigkeit genau dann vollständig integrierbar ist, wenn es involutiv ist. In der zweiten Formulierung wird festgestellt, daß ein Differentialsystem, das durch 1-Formen $\omega_1,\dots,\omega_r$ definiert ist, die in jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit linear unabhängig sind, genau dann vollständig integrierbar ist, wenn es zu jedem Punkt der Mannigfaltigkeit eine Umgebung gibt, auf der 1-Formen α_{ij} existieren mit

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{r} \omega_j \wedge \alpha_{ij} .$$

Die dritte Fassung schließlich ist ein typischer Existenzsatz der Differentialgleichungstheorie; sie gibt Bedingungen für die Existenz von Lösungen gewisser Differentialgleichungssysteme an. In [14] werden obige drei Fassungen des Satzes von Frobenius mathematisch exakter formuliert und bewiesen. Die dritte Form wird in [5] für offene Mengen in Banachräumen gezeigt. Ein anders gearteter Beweis der ersten Formulierung wird in [17] gegeben.

Meines Wissens ist der Satz von Frobenius - etwa der zweiten Fassung entsprechend - zum ersten Mal von E. Cartan [16] im Jahre 1937 bewiesen worden. Im Beweis dieses Satzes werden wesentlich Integrabilitätsbedingungen für Differentialgleichungen benutzt, die Frobenius [18] in seiner Arbeit "Über das Pfaffsche Problem" 1875 angegeben hat. Anscheinend hat Cartan deswegen seinem Satz den Namen "Satz von Frobenius" gegeben.

- IV -

Die algebraische Formulierung des Satzes von Frobenius in dieser Arbeit stammt von H.-J. Reiffen. Mir schien der Beweis einer lokalen Variante der zweiten Fassung (siehe [7]) am geeignetsten für eine Übertragung in die Algebra, was nicht heißen soll, daß der eingeschlagene Weg der kürzeste und eleganteste ist.

Die Frage, ob der Satz von Frobenius für analytische Stellenalgebren richtig ist oder welche die Teilmenge der analytischen Stellenalgebren ist, für die der Satz von Frobenius gilt, ist bisher noch ungelöst.

2. Die Arbeit ist so aufgebaut, daß man zu ihrem Verständnis nur elementare Kenntnisse aus der kommutativen Algebra benötigt. In den ersten beiden Paragraphen werden einige algebraische Aussagen zusammengestellt, auf die im Verlauf der Arbeit häufig zurückgegriffen wird. Der Paragraph drei gibt eine kurze Einführung in den Potenzreihenkalkül, während im vierten Paragraphen verschiedene wichtige Sätze aus der Bewertungstheorie teils zitiert, teils bewiesen werden.

   Die für diese Arbeit interessantesten algebraischen und topologischen Eigenschaften der konvergenten Potenzreihen über einem bewerteten Körper K behandelt der Paragraph fünf. Im sechsten Paragraphen werden Differentialgleichungssysteme betrachtet, die aus konvergenten Potenzreihen über K bestehen, und es wird ein für den Beweis des Satzes von Frobenius zentraler Existenz- und Eindeutigkeitssatz gezeigt. Der siebte Paragraph hat die Aufgabe, Rechentechniken der äußeren Algebra zur Verfügung zu stellen, die im Paragraphen acht auf Differentialmoduln angewendet werden. Die algebraische Fassung des Satzes von Frobenius wird dann im neunten Paragraphen bewiesen.

3. Um Mißverständnisse zu vermeiden, werden vorab alle Begriffe und Bezeichnungen aufgezählt, die in der vorliegenden Arbeit verwendet, aber nicht explizit eingeführt werden.

Ein Körper ist immer kommutativ und hat unendlich viele Elemente. Endliche Körper werden deshalb von den Betrachtungen ausgeschlossen, weil die Rekursionsformel im Existenz- und Eindeutigkeitssatz 6.1 für diese nicht sinnvoll interpretierbar ist. Ringe sind immer kommutativ und besitzen ein Einselement. Die Bezeichnung Modul steht nur für unitäre Moduln über kommutativen Ringen R mit Eins. Eine Teilmenge E eines R-Moduls M heißt Erzeugendensystem von M, wenn sich jedes Element von M als endliche Linearkombination von Elementen aus E darstellen läßt. Gibt es eine endliche Teilmenge von M mit dieser Eigenschaft, so heißt M endlich (erzeugt). Im allgemeinen werden in dieser Arbeit nur endlich erzeugte Moduln betrachtet. $M = R(x_1,\dots,x_m)$ bedeutet, M wird von $x_1,\dots,x_m \in M$ als Modul über einem Ring R erzeugt.

Der Rang eines Moduls M(rgM) ist die Maximalzahl linear unabhängiger Elemente von M. Der Corang von M(cgM) ist die kleinste natürliche Zahl s derart, daß es ein Erzeugendensystem von M mit s Elementen gibt. Ein Erzeugendensystem von M mit cgM Elementen heißt minimal. Ein Ring, der gleichzeitig Modul über einem anderen Ring R ist, heißt R-Algebra. Der Polynomring in n Veränderlichen über einem Körper K wird mit $K[X_1,\dots,X_n]$ oder kurz $K[X]$ bezeichnet. Das Wort Homomorphismus wird immer dann benutzt, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, ob es sich um einen Ring-, Modul- oder Algebrahomomorphismus handelt. Anstelle von R-Modulhomomorphismus wird manchmal auch R-lineare Abbildung oder R-Homomorphismus geschrieben. Wenn bekannt ist, um welche algebraischen Objekte es sich bei A und B handelt, bezeichnet Hom(A,B) die Menge aller Homomorphismen zwischen diesen. Ein Ring R heißt Stellenring oder lokaler Ring, wenn er genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}(R)$ besitzt. Der Körper $R/_{\mathfrak{m}(R)}$ heißt Restklassenkörper des Stellenrings R.

Ist K ein Körper und R ein Stellenring, dann heißt R K-Stellenalgebra, wenn R eine K-Algebra und der natürliche Homomorphismus $K \to R/_{\mathfrak{m}(R)}$ ein Isomorphismus ist.

Martin Grötschel

§ 1 Freie Moduln, Determinanten

Der erste Paragraph dieser Arbeit beschäftigt sich mit sehr einfachen und elementaren Begriffen der kommutativen Algebra. Sie werden deshalb erwähnt, weil ihre Kenntnis Voraussetzung für das Verstehen späterer Abschnitte ist und weil einige Sätze als wichtige Hilfsmittel bei Beweisen benötigt werden. R bezeichne in diesem Paragraphen einen kommutativen Ring mit 1.

1. Freie Moduln

Definition 1.1

i) Sei M ein R-Modul, dann heißt $B \subset M$ Basis von M, wenn sich jedes Element $x \in M$ eindeutig als endliche Linearkombination

$$x = \sum_{x_i \in B} a_i x_i, \quad a_i \in R, \qquad \text{darstellen läßt.}$$

ii) M heißt freier R-Modul, wenn M eine Basis besitzt.

Ist M ein R-Modul, so ist $B \subset M$ genau dann eine Basis von M, wenn B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem darstellt.

Satz 1.1

Sei M ein freier R-Modul, $\{x_1,\dots,x_n\}$ eine Basis von M. Sei N ein weiterer R-Modul und $\{y_1,\dots,y_n\}$ eine beliebige Teilmenge von N. Dann wird durch $x_i \to y_i$, $i = 1,\dots,n$, ein eindeutig bestimmter R-Modulhomomorphismus $f: M \to N$ definiert.

Beweis:

Sei $x \in M$ und $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $a_i \in R$. $f(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ ist trivialerweise ein R-Modulhom. mit $f(x_i) = y_i$, $i = 1,\dots,n$. Sei g ein weiterer Homomorphismus mit $g(x_i) = y_i$, dann gilt für alle $x \in M$ $g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) = f(x)$

Also ist f eindeutig bestimmt. .-

Folgerung 1.2

Ist $\{y_1,\dots,y_n\}$ eine Basis von N, so gibt es umgekehrt einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $g: N \to M : g(y_i) = x_i$. Es gilt dann $g \circ f = id_M$, $f \circ g = id_N$, d. h. f und g sind Isomorphismen. Also sind freie (endliche) Moduln mit Basen gleicher Mächtigkeit isomorph.

Definition 1.2

Unter einer (n,m) - Matrix über R verstehen wir eine doppelt indizierte Familie von Elementen des Ringes R, (a_{ij}) , $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$, und schreiben dafür

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Mit den bekannten Additions- und Multiplikationsregeln bilden die (n,n)-Matrizen einen Ring mit Einselement und einen R-Modul. Das Einselement ist die Matrix $E_n := (\delta_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$.

Bemerkung 1.3

Sind M,N freie R-Moduln und $\{x_1,\dots,x_n\}$, $\{y_1,\dots,y_m\}$ fest gewählte Basen von M bzw. N, so ist jedem R-Modulhomomorphismus $f : M \to N$ eine eindeutig bestimmte (n,m)-Matrix zugeordnet. Ist umgekehrt A eine (n,m)-Matrix , so ist durch sie bezüglich der Basen $\{x_1,\dots,x_n\}$, $\{y_1,\dots,y_m\}$ ein eindeutig bestimmter Homomorphismus gegeben.

Beweis: Trivial.

Bemerkung 1.4

Bei der Einführung des Tensorproduktes benötigen wir die universelle Charakterisierung freier R-Moduln. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [11] . Wir geben eine kurze Zusammenfassung:

Sei S eine beliebige Menge, R ein kommutativer Ring mit 1. Dann heißt (F,j) <u>freier R-Modul über S</u>, wenn gilt:

(F.1) F ist R-Modul.

(F.2) $j\colon S \to F$ ist eine Abbildung.

(F.3) Ist G ein beliebiger R-Modul, $f\colon S \to G$ eine beliebige Abbildung, dann existiert genau ein R-Modulhomomorphismus $h\colon F \to G$ mit $f = h \circ j$, d. h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, dashed, "h"] \\ & G \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Es gelten folgende Sätze:

a) Zu jeder Menge S gibt es einen freien R-Modul (F,j), und dieser ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

b) Die Abbildung $j\colon S \to F$ ist injektiv, und F wird von $j(S)$ erzeugt.

c) F ist frei genau dann, wenn F eine Basis besitzt.

c) besagt gerade, daß die universelle Charakterisierung und unsere Einführung äquivalent sind.

2. Determinanten

Definition 1.2

Seien M_i, $i = 1,\dots,p$, und G R-Moduln. Eine Abbildung $f\colon \prod_{i=1}^{p} M_i \to G$ heißt <u>p-linear</u> (bezüglich R), wenn gilt

$$f(x_1,\dots, ax_i + x_i',\dots,x_p) = af(x_1,\dots,x_i,\dots,x_p) + f(x_1,\dots,x_i',\dots,x_p)$$

für alle $x_i, x_i' \in M_i$, $i = 1,\dots,p$, und für alle $a \in R$. Wollen wir p nicht spezifizieren, so nennen wir f <u>multilinear</u>. Eine p-lineare Abbildung in den Ring R heißt p-Linearform.

Es ist also f p-linear, wenn f R-linear in jeder Komponente ist.

Definition 1.3

Seien M und G R-Moduln. Eine p-lineare Abbildung $f: M^p \to G$ heißt alternierend, falls $f(x_1,\ldots,x_p) = 0$, wenn zwei der Elemente $x_1,\ldots,x_p \in M$ gleich sind.

$A^p(M)$ sei die Menge aller alternierenden p-Linearformen.
$A^p(M,G)$ sei die Menge aller alternierenden p-linearen Abbildungen von M^p in G.

In natürlicher Weise sind $A^p(M)$ und $A^p(M,G)$ R-Moduln.

Satz 1.5

Ist $f \in A^p(M)$, so gilt

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_k,\ldots,x_p) = -f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_i,\ldots,x_p) .$$

Beweis:

Die Behauptung folgt aus:

$$\begin{aligned} o &= f(x_1,\ldots,x_i + x_k,\ldots,x_i + x_k,\ldots,x_p) \\ &= f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_k,\ldots,x_p) + f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_i,\ldots,x_p). \end{aligned}$$
-

Satz 1.6

Ist M ein freier R-Modul mit der Basis $\{x_1,\ldots,x_n\}$, dann gilt

$$A^p(M) = 0 \quad \text{für} \quad p > n .$$

Beweis:

Sei $f \in A^p(M)$, dann ist

$$\begin{aligned} f(y_1,\ldots,y_p) &= f\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1}\, x_{i_1},\ldots,\sum_{i_p=1}^{n} a_{pi_p}\, x_{i_p}\Big) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} a_{1i_1} \cdots a_{pi_p}\, f(x_{i_1},\ldots,x_{i_p}) \\ &= 0 , \end{aligned}$$

da bei allen Tupeln $(x_{i_1},\ldots,x_{i_p})$ wegen $p > n$ mindestens für zwei Indizes $i_j, i_k, i_j \neq i_k$, $x_{i_j} = x_{i_k}$ gelten muß. -

Satz 1.7

Sei M ein freier R-Modul mit endlicher Basis $B := \{x_1,\ldots,x_n\}$, dann gilt:

(i) Es gibt genau eine alternierende p-Linearform $\det: M^n \to R$ mit $\det(x_1,\ldots,x_n) = 1$.

(ii) Ist $g \in A^n(M)$, so gilt $g = c \cdot \det$ mit $c = g(x_1,\ldots,x_n) \in R$.

(iii) $A^n(M) = \{c \cdot \det, c \in R\}$ ist ein freier R-Modul mit $\{\det\}$ als Basis ; det heißt die Determinante auf M.

Beweis:

(iii) folgt sofort aus (ii) und (i) .

Die Existenzaussage von (i) beweisen wir durch vollständige Induktion über n.

Für $n = 1$, d. h. $M = \{ax, a \in R\}$ stellt $\det: M \to R$ mit $ax \to a$ eine (alternierende) R-Linearform mit $\det(x) = 1$ dar.

Wir nehmen nun an, daß für jeden freien R-Modul mit einer Basis $\{y_1,\ldots,y_{n-1}\}$ eine alternierende $(n-1)$-Linearform D mit $D(y_1,\ldots,y_{n-1}) = 1$ existiert. Für den freien R-Modul M mit der Basis $\{x_1,\ldots,x_n\}$ suchen wir eine Abbildung mit den Eigenschaften von (i).

Sei M_i der Modul, der von $\{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\}$ aufgespannt wird.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine $(n-1)$-Linearform

$$D_i : M_i \to R \quad \text{mit} \quad D_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = 1 .$$

Sei $p_i : M \to M_i$ gegeben durch $p_i\left(\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} r_k x_k$

und

$$q_i : M \to R \quad \text{gegeben durch} \quad q_i\left(\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right) = r_i .$$

Für $(y_1,\ldots,y_n) \in M^n$ definieren wir

$$\det(y_1,\ldots,y_n) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} D_i(p_i(y_1),\ldots,p_i(y_{k-1}), p_i(y_{k+1}),\ldots,p_i(y_n)) \cdot q_i(y_k) .$$

Durch einfaches Ausrechnen sieht man, daß det n-linear und alternierend ist.

Weiter gilt:

$$\det(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} D_i(\dots)\, q_i(x_k)$$

$$= D_i(x_1,\dots,x_{i-1}, x_{i+1},\dots,x_n) = 1$$

Ist D ein weiteres Element von $A^n(M)$ mit den Eigenschaften von (i), so gilt aufgrund der n-Linearität:

$$(*)\quad D(y_1,\dots,y_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} D(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$$

$$= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi \; a_{1\,\pi(1)} \cdots a_{n\,\pi(n)}\, D(x_1,\dots,x_n)$$

Aus $D(x_1,\dots,x_n) = 1 = \det(x_1,\dots,x_n)$ folgt mit Hilfe von (*) $D = \det$. Aus (*) ergibt sich für $g \in A^n(M)$ weiterhin $g = c \cdot \det$ mit $c = g(x_1,\dots,x_n)$, und damit ist auch (ii) bewiesen. .-

<u>Folgerung 1.8</u>

Ist M ein freier R-Modul mit endlicher Basis, dann haben alle Basen die gleiche Anzahl von Elementen.

<u>Beweis:</u>

Ist $\{x_1,\dots,x_n\}$ eine Basis von M, so ist nach Satz 1.6 $A^p(M) = 0$ für $p > n$. Angenommen es gibt eine Basis mit m Elementen $m \neq n$. Ist $m > n$, so wäre einerseits $A^m(M) = \{c \cdot \det, c\in R\}$ andererseits $A^m(M) = 0$, Widerspruch. Dasselbe ergibt sich für $m < n$. Also ist n charakteristisch für den Modul M. Die Möglichkeit einer unendlichen Basis ist trivialerweise nicht gegeben. .-

Damit ist es sinnvoll, folgende Definition zu treffen:

<u>Definition 1.4</u>

Ist M ein freier R-Modul mit einer Basis $\{x_1,\dots,x_n\}$, dann heißt

$$\underline{\dim M} := n$$

die <u>Dimension</u> von M.

Für einen freien (endlichen) R-Modul M gilt damit:

$$\dim M = \mathrm{cg}M = \mathrm{rg}M.$$

Im weiteren wollen wir die somit äquivalenten Sprechweisen "M besitzt die Dimension n" und "M ist frei vom Range n", benutzen.

3. Invertierbarkeitskriterien

Wie wir in 1.3 bemerkt haben, kann jedem Homomorphismus $f: M \to M'$, M, M' freie R-Moduln, in eineindeutiger Weise bei fester Wahl zweier Basen eine (n,m)-Matrix zugeordnet werden. Sind M und M' von derselben Dimension n und ist A die bezüglich zweier Basen zu dem Homomorphismus $f: M \to M'$ gehörige Matrix, so definieren wir

$$\det A := \det(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \; a_{1\,\pi(1)} \cdots a_{n\,\pi(n)} \in R .$$

Wir nennen $\det A$ die Determinante der Matrix A. Über $\det A$ kann man dann die Determinante des Homomorphismus f definieren, was uns aber nicht weiter interessieren soll.

Ist B eine weitere (n,n)-Matrix, so gilt

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$$

Für die Einheitsmatrix E_n erhalten wir $\det E_n = 1$.

Nützlich ist die Möglichkeit der Berechnung der oben definierten Determinante einer Matrix nach dem bekannten Laplaceschen Entwicklungssatz. Für die Anwendung besonders wichtig ist der folgende

Satz 1.9

Seien M, M' freie R-Moduln der Dimension n, und seien B, B' Basen von M bzw. M'. Sei $f: M \to M'$ ein R-Modulhomomorphismus und A die bezüglich B,B' zu f gehörige Matrix. Dann sind äquivalent:

i) f ist bijektiv.

ii) A ist invertierbar.

iii) det A ist invertierbar.

iv) det A ist eine Einheit in R.

Wir geben ein weiteres häufig benutztes Kriterium zur Entscheidung, ob ein Homomorphismus invertierbar ist oder nicht, an.

Satz 1.10

Seien M,M' freie R-Moduln der Dimension n und seien $B:=\{x_1,\ldots,x_n\}$, B' Basen von M bzw. M'. Sei $f: M \to M'$ ein R-Modulhomomorphismus und sei $y_i := f(x_i)$, $i = 1,\ldots,n$. Dann sind äquivalent:

i) f ist bijektiv.

ii) $\{y_1,\ldots,y_n\}$ ist Basis von M'.

Die Beweise von Satz 1.9 und 1.10 sind einfach, aber etwas länglich und werden deshalb ebenso wie eine sorgfältige Einführung der Determinante einer Matrix nicht angegeben.

Von der Richtigkeit obiger Bemerkungen kann man sich in [10] und [13] überzeugen.

§ 2 Endliche Moduln über noetherschen Stellenringen

Um solides Handwerkszeug für spätere Abschnitte zur Verfügung zu haben, erinnern wir in diesem Paragraphen an einige bekannte Tatsachen der Modultheorie und der Theorie der Stellenringe. R bezeichne im folgenden einen noetherschen Stellenring, $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}(R)$ sein maximales Ideal und $K := {}^{R}/_{\mathfrak{m}}$ den Restklassenkörper von R. Weiterhin betrachten wir nur endliche Moduln über R; diese sind mit R bekanntlich ebenfalls noethersch. Die Ergebnisse dieses Paragraphen sind nicht in größtmöglicher Allgemeinheit formuliert - das Nakayama Lemma gilt z. B. in entsprechender Fassung für beliebige kommutative Ringe - sondern so speziell, daß bei späteren Anwendungen direkt Bezug genommen werden kann.

1. Folgerungen aus dem Nakayama-Lemma

Harmlos ausschauend, doch grundlegend für die Theorie der endlichen R-Moduln ist der folgende

Satz 2.1 (Nakayama-Lemma)

Für jeden endlichen R-Modul M mit $M \subset \mathfrak{m}M$ gilt: $M = 0$.

Beweis:

Angenommen $M \neq 0$. Sei $s = cgM$ und $\{x_1, \ldots, x_s\}$ ein minimales Erzeugendensystem von M. Aus $M \subset \mathfrak{m}M$ folgt $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i x_i$, $a_i \in \mathfrak{m}$, $i = 1, \ldots, s$. Daraus ergibt sich $(1-a_1)\, x_1 = \sum\limits_{i=2}^{s} a_i x_i$. Da $a_1 \in \mathfrak{m}$, ist $(1-a_1)$ eine Einheit in R, also $(1-a_1) \notin \mathfrak{m}$. Das aber impliziert, M wird bereits von $x_2, \ldots, x_s$ erzeugt. Widerspruch zur Minimalität! .-

Folgerung 2.2

Es seien N und N' Untermoduln des R-Moduls M. Es sei $N' \subset N + \mathfrak{m}N'$, und N' sei endlich erzeugt, dann gilt: $N' \subset N$.

Beweis:

Für $N'' := N \cap N'$ gilt $N'' \subset N'$ und $N' = N'' + \mathfrak{m}N'$.

Zu zeigen: $N'' = N'$.

Der Restklassenepimorphismus $N' \to N'/N''$ bildet $\mathfrak{m}N'$ auf N'/N'' ab.

Es gilt also $N'/N'' = \mathfrak{m}\,N'/N''$. Mit N' ist auch N'/N'' endlich erzeugt, aus dem Nakayama-Lemma folgt dann $N'/N'' = 0$, d. h. $N' = N''$. .-

Bezeichnung 2.1

Sei L ein beliebiger Körper, V ein L-Vektorraum, dann soll mit $\dim_L V$ die Vektorraumdimension von V über L bezeichnet werden.

Bemerkung 2.3

Ist M ein R-Modul, so ist in natürlicher Weise $M/\mathfrak{m}M$ ein $K = R/\mathfrak{m}$-Vektorraum. Den natürlichen Epimorphismus $M \to M/\mathfrak{m}M$ bezeichnen wir im weiteren mit π .

Satz 2.4

$x_1,\dots,x_n \in M$ erzeugen den R-Modul M genau dann, wenn $\pi(x_1),\dots, \pi(x_n)$ den K-Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " trivial

" $\Leftarrow$ " Sei $\pi(x_1),\dots, \pi(x_n)$ ein Erzeugendensystem von $M/\mathfrak{m}M$. $N := Rx_1 + \dots + Rx_n$ ist ein R-Untermodul von M. Zu jedem $x \in M$ gibt es Elemente $c_1,\dots,c_n \in K$ mit $\pi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \pi(x_i)$. Es folgt $x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \in \operatorname{Kern}\pi = \mathfrak{m}M$, d. h. $M = N + \mathfrak{m}M$. Mit Hilfe der Folgerung 2.2 aus dem Nakayama-Lemma ergibt sich: $M = N$ . .-

Aus der Eigenschaft von Vektorräumen, eine eindeutig bestimmte Anzahl von Basiselementen zu besitzen, können wir nun sogar schließen, daß sich aus jedem Erzeugendensystem von M ein minimales auswählen läßt.

Folgerung 2.5 (Auswahllemma)

Erzeugen $x_1,...,x_n$ den R-Modul M, so wird M bereits von cgM der Elemente $x_1,...,x_n$ erzeugt. Speziell gilt

$$cgM = \dim_K {}^{M}/_{\mathfrak{m}M} .$$

Folgerung 2.6

Ein R-Modulhomomorphismus $\varphi: M \to N$ ist genau dann surjektiv, wenn der induzierte K-Vektorraumhomomorphismus $\overline{\varphi}: {}^{M}/_{\mathfrak{m}M} \to {}^{N}/_{\mathfrak{m}N}$ surjektiv ist.

Bemerkung 2.7

Seien M,N freie R-Moduln und sei der R-Epimorphismus $\varphi: M \to N$ bezüglich fest gewählter Basen durch $G := (g_{ij})_{\substack{i=1,...,r \\ j=1,...,n}}$ gegeben, so wird $\overline{\varphi}: {}^{M}/_{\mathfrak{m}M} \to {}^{N}/_{\mathfrak{m}N}$ durch $\overline{G} := (\overline{g}_{ij})_{\substack{i=1,...,r \\ j=1,...,n}}$ bezüglich der zugehörigen K-Vektorraumbasen beschrieben, wobei $\overline{g}_{ij} := g_{ij} \bmod \mathfrak{m}$. Ist $r \leq n$ und hat $\overline{G}$ den Rang r, das ist $\dim_K$ Bild φ, so besitzt $\overline{G}$ eine invertierbare (r,r)-Untermatrix $\overline{C}$. Damit hat auch G eine invertierbare (r,r)-Untermatrix C, wie man mit den Sätzen 1.9, 1.10 und obigen Folgerungen sofort sieht.

Satz 2.8

Seien M,M' endliche R-Moduln mit minimalen Erzeugendensystemen $\{x_1,...,x_n\}$, $\{y_1,...,y_m\}$, dann ist $\{x_1,...,x_n,y_1,...,y_m\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $M \oplus M'$, insbesondere folgt

$$cg(M \oplus M') = cgM + cgM' .$$

Beweis:

$\{x_1,...,x_n,y_1,...,y_m\}$ ist trivialerweise ein Erzeugendensystem von $M \oplus M'$. Die Minimalität folgt aus der Isomorphie der (n+m)-dimensionalen K-Vektorräume ${}^{M \oplus M'}/_{\mathfrak{m}M \oplus M'} \cong {}^{M}/_{\mathfrak{m}M} \oplus {}^{M'}/_{\mathfrak{m}M'}$ zusammen mit Folgerung 2.5. .-

Satz 2.9

(i) Ist M endlicher R-Modul und M' freier R-Modul und gilt $cgM = cgM'$, so ist jeder Epimorphismus $f: M \to M'$ bijektiv.

(ii) Jedes minimale Erzeugendensystem $\{x_1,\ldots,x_n\}$ eines freien endlichen R-Moduls M ist eine Basis von M.

(iii) Jeder direkte Summand M' eines freien endlichen R-Moduls M ist frei.

Beweis:

(i) Sei $\{y_1,\ldots,y_m\}$ eine Basis von M'. Da f surjektiv ist, gibt es $z_1,\ldots,z_m \in M$ mit $f(z_i) = y_i$. $y_i \to z_i$, $i = 1,\ldots,m$, ist nach Satz 1.1 ein wohldefinierter Homomorphismus $g : M' \to M$ mit $f \circ g = id_{M'}$; also ist g injektiv. Zusammen mit der Surjektivität von f ergibt das:
$M = \text{Kern } f \oplus g(M')$.

Nach Satz 2.8 ist $cgM = cgM' + cg \text{ Kern } f$. Aus $cgM = cgM'$ erhalten wir $cg \text{ Kern } f = 0$ und damit $\text{Kern } f = 0$. Das bedeutet, f ist bijektiv.

(ii) Durch $(a_1,\ldots,a_n) \to \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ wird ein Epimorphismus $f : R^n \to M$ definiert. Da M frei ist und $cgM = cgR^n$, ist f nach (i) bijektiv. Nach Satz 1.10 ist $\{x_1,\ldots,x_n\}$ eine Basis von M.

(iii) Sei $M = M' \oplus M''$, $\{x_1,\ldots,x_n\}$ bzw. $\{y_1,\ldots,y_m\}$ seien minimale Erzeugendensysteme von M' bzw. M''. Nach Satz 2.8 ist $\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\}$ minimales Erzeugendensystem von M, nach (ii) also eine Basis von M. Das bedeutet: die $x_1,\ldots,x_n$ sind linear unabhängig, mithin eine Basis von M'.
.-

Aus den Sätzen 2.8 und 2.9 ergibt sich

Folgerung 2.10

Für freie Moduln M,M' mit Basen $\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\{y_1,\ldots,y_m\}$ ist $\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\}$ eine Basis von $M \oplus M'$, und es gilt

$$\dim M \oplus M' = \dim M + \dim M'.$$

2. Der Krullsche Durchschnittssatz

Ein weiterer grundlegender Satz, der einige wichtige Folgerungen zuläßt, soll nun bewiesen werden.

Satz 2.11

Sei M ein R-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul; $\mathfrak{a} \subset R$ sei ein Ideal mit der Eigenschaft, daß zu jedem Element $a \in \mathfrak{a}$ ein Exponent $n(a) \geq 1$ mit $a^{n(a)} M \subset N$ existiert. Dann gibt es einen Exponenten $n \geq 1$ mit

$$\mathfrak{a}^n M \subset N .$$

Beweis:

Sei $a_1, \ldots, a_e$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$ und $n := \sum_{i=1}^{e} n(a_i)$, dann wird bekanntlich $\mathfrak{a}^n$ von den Monomen $a_1^{k_1} \ldots a_e^{k_e}$ mit $\sum_{i=1}^{e} k_i = n$ erzeugt. Zu jedem solchen Monom gibt es einen Index s, $1 \leq s \leq e$, mit $k_s \geq n(a_s)$. Daher folgt $a_1^{k_1} \ldots a_e^{k_e} \cdot M \subset R\, a_s^{n(a_s)} M \subset N$ für alle diese Monome, und das heißt $\mathfrak{a}^n M \subset N$.

Satz 2.12 (Krullscher Durchschnittssatz)

Für jeden Untermodul N eines endlichen R-Moduls M gilt:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (N + \mathfrak{m}^k M) = N .$$

Beweis:

a) Sei zunächst $N = 0$. Wir setzen $D := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^k M$ und müssen $D = 0$ beweisen. Die Menge aller R-Untermoduln L von M mit $L \cap D = \mathfrak{m} D$ enthält $\mathfrak{m} D$ und hat folglich, da M noethersch ist, ein maximales Element T. Es genügt zu zeigen: Zu jedem $g \in \mathfrak{m}$ gibt es einen Exponenten $e \geq 1$ mit $g^e M \subset T$, denn dann gibt es, da $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist, nach Satz 2.11 einen Exponenten $n \geq 1$ mit $\mathfrak{m}^n M \subset T$. Daraus folgt - wegen $D \subset \mathfrak{m}^n M$ - zunächst $D \subset T$, dann $D = D \cap T = \mathfrak{m} D$ und hieraus, da D endlich ist, mit Hilfe des Nakayama-Lemmas $D = 0$.

Bei fest gewähltem $g \in \mathfrak{m}$ betrachten wir die Untermodulfolge

$$M_j := \{x \in M\colon g^j x \in T\}\ ,\ j = 1,2,\dots\ .$$

Es gilt $M_1 \subset M_2 \subset \dots$. Da M noethersch ist, existiert ein Index $e \geq 1$ mit $M_e = M_{e+1}$. Sei $x \in (Mg^e + T) \cap D$, etwa $x = g^e y + t$ mit $y \in M$, $t \in T$. Dann gilt wegen $\mathfrak{m} D \subset T$

$$g^{e+1} y = gx - gt \in gD + T \subset \mathfrak{m} D + T = T\ .$$

Nach Definition von M_j bedeutet das: $y \in M_{e+1} = M_e$, daraus folgt $g^e y \in T$ und damit $x \in T + T = T$. Es ergibt sich

$$(Mg^e + T) \cap D \subset T \quad \text{und somit} \quad (Mg^e + T) \cap D \subset T \cap D = \mathfrak{m} D\ .$$

Da $T \subset Mg^e + T$ und da T maximal in der Menge aller Untermoduln L von M mit $L \cap D = \mathfrak{m} D$ ist, folgt $Mg^e + T = T$, d. h. $Mg^e \subset T$.

b) Sei nun N ein beliebiger Untermodul von M, $p : M \to M/N$ der natürliche Epimorphismus, dann gilt

$$N + \mathfrak{m}^k M = p^{-1}\left(\mathfrak{m}^k M/N\right) \quad \text{für jedes} \quad k \geq 1\ .$$

Es ist $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} p^{-1}\left(\mathfrak{m}^k M/N\right) = p^{-1}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^k M/N\right)$, und aufgrund von a)

gilt $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^k M/N = 0$, also folgt $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (N + \mathfrak{m}^k M) = p^{-1}(\{0\}) = N$.

.-

<u>Definition 2.2</u>

Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ zwischen Stellenringen R,S heißt <u>lokal</u>, wenn $f(\mathfrak{m}(R)) \subset \mathfrak{m}(S)$.

Für lokale Homomorphismen f gilt automatisch $f(\mathfrak{m}(R)^k) \subset \mathfrak{m}(S)^k$ für alle $k \geq 1$.

<u>Satz 2.13</u>

Sind R und S zwei K-Stellenalgebren, so ist jeder K-Algebrahomomorphismus $f\colon R \to S$ lokal.

Beweis:

Sei $x \in \mathfrak{m}(R)$ und $f(x) = c + y \in K + \mathfrak{m}(S) = S$. Zu zeigen: $c = 0$. Angenommen $c \neq 0$, daraus folgt $x - c$ ist eine Einheit in R, also $f(x-c)$ eine Einheit in S, da f K-Algebrahom.; das aber bedeutet $f(x-c) \notin \mathfrak{m}(S)$. Weiterhin gilt, weil f K-Algebrahom. ist, $f(x-c) = f(x) - c = y \in \mathfrak{m}(S)$. Widerspruch! .-

Bemerkung 2.14

Ist R eine K-Stellenalgebra und $y_1,\ldots,y_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}(R)$, so gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$R = \sum_{\overline{j_1+\ldots+j_n = 0}}^{i} K y_1^{j_1} \ldots y_n^{j_n} + \mathfrak{m}(R)^{i+1}$$

Das heißt, zu jedem $a \in R$ gibt es bei vorgegebenem $i \geq 0$ ein Polynom i-ten Grades $p_i \in K[y_1,\ldots,y_n]$ mit $a - p_i \in \mathfrak{m}(R)^{i+1}$.

Damit können wir eine wichtige Folgerung aus dem Durchschnittssatz ziehen, die besagt, daß K-Algebrahomomorphismen zwischen noetherschen K-Stellenalgebren bereits auf einem Erzeugendensystem des maximalen Ideals eindeutig bestimmt sind.

Satz 2.15

Es seien R und S zwei noethersche K-Stellenalgebren. $\{y_1,\ldots,y_n\}$ sei ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}(R)$. Sind $f_i: R \to S$, $i = 1,2$, zwei K-Algebrahomomorphismen mit $f_1(y_j) = f_2(y_j)$, $j = 1,\ldots,n$, dann gilt bereits

$$f_1 = f_2 .$$

Beweis:

Sei $a \in R$ beliebig, nach Bemerkung 2.14 gibt es ein Polynom $p_i \in K[y_1,\ldots,y_n]$ mit $a - p_i \in \mathfrak{m}(R)^{i+1}$ zu jedem vorgegebenen $i \geq 0$. Aufgrund von Satz 2.13 sind f_1 und f_2 lokal, damit folgt

$$f_1(a-p_i) \in \mathfrak{m}(S)^{i+1} , \quad f_2(a-p_i) \in \mathfrak{m}(S)^{i+1} .$$

Nun stimmen wegen $f_1(y_j) = f_2(y_j)$, $j = 1,\ldots,n$, die Homomorphismen f_1 und f_2 sicherlich auf dem Polynomring $K[y_1,\ldots,y_n]$ überein.

Daher gilt $f_1(p_i) = f_2(p_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und somit

$$f_1(a) - f_2(a) \in \mathfrak{m}(S)^{i+1} .$$

S ist noethersch, damit folgern wir aus dem Durchschnittssatz $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}(S)^{i+1} = 0$; also ist $f_1(a) = f_2(a)$, d. h. $f_1 = f_2$ . .-

§ 3 Formale Potenzreihen

Mit diesem Paragraphen beginnen wir, uns mit den "eigentlichen" Objekten dieser Arbeit, den Potenzreihen, zu beschäftigen, und stellen einige wissenswerte Eigenschaften von formalen Potenzreihen zusammen, um später einen vernünftigen Begriffsapparat zur Hand zu haben. Einschränkend wollen wir nur Potenzreihen über einem Körper K der Charakteristik Null betrachten, obschon einige Sätze auch für Potenzreihen über einem beliebigen Ring richtig sind. Wir setzen den Begriff der formalen Potenzreihe als bekannt voraus (siehe [6]). Die Symbole $X_1,\dots,X_n$ bezeichnen Unbestimmte; manchmal schreiben wir abkürzend nur X für $(X_1,\dots,X_n)$ oder $X_1\dots X_n$, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, was gemeint ist.

1. Elementare Begriffe

Ist $F := K[\![X_1,\dots,X_n]\!] = K[\![X]\!]$ die Gesamtheit aller formalen Potenzreihen in den Unbestimmten $X_1,\dots,X_n$ mit Koeffizienten in K, so ist jedes $f \in F$ eindeutig in folgender Form darstellbar:

$$f = \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1\dots k_n} X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n} .$$

In Kurzform wollen wir dafür auch schreiben $f = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k X^k$.

Jedes $f \in F$ ist eindeutig nach homogenen Polynomen entwickelbar, d. h.

$$f = \sum_{j=o}^{\infty} p_j \quad \text{mit} \quad p_j = \sum_{k_1+\dots+k_n=j} a_{k_1\dots k_n} X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n} .$$

Sind $f = \sum_{j=o}^{\infty} p_j$, $g = \sum_{j=o}^{\infty} q_j$, so wird F durch die Definitionen

$$f + g := \sum_{j=o}^{\infty} (p_j+q_j) ,$$

$$a \cdot f := \sum_{j=o}^{\infty} (ap_j) , \qquad a \in K ,$$

$$f \cdot g := \sum_{j=o}^{\infty} \Big(\sum_{l+m=j} p_l q_m\Big)$$

zu einer kommutativen K-Algebra.

Ist π eine Permutation von $\{1,\ldots,n\}$ und $1 \leq j \leq n$, so sind $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ und $K[[X_{\pi(1)},\ldots,X_{\pi(j)}]][[X_{\pi(j+1)},\ldots,X_{\pi(n)}]]$ in natürlicher Weise K-Algebraisomorph. Für n = 0 setzen wir $K[[X]] := K$.

Definition 3.1

Ist $f = \sum_{j=o}^{\infty} p_j$ die Entwicklung von $f \in F$ nach homogenen Polynomen, so heißt die kleinste natürliche Zahl s mit $p_s \neq 0$ die Ordnung von f, in Zeichen $o(f)$; falls $f=0$, sei $o(f) := \infty$.

Es gilt: $o(f \pm g) \geq \min\{o(f), o(g)\}$,

$o(f \cdot g) = o(f) + o(g)$.

Bemerkung 3.1

Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus F und gilt für jede natürliche Zahl j die Ungleichung $o(f_n) \geq j$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=o}^{\infty} f_n$ ein wohldefiniertes Element aus F. .-

Bemerkung und Bezeichnung 3.2

Es seien $g_i \in K[[Y_1,\ldots,Y_n]]$ formale Potenzreihen mit $o(g_i) \geq 1$, $i = 1,\ldots,m$. Ist dann $f = \sum_{j=o}^{\infty} p_j$ die Entwicklung eines Elementes $f = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k X^k \in K[[X_1,\ldots,X_m]]$ nach homogenen Polynomen, so ist die formale Potenzreihe

$$p_j(g_1,\ldots,g_m) := \sum_{k_1+\ldots+k_m=j} a_{k_1\ldots k_m} \; g_1^{k_1} \cdots g_m^{k_m}$$

wohldefiniert, und es gilt $o(p_j(g_1,\ldots,g_m)) \geq j$, $j = 0,1,2,\ldots$.

Daher ist nach Bemerkung 3.1 auch

$$f(g_1,\ldots,g_m) := \sum_{j=o}^{\infty} p_j(g_1,\ldots,g_m)$$

eine wohlbestimmte Potenzreihe aus $K[[Y_1,\ldots,Y_n]]$. Man sagt, daß $f(g_1,\ldots,g_m)$ aus f durch Substitution von g_k für X_k entsteht.

Die Zuordnung $f \to f(g_1,\ldots,g_m)$ definiert einen K-Algebra-homomorphismus $\varphi : K[\![X_1,\ldots,X_m]\!] \to K[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!]$. φ heißt der zu $g_1,\ldots,g_m \in K[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!]$ gehörende <u>Substitutions-homomorphismus</u>. φ läßt K elementweise fest, und es gilt

$$\varphi(X_k) = g_k$$

$$\varphi(f(X_1,\ldots,X_m)) = f(\varphi(X_1),\ldots,\varphi(X_m)) \; .$$

Ist $g_1 = \ldots = g_m = 0$, so gilt $\varphi(f) = f(0,\ldots,0) = p_o = a_{o\ldots o}$ für jedes f; in diesem Falle kann φ auch als K-Algebrahomomorphismus $K[\![X_1,\ldots,X_m]\!] \to K$ aufgefaßt werden. $a_{o\ldots o}$ heißt der <u>Wert von f.</u> .-

2. Partielle Ableitung, Kettenregel

<u>Definition 3.2</u>

Ist $f = \sum\limits_{o}^{\infty} a_{k_1\ldots k_n} X_1^{k_1}\ldots X_n^{k_n} \in F$, so heißt

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} := \sum_{o}^{\infty} k_i\, a_{k_1\ldots k_n} X_1^{k_1}\ldots X_i^{k_i-1} X_{i+1}^{k_{i+1}}\ldots X_n^{k_n} \in F$$

die <u>partielle Ableitung von f nach X_i</u> $(i = 1,\ldots,n)$ . .-

<u>Bemerkung 3.3</u>

a) Jede Abbildung $\frac{\partial}{\partial X_i} : F \to F$, $i = 1,\ldots,n,$ ist K-linear.

b) Ist $f = \sum\limits_{j=o}^{\infty} p_j$ die Entwicklung von $f \in F$ nach homogenen Polynomen, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \sum_{j=o}^{\infty} \frac{\partial p_j}{\partial X_i} \quad , \quad i = 1,\ldots,n,$$

und dies ist die Entwicklung von $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ nach homogenen Polynomen, wobei natürlich $\frac{\partial p_j}{\partial X_i}$ homogen vom Grade $j-1$ oder das Nullpolynom ist.

c) $o\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right) \geq o(f) - 1$ für alle $f \in F$, $i = 1,\ldots,n$. .-

Satz 3.4

Ist $f = \sum_{j=o}^{\infty} f_j \in F$ mit $\lim_{j\to\infty} o(f_j) = \infty$, so gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \sum_{j=o}^{\infty} \frac{\partial f_j}{\partial X_i} \quad , \qquad i = 1,\ldots,n \, .$$

Beweis:

Bei festem i schreiben wir abkürzend h' für $\frac{\partial h}{\partial X_i}$, $h\in F$.

Aus $o(f_j') \geq o(f_j) - 1$ folgt $\lim_{j\to\infty} o(f_j') = \infty$. Also ist $g = \sum_{j=o}^{\infty} f_j'$ wohldefiniert.

Zu zeigen: $g = f'$, dazu genügt es: $o(f'-g) \geq m$ für alle $m\in\mathbb{N}$. Wir wählen $s\in\mathbb{N}$ so,daß $o(f_j) \geq m + 1$ für jedes $j > s$ gilt, und setzen $r := \sum_{j=s+1}^{\infty} f_j \in F$. Dann gilt:

$$o(r) \geq m + 1 \; , \; o(r') \geq m \; , \; o(\sum_{j=s+1}^{\infty} f_j') \geq m \, .$$

Es ist $f = \sum_{j=o}^{s} f_j + r$ und somit $f' = \sum_{j=o}^{s} f_j' + r'$, daraus folgt $f' - g = r' - \sum_{j=s+1}^{\infty} f_j'$ und damit ergibt sich

$$o(f'-g) \geq \min\{o(r'), o(\sum_{j=s+1}^{\infty} f_j')\} \geq m \, . \qquad .-$$

Satz 3.5 (Produktregel)

Für $f,g\in F$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(f\cdot g) = f\,\frac{\partial g}{\partial X_i} + g\,\frac{\partial f}{\partial X_i} \quad , \; i = 1,\ldots,n \, .$$

Beweis:

Für Monome und Polynome ist die Produktregel elementar. Seien $f = \sum_{j=o}^{\infty} p_j$, $g = \sum_{j=o}^{\infty} q_j$ die homogenen Entwicklungen von f und g, so ist $f \cdot g = \sum_{j=o}^{\infty} (\sum_{k+e=j} p_k \cdot q_e)$ die homogene Entwicklung von $f\cdot g$.

Man erhält:

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(f\cdot g) = \sum_{j=o}^{\infty}\Big(\sum_{k+e=j}\frac{\partial}{\partial X_i}(p_k\, q_e)\Big)$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty}\Big(\sum_{k+e=j} p_k \frac{\partial q_e}{\partial X_i}\Big) + \sum_{j=o}^{\infty}\Big(\sum_{k+e=j} q_e \frac{\partial p_k}{\partial X_i}\Big)$$

$$= f\cdot\frac{\partial g}{\partial X_i} + g\cdot\frac{\partial f}{\partial X_i} \;. \qquad .-$$

<u>Folgerung 3.6</u> (Potenzregel)

$$\frac{\partial f^k}{\partial X_i} = k\cdot f^{k-1}\,\frac{\partial f}{\partial X_i} \quad , \quad i = 1,\ldots,n, \quad f\in F \quad , \; k\in\mathbb{N}^* \;. \qquad .-$$

Die Potenzregel folgt aus der Produktregel durch Induktion über k.

<u>Satz 3.7</u> (Kettenregel)

Ist φ: $K[\![X_1,\ldots,X_m]\!] \to K[\![Y_1,\ldots,Y_n]\!]$ ein Substitutions-homomorphismus, so gilt:

$$\frac{\partial}{\partial Y_i}\varphi(f) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\varphi(X_k)}{\partial Y_i}\;\varphi\Big(\frac{\partial f}{\partial X_k}\Big) \quad , \quad i = 1,\ldots,n,$$

für jedes $f\in K[\![X_1,\ldots,X_m]\!]$.

<u>Beweis:</u>

Sei zunächst f ein Monom, etwa $f = a\,X_1^{l_1}\ldots X_m^{l_m}$; es sei $g_k := \varphi(X_k)$, $k = 1,\ldots,m$. Dann gilt $\varphi(f) = a\,g_1^{l_1}\ldots g_m^{l_m}$ und somit aufgrund der Potenz- und Produktregel:

$$\frac{\partial}{\partial Y_i}\varphi(f) = \sum_{k=1}^{m} a g_1^{l_1}\ldots g_{k-1}^{l_{k-1}}\Big(l_k\, g_k^{l_k-1}\cdot\frac{\partial g_k}{\partial Y_i}\Big)\, g_{k+1}^{l_{k+1}}\ldots g_m^{l_m}$$

Da

$$\frac{\partial f}{\partial X_k} = a\,X_1^{l_1}\ldots X_{k-1}^{l_{k-1}}\,(l_k X_k^{l_k-1})\,X_{k+1}^{l_{k+1}}\ldots X_m^{l_m}$$ ist, gilt

die Kettenregel für Monome. Wegen der Linearität von φ und $\frac{\partial}{\partial Y_i}$

gilt sie dann auch für Polynome. Sei nun $f = \sum_{j=0}^{\infty} p_j$ die homogene Entwicklung eines beliebigen Elementes $f \in F$. Dann gilt $\varphi(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(p_j)$ und $\lim_{j\to\infty} o(\varphi(p_j)) = \infty$. Aus Satz 3.4 folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y_i} \varphi(f) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial Y_i} \varphi(p_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi(X_k)}{\partial Y_i} \varphi\left(\frac{\partial p_j}{\partial X_k}\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi(X_k)}{\partial Y_i} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{\partial p_j}{\partial X_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi(X_k)}{\partial Y_i} \varphi\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial p_j}{\partial X_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi(X_k)}{\partial Y_i} \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial X_k} \right) . \end{aligned}$$.-

Durch Iteration definiert man die höheren partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f}{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}}$. Unmittelbar klar ist die Gültigkeit der

Taylor-Formel:

$$i_1! \dots i_n! \cdot a_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f}{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}} (o) , \quad i_1, \dots, i_n = 0,1,2,\dots$$

Trivial, aber nützlich ist folgende

Bemerkung 3.8

Für $f = \sum\limits_{\dots} a_{k_1 \dots k_n} X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n} \in F$ und $j \le i$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial X_j} \underset{K^n}{\underset{\cap}{(o,\dots,o)}} = \frac{\partial f(X_1,\dots,X_i,0,\dots,0)}{\partial X_j} \underset{K^i}{\underset{\cap}{(0,\dots,0)}} .$$.-

Definition 3.3

Sind $f_1,\dots,f_m \in F$, $k \le n$, so heißt die (m,k)-Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le k}}$$

die Jacobi-Matrix von $f_1,\ldots,f_m$ bezüglich $X_1,\ldots,X_k$.
Ist $k = m$, so heißt

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(X_1,\ldots,X_m)} := \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$$

die Jacobi-Determinante. Sie ist wieder ein Element von F, und ihr Wert ist

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(X_1,\ldots,X_m)}(o) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}(o)\right) \in K .$$

§ 4 Bewertete Körper

Um einen vernünftigen Konvergenzbegriff bei Potenzreihen einführen zu können, ist es notwendig, Körperbewertungen und ihre Eigenschaften zu kennen. In diesem Paragraphen werden wir zunächst die wichtigsten Begriffe definieren und verschiedene zentral Sätze der Bewertungstheorie zitieren, anschließend beweisen wir einige einfache Aussagen, die besonders in den beiden folgenden Paragraphen von Interesse sind. K bezeichne einen Körper der Charakteristik Null.

Definition 4.1

Sei K ein beliebiger Körper. Eine Abbildung $|\,|: K \to \mathbb{R}$ heißt eine Bewertung von K, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1) $|x| \geq 0$ für alle $x \in K$, $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ f. a. $x, y \in K$
3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ f. a. $x, y \in K$

Die Zahl $|x| \in \mathbb{R}$ heißt Betrag von $x \in K$. Ist auf K eine Bewertung $|\,|$ definiert, so heißt $(K, |\,|)$ (oder kurz: K) bewertet.

Jeder Körper besitzt die triviale Bewertung $|x| = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Endliche Körper besitzen nur die triviale Bewertung. Da wir uns aber weder für endliche Körper noch für die triviale Bewertung interessieren, wollen wir sie von den Betrachtungen im folgenden Teil des Paragraphen ausschließen.

Definition 4.2

Zwei Bewertungen $|\,|$, $|\,|'$ von K heißen äquivalent, wenn gilt:

$$|x| < |y| \text{ genau dann, wenn } |x|' < |y|' , \quad x, y \in K .$$

Offensichtlich sind zwei Bewertungen $|\,|$, $|\,|'$ genau dann äquivalent, wenn gilt

$$|x| < 1 \Longleftrightarrow |x|' < 1 \quad , \quad x \in K .$$

Satz 4.1

Sind $|\,|$ und $|\,|'$ äquivalente Bewertungen auf K, so gibt es ein $s \in \mathbb{R}_+^*$ mit $|\,|' = |\,|^s$.

Beweis:

Sei $a_0 \in K$ fest gewählt mit $0 < |a_0| < 1$, sei $a \in K$, $a \neq 0$, beliebig. Wir betrachten sämtliche Paare (m,n), $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$|a_0^m| < |a^n|$$

$|a_0^m| < |a^n|$ ist äquivalent mit $m \ln|a_0| < n \ln|a|$ und daher mit $\frac{m}{n} > \frac{\ln|a|}{\ln|a_0|}$ (ln ist der natürliche Logarithmus). Da $|\,|$ und $|\,|'$ äquivalent sind, gilt $|a_0^m| < |a^n|$ genau dann, wenn $|a_0^m|' < |a^n|'$. Daraus folgt

$$\frac{m}{n} > \frac{\ln|a|}{\ln|a_0|} \iff \frac{m}{n} > \frac{\ln|a|'}{\ln|a_0|'}.$$

Somit ergibt sich: Eine Folge rationaler Zahlen konvergiert gegen $\frac{\ln|a|}{\ln|a_0|}$ genau dann, wenn sie gegen $\frac{\ln|a|'}{\ln|a_0|'}$ konvergiert. Das impliziert $\frac{\ln|a|}{\ln|a_0|} = \frac{\ln|a|'}{\ln|a_0|'}$, und somit $\frac{\ln|a|'}{\ln|a|} = \frac{\ln|a_0|'}{\ln|a_0|} =: s$

s ist also nicht abhängig von der Wahl von a.

Damit erhalten wir $|a|' = |a|^s$ für alle $a \in K$, $a \neq 0$. Wegen $|a|' < 1 \iff |a| < 1$ ist $s > 0$, somit gilt obige Formel auch für $a = 0$. .-

Bemerkung 4.2

Durch $d(x,y) := |x-y|$, $x,y \in K$, wird auf jedem bewerteten Körper $(K,|\,|)$ eine Metrik definiert. K heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in dieser Metrik konvergiert. Mit den Methoden aus [9] § 8 können wir jeden bewerteten Körper vervollständigen. Die vollständige Hülle wollen wir mit $(\hat{K}, \hat{|\,|})$ bezeichnen. Jeder Körper K läßt sich auf natürliche Weise in seine vollständige Hülle $\hat{K}$ einbetten, die Schreibweise $K \subset \hat{K}$ ist somit gerechtfertigt.

Für die Bewertung der vollständigen Hülle gilt: $\hat{|a|} = |a|$ für alle $a \in K$.

Definiton 4.3

Sei $(K,|\,|)$ ein bewerteter Körper. $|\,|$ heißt archimedisch, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|n| > 1$. Andernfalls heißt $|\,|$ nichtarchimedisch.

Satz 4.3

Sei $(K,||)$ ein bewerteter Körper. Dann sind äquivalent:

1) $||$ nichtarchimedisch.
2) $|n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3) $(|n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
4) $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ für alle $x,y\in K$ (scharfe Dreiecksungleichung)

Beweis:

1) $\Longleftrightarrow$ 2) nach Definition

2) $\Longrightarrow$ 3) klar

3) $\Longrightarrow$ 4)

Sei $|n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}_+^*$. Dann gilt

$$|x+y|^n = \left|\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right| \leq \sum_{k=o}^{n} \left|\binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right|$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \left|\binom{n}{k}\right| |x|^k |y|^{n-k} \leq (n+1)\, M(\max\{|x|, |y|\})^n$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} M^{\frac{1}{n}} = 1$ folgt $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$

4) $\Longrightarrow$ 2)

$|n| = |1+\ldots+1| \leq \max\{|1|\} = |1| = 1$.

Satz 4.4

Sei $(K,||)$ nichtarchimedisch bewertet, seien $i, i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N}$ und sei $i \geq i_1 + \ldots + i_r$, dann gilt

$$|i!| \leq |i_1!| \ldots |i_r!| .$$

Beweis:

Durch Induktion über i. $i = 0$, $i = 1$ klar. Sei die Behauptung richtig für $i \geq 1$; wir wollen zeigen, daß sie dann auch für $i+1$ gil

1\. Fall

$i_1 + \ldots + i_r < i + 1$, daraus folgt $i_1 + \ldots + i_r \leq i$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$|i_1!| \ldots |i_r!| \geq |i!| \geq |i!|\ |i+1| = |(i+1)!|$$

2\. Fall

$i_1 + \ldots + i_r = i + 1$

a) Es gibt ein $s \in \{1,\ldots,r\}$ mit $i_s = i + 1$, trivial.

b) $i_s < i + 1$ für alle $s \in \{1,\ldots,r\}$

Aus der scharfen Dreiecksungleichung folgt, es gibt ein $s \in \{1,\ldots,r\}$ mit $|i_s| \geq |i+1|$. O.B.d.A sei $s = 1$. Dann gilt

$$|(i+1)!| = |i!|\ |i+1| \leq (|(i_1-1)!| \ldots |i_r!|)\ |i_1|$$
$$= |i_1!| \ldots |i_r!| \quad .$$
.-

Wir geben nun einige Sätze an, die sich im Verlaufe der Arbeit als hilfreich erweisen werden. Ihre Beweise werden aus Platzgründen nicht angegeben, können aber in [9] nachgelesen werden.

Satz 4.5

Sei $|\,|$ eine archimedische Bewertung auf $\mathbb{Q}$, $|\,|_\infty$ die übliche Betragsfunktion. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{P}$, $0 < \alpha \leq 1$ mit

$$|x| = |x|_\infty^\alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q} \quad .$$
.-

Es sei p eine Primzahl. Dann läßt sich bekanntlich zu jeder rationalen Zahl $a \in \mathbb{Q}^*$ eindeutig eine ganze Zahl $v_p(a) \in \mathbb{Z}$ finden, so daß

$$a = p^{v_p(a)} \cdot \frac{n}{m}$$

ist mit nicht-verschwindenden ganzen Zahlen n,m, die beide zu p teilerfremd sind. Durch

$$|a|_p := \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(a)} = p^{-v_p(a)} \quad , \quad a \in \mathbb{Q}$$

wird eine Bewertung auf $\mathbb{Q}$ definiert, die p-adische Bewertung heißt.

Satz 4.6

Sei $|\,|$ eine nichttriviale nichtarchimedische Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Primzahl p und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1$, so daß gilt

$$|a| = \begin{cases} \varepsilon^{v_p(a)} & a \in \mathbb{Q}^* \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$
.-

Jede nichtarchimedische Bewertung ist also zu einer p-adischen äquivalent. p heißt die zu $|\,|$ gehörige Primzahl.

Satz 4.7 (Ostrowski)

Ist $(K, |\,|)$ ein archimedisch vollständig bewerteter Körper, so ist K bis auf algebraische Isomorphie entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$, und es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, mit

$$|x| = |x|_\infty^\alpha \quad \text{für alle } x \in K .$$
.-

Aus den vorhergehenden Sätzen folgt sofort:

Bemerkung 4.8

Sei $|\,|$ eine beliebige Bewertung auf $\mathbb{Q}$, dann gilt

$$|n| \leq n \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{n}\right| \leq n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} .$$
.-

Bemerkung 4.9

Ist die Charakteristik von K Null, so gilt $\mathbb{Q} \subset K$. Jede nichttriviale nichtarchimedische Bewertung auf K induziert eine solche auf $\mathbb{Q}$. Nach Satz 4.6 ist die induzierte Bewertung auf $\mathbb{Q}$ zu einer p-adischen äquivalent. Für die Folge $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$|p^n| = \varepsilon^n \to 0 \quad .$$

Daraus folgt, zu jeder reellen Zahl $t > 0$ gibt es ein Element $r \in K$ mit $|r| < t$, d. h. K besitzt Elemente mit beliebig kleinem Betrag.

.-

In einem späteren Beweis benötigen wir, um das Majorantenkriterium anwenden zu können, daß die Exponentialreihe auch in einem nichtarchimedisch bewerteten Körper "konvergiert".

Satz 4.10

Ist $(K,|\,|)$ ein nichttrivial nichtarchimedisch bewerteter Körper, p die zu $|\,|$ gehörige Primzahl, $n = a_o+a_1p+\ldots+a_rp^r$, $0 \leq a_i < p$, die p-adische Darstellung von $n \in \mathbb{N}$, $s_n := a_o+\ldots+a_r$, dann gilt:

$$|n!| = \varepsilon^{\frac{n-s_n}{p-1}} \text{ , mit } 0 < \varepsilon < 1 \text{ nach Satz 4.6.}$$

Beweis:

Z.z.: $v_p(n!) = \frac{n-s_n}{p-1}$, Beweis durch Induktion über n.

$n = 0$, trivial

Z.z.: $(n-1) \Rightarrow n$

Für $n \geq 1$ ist $n! = n(n-1)!$

Sei a_t die erste von Null verschiedene natürliche Zahl in der p-adischen Darstellung von n, also $n= a_t\, p^t + \ldots + a_r\, p^r$, $0 \leq a_i < p$, $a_t \geq 1$. Dann ist $s_n = a_t + a_{t+1} + \ldots + a_r$ und die p-adische Darstellung von $(n-1)$ ist

$$n-1 = (p-1) + (p-1)\,p+\ldots+(p-1)\,p^{t-1} +(a_t-1)p^t+a_{t+1}p^{t+1}+\ldots+a_rp^r$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= t(p-1) + a_t-1 + a_{t+1} + \ldots + a_r \\ &= t(p-1) + s_n - 1 \end{aligned}$$

also $\quad t = \dfrac{s_{n-1} - s_n + 1}{p - 1}$

Es folgt:

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= v_p((n-1)!) + v_p(n) = \frac{n-1 - s_{n-1}}{p - 1} + t \\ &= \frac{n-1 - s_{n-1} + s_{n-1} - s_n + 1}{p - 1} \\ &= \frac{n - s_n}{p-1} \quad . \end{aligned}$$

.-

Satz 4.11

Sei $(K,|\,|)$ ein nichttrivial, nichtarchimedisch bewerteter Körper, dann gibt es eine reelle Zahl $0<\varepsilon<1$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!}\right| \varepsilon^n < \infty \quad .$$

Beweis:

Nach Satz 4.6 gibt es ein $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon<1$, und eine Primzahl p, so daß für alle $a\in\mathbb{Q}$, $a \neq 0$ gilt $|a| = \varepsilon^{v_p(a)}$. Nach Satz 4.10 ist dann $\left|\frac{1}{n!}\right| = \varepsilon^{-\frac{n-s_n}{p-1}}$, es gilt also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!}\right| \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{-n+s_n+(p-1)\,n}{p-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n(1-\frac{1}{p-1})}\,\varepsilon^{\frac{s_n}{p-1}}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varepsilon^{1-\frac{1}{p-1}}\right)^n < \infty \quad .$$

.-

§ 5 Konvergente Potenzreihen

Nachdem wir formale Potenzreihen und bewertete Körper kennengelernt haben, sind wir nun in der Lage, einen brauchbaren und vernünftigen Konvergenzbegriff für Potenzreihen über beliebigen bewerteten Körpern zu definieren. K sei im weiteren ein bewerteter Körper der Charakteristik Null und $|\,|$ seine Bewertung.
$K[\![X]\!]$ sei die Algebra der formalen Potenzreihen in n Unbestimmten, $\mathbb{R}^n_+ := \{(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n : t_j > 0 \, , \; j = 1,\dots,n\}$.

1. Die Algebra der konvergenten Potenzreihen

Definition 5.1

$f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X^i \in K[\![X]\!]$ heißt <u>konvergent</u>, wenn es ein $t = (t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n_+$ gibt mit

$$\|f\|_t := \sum_{i \in \mathbb{N}^n} |a_i| t^i < \infty \quad (t^i := t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}) \quad .$$

Die Menge aller konvergenten Potenzreihen bezeichnen wir mit

$$K\langle\!\langle X_1,\dots,X_n\rangle\!\rangle =: K\langle\!\langle X\rangle\!\rangle \quad .$$

$K\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ ist eine K-Unteralgebra von $K[\![X]\!]$. Es gilt $K\langle\!\langle X\rangle\!\rangle = K[\![X]\!]$ genau dann, wenn die Bewertung von K trivial ist. Unter Mißachtung der Regeln der deutschen Sprache scheuen wir uns nicht, $K\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ auch "konvergenter Potenzreihenring in n Unbestimmten" zu nennen.

Bemerkung:

Ist K vollständig bewertet, so läßt sich jedes Element $f \in K\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ als holomorphe Funktion in einem geeigneten Polyzylinder $\{(x_1,\dots,x_n) \in K^n : |x_i| < t_i, \; i = 1,\dots,n\}$ auffassen. .-

Satz 5.1

(a) (Abelsches Lemma)

Es seien $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X^i \in K[[X]]$ und $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}_+^n$ so beschaffen, daß für alle $i \in \mathbb{N}^n$ gilt:

$$|a_i| \, s^i \leq C \, , \quad C \in \mathbb{R}_+ \quad .$$

Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}_+^n$ mit $t_j < s_j$, $j = 1, \ldots, n$,

$$||f||_t \leq C \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 - \frac{t_j}{s_j})} \quad .$$

(b) (Cauchysche Koeffizientenabschätzung)

Für jedes $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X^i \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ mit $||f||_t < \infty$ für $t \in \mathbb{R}_+^n$

gilt

$$|a_i| \leq \frac{||f||_t}{t^i} \quad .$$

(c) Ist $f \in K\langle\langle X \rangle\rangle$, so gilt

$$\lim_{t \to o} ||f||_t = |f(o)| = |a_{o \ldots o}| \quad .$$

Beweis: trivial .–

Das abelsche Lemma ist ein hinreichendes Kriterium dafür, daß eine formale Potenzreihe konvergent ist.

Satz 5.2

$f \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ ist genau dann eine Einheit in $K\langle\langle X \rangle\rangle$, wenn $o(f) = 0$, d. h. wenn $f(0) \neq 0$ ist.

Beweis:

Ist f Einheit, so existiert ein $g \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ mit $f \cdot g = 1$, daraus folgt $f(0) \cdot g(0) = 1$, also $f(0) \neq 0$.

Sei $a := f(0) \neq 0$. Nach Satz 5.1, (c) ist dann $\lim_{t\to 0} ||1-a^{-1}f||_t = 0$.
Das bedeutet, $\lim_{j\to\infty} o(1-a^{-1}f)^j = \infty$, und mit Bemerkung 3.1 ist $\sum_{j=0}^{\infty} (1-a^{-1}f)^j$ wohldefiniert. Weiterhin gibt es ein $t \in \mathbb{R}_+^n$ mit $||1-a^{-1}f||_t < 1$.

Aus $\sum_{j=0}^{\infty} (1-a^{-1}f)^j = (1-(1-a^{-1}f))^{-1} = (a^{-1}f)^{-1}$ folgt, daß $a^{-1}f$ invertierbar ist, also auch f eine Einheit . .-

Folgerung 5.3

$K\langle\langle X\rangle\rangle$ ist eine K-Stellenalgebra mit dem maximalen Ideal

$$\mathfrak{m}(K\langle\langle X\rangle\rangle) := \{f \in K\langle\langle X\rangle\rangle : f(0) = 0\} = K\langle\langle X\rangle\rangle X_1 + \ldots + K\langle\langle X\rangle\rangle X_n$$

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $\mathfrak{m}(K\langle\langle X\rangle\rangle)^n = \{f \in K\langle\langle X\rangle\rangle : o(f) \geq n\}$. Das impliziert unmittelbar

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(K\langle\langle X\rangle\rangle)^n = 0 \quad .$$.-

Für einen Substitutionshomomorphismus $\varphi: K[[X_1,\ldots,X_n]] \to K[[Y_1,\ldots,Y_m]]$ gilt $\varphi(K\langle\langle X\rangle\rangle) \subset K\langle\langle Y\rangle\rangle$ höchstens dann, wenn $\varphi(X_i) \in K\langle\langle Y\rangle\rangle$, $i = 1,\ldots,n$. Die Umkehrung gilt ebenfalls:

Satz 5.4

Es sei $\varphi: K[[X_1,\ldots,X_n]] \to K[[Y_1,\ldots,Y_m]]$ ein Substitutionshomomorphismus mit $\varphi(X_i) \in K\langle\langle Y\rangle\rangle$, $i = 1,\ldots,n$. Es sei $t \in \mathbb{R}_+^n$ und $f \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ mit $||f||_t < \infty$. Dann gilt:

$$||\varphi(f)||_s \leq ||f||_t$$

für jedes $s \in \mathbb{R}_+^m$ mit $||\varphi(X_i)||_s \leq t_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Beweis:

~~Wegen~~ $\cancel{\lim_{s\to 0} ||\varphi(X_i)||_s = 0}$ ~~existieren solche s. Es sei~~
$f = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ und $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$ die Entwicklung von f nach homogenen Polynomen.

Nach Definition des Substitutionshomomorphismus gilt

$$\varphi(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(p_j) \ .$$

Mit den Voraussetzungen über s folgt:

$$\begin{aligned} ||\varphi(f)||_s &= ||\sum_{j=0}^{\infty} \varphi(p_j)||_s \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||\varphi(p_j)||_s \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} ||\sum_{i_1+\ldots+i_n=j} a_{i_1\ldots i_n} \varphi(X_1)^{i_1} \ldots \varphi(X_n)^{i_n}||_s \\ &\leq \sum_{i_1,\ldots,i_n} |a_{i_1\ldots i_n}| \, ||\varphi(X_1)||_s^{i_1} \ldots ||\varphi(X_n)||_s^{i_n} \\ &\leq \sum_{i_1,\ldots,i_n} |a_{i_1\ldots i_n}| \, t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n} = ||f||_t \ . \end{aligned}$$

.-

Definition 5.2

Homomorphismen $\varphi: K \langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle \to K \langle\langle Y_1,\ldots,Y_m\rangle\rangle$, die von einem Substitutionshomomorphismus $K [[X_1,\ldots,X_n]] \to K [[Y_1,\ldots,Y_m]]$ herrühren, nennen wir analytische Homomorphismen.

Satz 5.5

Jeder K-Algebrahomomorphismus $\psi : K \langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle \to K \langle\langle Y_1,\ldots,Y_m\rangle\rangle$ ist lokal und analytisch.

Beweis:

Nach Satz 2.13 ist ψ lokal, daher gilt $o(\psi(X_i)) \geq 1$, $i = 1,\ldots,n$. Nach Bemerkung 3.2 und Satz 5.4 gibt es einen Substitutionshom. $\varphi: K \langle\langle X\rangle\rangle \to K \langle\langle Y\rangle\rangle$ mit $\varphi(X_i) = \psi(X_i)$, $i = 1,\ldots,n$. φ und ψ sind dann identisch auf $K [X_1,\ldots,X_n]$. Für jedes $f \in K \langle\langle X\rangle\rangle$ folgt

$$\varphi(f) - \psi(f) \in \mathfrak{m}(K \langle\langle Y\rangle\rangle)^l \quad \text{für alle} \quad l \geq 1 \ .$$

Aus Folgerung 5.3 ergibt sich $\varphi(f) = \psi(f)$ . .-

Satz 5.6

Für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial X_i} : K [\![X]\!] \to K [\![X]\!], i = 1,\ldots,n,$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial X_i} (K \langle\!\langle X \rangle\!\rangle) \subset K \langle\!\langle X \rangle\!\rangle .$$

Genauer: Ist $f \in K \langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ und $||f||_s < \infty$, dann ist (o.B.d.A. $i = 1$)

$$||\frac{\partial f}{\partial X_1}||_t \leq C\, ||f||_s$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}_+$ und $t_j < s_j$ für $t = (t_1,\ldots,t_n)$, $s = (s_1,\ldots,s_n)$.

Beweis:

Sei $q_1 := \frac{t_1}{s_1}$. Wegen $0 < q_1 < 1$ ist die Folge $(k_1 q_1^{k_1})_{k_1 \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Es existiert also eine obere Schranke $C > 0$, so daß für alle $k_1 \geq 0$ gilt:

$$k_1 q_1^{k_1} t_1^{-1} \leq C .$$

Da $|k| \leq k$ für jede Bewertung gilt, folgt hieraus:

$$||\frac{\partial}{\partial X_1} f||_t = \sum_{k_1,\ldots,k_n} |k_1|\, |a_{k_1\ldots k_n}|\, t_1^{k_1-1} t_2^{k_2} \ldots t_n^{k_n}$$

$$\leq \sum_{\ldots} k_1 q_1^{k_1} t_1^{-1} q_2^{k_2} \ldots q_n^{k_n} |a_{k_1\ldots k_n}| s_1^{k_1} \ldots s_n^{k_n}$$

$$\leq C\, ||f||_s$$.-

Aus Satz 5.5 und Satz 3.7 ergibt sich unmittelbar:

Satz 5.7 (Kettenregel)

Ist $\varphi : K \langle\!\langle X_1,\ldots,X_n \rangle\!\rangle \to K \langle\!\langle Y_1,\ldots,Y_m \rangle\!\rangle$ ein analytischer Homomorphismus, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} \varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(X_i)}{\partial Y_j} \varphi(\frac{\partial f}{\partial X_i}) , \quad j = 1,\ldots,n,$$.-

für jedes $f \in K \langle\!\langle X_1,\ldots,X_n \rangle\!\rangle$.

Der nächste Satz zeigt uns, daß die konvergenten Potenzreihenringe bezüglich auf K äquivalenter Bewertungen gleich sind.

Satz 5.8

Sind $|\,|$ und $|\,|'$ zwei äquivalente Bewertungen auf K und ist $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X^i \in K[\![X]\!]$, dann gilt:

Es gibt ein $t \in \mathbb{R}_+^n$ mit $\sum_{\dots} |a_i|\, t^i < \infty$ genau dann, wenn ein $s \in \mathbb{R}_+^n$ existiert mit $\sum_{\dots} |a_i|'\, s^i < \infty$.

Beweis:

Sei $\Sigma\, |a_i| t^i =: L < \infty$, d.h. $|a_i| t^i \leq L$ für alle $i \in \mathbb{N}^n$. Wegen Satz 4.1 gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ mit $|\,|' = |\,|^\alpha$. Daraus folgt

$$|a_i|^\alpha\, t^{i\alpha} \leq L^\alpha \quad \text{bzw.} \quad |a_i|'\, (t^\alpha)^i \leq L^\alpha =: L' \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}^n.$$

Das abelsche Lemma besagt dann, für jedes $s \in \mathbb{R}_+^n$ mit $s_j < t_j^\alpha$, $j = 1,\dots,n$, ist $\Sigma\, |a_i|'\, s^i < \infty$. Die umgekehrte Richtung beweist man ebenso. .-

Satz 5.9

Seien $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X_i \in K\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ und $t = (t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ mit $\|f\|_t < \infty$. Dann gibt es einen Automorphismus $\varphi: K\langle\!\langle X \rangle\!\rangle \to K\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\|\varphi(f)\|_1 < \infty$

(b) Ist $\varphi(f) := \sum_{\dots} b_i X_i$, so gilt: $|b_i| \leq 1$ für alle $i \in \mathbb{N}^n$.

Beweis:

Nach Bemerkung 4.9 existiert ein $r \in K$, $r \neq 0$, mit $|r| < \min\{t_j, j=1,\dots,n\}$. Sei $\varphi: K\langle\!\langle X \rangle\!\rangle \to K\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ gegeben durch $X_j \to r X_j$, $j = 1,\dots,n$, dann ist φ ein Automorphismus und

$\|\varphi(f)\|_1 = \Sigma\, |a_i|\, |r|^{i_1+\dots+i_n} < \|f\|_t < \infty$. Also gilt $|a_i|\, |r|^{i_1+\dots+i_n} \to 0$. Hat kein Koeffizient von $\varphi(f)$ einen

Betrag, der größer ist als 1, sind wir fertig; andernfalls sei s der Koeffizient von $\varphi(f)$ mit dem größten Betrag. Durch $X_j \to \frac{r}{s} X_j$, $j = 1,\dots,n$, wird dann ein Automorphismus $\varphi : K\langle\langle X\rangle\rangle \to K\langle\langle X\rangle\rangle$ mit den gewünschten Eigenschaften definiert. .-

Ist also f ein beliebiges Element von $K\langle\langle X\rangle\rangle$, so können wir aufgrund von Satz 5.9 o.B.d.A. annehmen: $\|f\|_1 < \infty$, und alle Koeffizienten von f haben einen Betrag, der nicht größer als 1 ist.

2. Analytische Karten

Definition 5.3

Ein n-Tupel $\langle\langle Z_1,\dots,Z_n\rangle\rangle$ mit $Z_i \in K\langle\langle X_1,\dots,X_n\rangle\rangle$, $j = 1,\dots,n$, heißt analytische Karte (kurz: Karte) von $K\langle\langle X\rangle\rangle$, wenn es einen Automorphismus φ von $K\langle\langle X\rangle\rangle$ gibt mit $\varphi(X_i) = Z_i$, $i = 1,\dots,n$.

Bemerkung:

Ist K vollständig bewertet und faßt man die Z_i als holomorphe Funktionen in einer Umgebung des Nullpunktes von K^n auf, so läßt sich eine analytische Karte geometrisch interpretieren als Koordinatensystem einer Umgebung von $0 \in K^n$ . .-

Bemerkung 5.10

Ist $\langle\langle Z_1,\dots,Z_n\rangle\rangle$ eine Karte von $K\langle\langle X\rangle\rangle$, so ist jedes $f \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ eindeutig als konvergente Potenzreihe nach $Z_1,\dots,Z_n$ entwickelbar. Es gilt

$$f = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} Z_1^{i_1} \dots Z_n^{i_n} ,$$

falls $\varphi^{-1}(f) = \sum_{\dots} a_{i_1\dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ und φ der durch $\varphi(X_i) := Z_i$ gegebene Automorphismus ist. Wir schreiben daher auch

$$K\langle\langle X_1,\dots,X_n\rangle\rangle = K\langle\langle Z_1,\dots,Z_n\rangle\rangle .$$

Sind $\langle\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle\rangle$, $\langle\langle Y_1,\ldots,Y_n\rangle\rangle$ zwei Karten in $K\langle\langle X\rangle\rangle$, so gibt es stets ein $\varphi \in \mathrm{Aut}\, K\langle\langle X\rangle\rangle$ mit $\varphi(Z_i) = Y_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Ist $\langle\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle\rangle$ eine Karte von $K\langle\langle X\rangle\rangle$, $K\langle\langle W_1,\ldots,W_m\rangle\rangle$ ein weiterer konvergenter Potenzreihenring und $\rho: K\langle\langle X\rangle\rangle \to K\langle\langle W\rangle\rangle$ ein analytischer Homomorphismus, so ist ρ vollständig durch die Bilder $\rho(Z_i) \in K\langle\langle W\rangle\rangle$, $i = 1,\ldots,n$, bestimmt, da er ein Substitutionshomomorphismus ist. .-

3. Der Cotangentialraum

Sei im weiteren $R := K\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ und $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}(R)$.

Definition 5.4

Der K-Vektorraum $\dot{R} := \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ heißt der Cotangentialraum von R. Den kanonischen Epimorphismus $\mathfrak{m} \to \dot{R}$ bezeichnen wir mit δ.

Aufgrund des Nakayama-Lemmas ist $\dot{R} = 0$ genau dann, wenn $R = K$.

Satz 5.11

$f_1,\ldots,f_m \in R$ bilden genau dann ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$, wenn $\{\delta(f_1),\ldots,\delta(f_m)\}$ eine Basis von $\dot{R}$ ist.

Beweis:

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 2.4. .-

Folgerung 5.12

i) $\{\delta(X_1),\ldots,\delta(X_n)\}$ ist Basis von $\dot{R}$.

ii) $\dim_K \dot{R} = n$

iii) $Z_1,\ldots,Z_n \in R$ bilden genau dann eine Karte $\langle\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle\rangle$ von R, wenn $\{\delta(Z_1),\ldots,\delta(Z_n)\}$ eine Basis von $\dot{R}$ ist. .-

Bemerkung 5.13

Die Taylorsche Formel gibt uns die Möglichkeit, für jedes $f \in \mathfrak{m}$ das Bild $\delta(f)$ explizit anzugeben, und zwar gilt:

$$\delta(f) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(o)\,\delta(X_1) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_n}(o)\,\delta(X_n). \quad .-$$

Bemerkung und Bezeichnung 5.14

Sei $S := K\langle\langle Y_1,\dots,Y_m\rangle\rangle$ ein weiterer konvergenter Potenzreihenring und $\varphi : R \to S$ ein analytischer Homomorphismus; dann induziert φ wegen $\varphi(\mathfrak{m}(R)^k) \subset \mathfrak{m}(S)^k$ einen K-Vektorraumhomomorphismus

$$\dot{\varphi} : \dot{R} \to \dot{S} ,$$

so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m}(R) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"] & \mathfrak{m}(S) \arrow[d, "\delta"] \\ \dot{R} \arrow[r, "\dot{\varphi}"] & \dot{S} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir nennen $\dot{\varphi}$ die Ableitung von φ. Es gilt $\dot{\varphi}(\dot{R}) = \delta(\varphi(\mathfrak{m}(R)))$.

Ist $\psi : S \to T$ ein weiterer analytischer Homomorphismus zwischen konvergenten Potenzreihenringen S, T, so gilt die Kettenregel

$$\dot{\overbrace{\psi \circ \varphi}} = \dot{\psi} \circ \dot{\varphi} \quad .$$

.-

Obige Bemerkungen gelten natürlich auch für alle analytischen Stellenalgebren; gebildet ausgedrückt können wir dann sagen, $A \rightsquigarrow \dot{A}$ ist ein kovarianter Funktor der Kategorie der analytischen Stellenalgebren in die Kategorie der endlich dimensionalen K-Vektorräume.

Bemerkung 5.15

Sind $f_1,\dots,f_n \in \mathfrak{m}(R)$ und $g_1,\dots,g_m \in \mathfrak{m}(S)$ minimale Erzeugendensysteme der maximalen Ideale von R und S, so wird die Ableitung $\dot{\varphi}$ eines analytischen Homomorphismus bezüglich der Basen $\{\delta(f_1),\dots,\delta(f_n)\}$ bzw. $\{\delta(g_1),\dots,\delta(g_m)\}$ von $\dot{R}$ bzw. $\dot{S}$ durch eine (n,m)-Matrix beschrieben, deren Rang der Rang von $\dot{\varphi}$, d.h. die Dimension des Bildraumes $\dot{\varphi}(\dot{R})$, ist.

Wählen wir speziell $X_1,\dots,X_n$ und $Y_1,\dots,Y_m$ als minimale Erzeugendensysteme, so ist die in Rede stehende Matrix gerade die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial\varphi(X_i)}{\partial Y_j}(0) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

.-

4. Quasiendliche und endliche Homomorphismen

Bis zum Ende dieses Paragraphen sei $R := K \langle\langle X_1,\dots,X_n \rangle\rangle$, $R' := K \langle\langle X_1,\dots,X_{n-1} \rangle\rangle$, $S := K \langle\langle Y_1,\dots,Y_m \rangle\rangle$.

Definition 5.5

(i) Ein analytischer Homomorphismus $\varphi : R \to S$ heißt quasiendlich, wenn $S/_{S\varphi(\mathfrak{m})}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum ist.

(ii) φ heißt endlich, wenn S ein endlicher R-Modul ist. S wird dabei via φ durch $r \cdot f := \varphi(r) \cdot f$ für $r \in R$, $f \in S$ als R-Modul angesehen.

Bemerkung 5.16

(i) Epimorphismen sind stets endlich sowie quasiendlich.

(ii) Mit $\varphi : R \to S$ ist auch $\overline{\varphi} : R/_{\mathfrak{a}} \to S/_{S\varphi(\mathfrak{a})}$, $\mathfrak{a} \subset R$ Ideal, endlich. (Für $\overline{\varphi}$ ist die Endlichkeit analog zu definieren)

Beweis: Klar .–

Satz 5.17

Sei $\mathfrak{a} \subset S$ ein Ideal mit $\dim_K S/_{\mathfrak{a}} =: r < \infty$. Dann gilt

$$\mathfrak{m}(S)^r \subset \mathfrak{a} .$$

Beweis:

$$S \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{a} + \mathfrak{m}(S) \supset \mathfrak{a} + \mathfrak{m}(S)^2 \supset \dots \supset \mathfrak{a} + \mathfrak{m}(S)^i \supset \dots$$

ist eine absteigende Kette von S-Moduln. Beim Rechnen modulo $\mathfrak{a}$ erhalten wir eine absteigende Kette von endlich dimensionalen K-Vektorräumen

$$S/_{\mathfrak{a}} \underset{\neq}{\supset} (\mathfrak{a} + \mathfrak{m}(S))/_{\mathfrak{a}} \supset (\mathfrak{a} + \mathfrak{m}(S)^2)/_{\mathfrak{a}} \supset \dots$$

Wegen $\dim_K S/\mathfrak{a} = r$ und $\dim_K (\mathfrak{a}+\mathfrak{m}(S))/\mathfrak{a} \leq r-1$ gibt es einen Index $s \leq r$ mit

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}(S)^s)/\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{m}(S)^{s+1})/\mathfrak{a}$$

Das impliziert $\mathfrak{a}+\mathfrak{m}(S)^s = \mathfrak{a}+\mathfrak{m}(S)^{s+1}$ und somit $\mathfrak{m}(S) \subset \mathfrak{a}+\mathfrak{m}(S)^{s+1}$
Das Nakayama-Lemma liefert $\mathfrak{m}(S)^s \subset \mathfrak{a}$. .-

Satz 5.18

Ein analytischer Homomorphismus $\varphi : R \to S$ ist genau dann quasiendlich, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\mathfrak{m}(S)^r \subset S\,\varphi(\mathfrak{m}(R))$$

Beweis:

"$\Longrightarrow$" folgt aus Satz 5.17.
"$\Longleftarrow$" $S/\mathfrak{m}(S)^r$ ist endlich dimensionaler K-Vektorraum. Da $\mathfrak{m}(S)^r \subset S\,\varphi(\mathfrak{m}(R))$, ist $S/S\varphi(\mathfrak{m}(R))$ epimorphes Bild von $S/\mathfrak{m}(S)^r$. Also ist $S/S\varphi(\mathfrak{m}(R))$ endlich dimensionaler K-Vektorraum und somit φ quasiendlich. .-

Satz 5.19

Sei $\varphi : R \to S$ ein analytischer Homomorphismus, S via φ als R-Modul aufgefaßt, und es gelte $\mathfrak{m}(S)^r \subset S\,\varphi(\mathfrak{m}(R))$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Dann bilden die Monome $Y_1^{i_1} \dots Y_m^{i_m}$ mit $i_1+\dots+i_m < r$, ein R-Erzeugendensystem von S.

Beweis: Siehe [2]. .-

Satz 5.20

Sei $\varphi : R \to S$ ein analytischer Homomorphismus, dann gilt

(i) φ ist surjektiv, falls der induzierte Homomorphismus $\dot{\varphi} : \dot{R} \to \dot{S}$ surjektiv ist.

(ii) φ ist genau dann bijektiv, wenn $\dot{\varphi}$ bijektiv ist.

Beweis:

i) Ist $\dot{\varphi}$ surjektiv, so gilt $\mathfrak{m}(S) = S \cdot \varphi(\mathfrak{m}(R)) + \mathfrak{m}(S)^2$. $\mathfrak{m}(S)$ ist ein endlicher S-Modul, damit ergibt das Nakayama-Lemma $\mathfrak{m}(S) = S \cdot \varphi(\mathfrak{m}(R))$. Nach Satz 5.19 wird dann S bezüglich R von der Konstanten 1 erzeugt, also gilt $S = \varphi(R)$ und φ ist surjektiv.

ii) Ist $\dot{\varphi}$ bijektiv, dann gilt notwendig $m = n$, und nach (i) ist φ surjektiv.

Es gibt somit einen analytischen Homomorphismus $\psi: S \to R$ mit $\varphi \circ \psi = id_S$. Das bedeutet, ψ ist injektiv. Da nun aber $\dot{\psi}$ bijektiv, also surjektiv ist, ist ψ ebenfalls surjektiv. Mit ψ ist dann auch φ ein Isomorphismus. Aus der Bijektivität von φ folgt umgekehrt sofort die Bijektivität von $\dot{\varphi}$ . .-

Folgerung 5.21 (Jacobischer Umkehrsatz)

Ist $\varphi : K \langle\langle X_1,\dots,X_n \rangle\rangle \to K \langle\langle Z_1,\dots,Z_n \rangle\rangle$ ein analytischer Homomorphismus, dann gilt:

$$\varphi \text{ ist bijektiv genau dann, wenn } \frac{\partial(\varphi(X_1),\dots,\varphi(X_n))}{\partial(Z_1,\dots,Z_n)}(0) \neq 0 .$$

Beweis:

Nach Bemerkung 5.15 wird $\dot{\varphi}$ bezüglich der Basen $\{\delta(X_1),\dots,\delta(X_n)\}$, $\{\delta(Z_1),\dots,\delta(Z_n)\}$ der Cotangentialräume durch die Jacobi-Matrix beschrieben. Diese ist invertierbar, wenn ihre Determinante eine Einheit ist (Satz 1.9). Das ist unter obiger Bedingung der Fall. .

Definition 5.6

Ein Element $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i X_n^i \in R$, mit $f_i \in R'$ für alle $i \in \mathbb{N}$, heißt X_n-allgemein von der Ordnung $s \geq 0$, falls $f_0,\dots,f_{s-1} \in \mathfrak{m}(R')$ und $f_s \notin \mathfrak{m}(R')$.

Für $n = 1$ ist $f \neq 0$ X_1-allgemein von der Ordnung $o(g)$.

Satz 5.22

Sei $g \in R = K \langle\langle X_1,\dots,X_n \rangle\rangle$, $n \geq 2$, $g \neq 0$, $o(g) =: s$. Dann gibt es einen Automorphismus $\sigma : R \to R$ mit: $\sigma(g)$ ist X_n-allgemein von der Ordnung s.

Beweis:

$g = \sum_{j=s}^{\infty} p_j$ sei die Entwicklung von g nach homogenen Polynomen, $p_s \neq 0$.

Sei $(c_1,\dots,c_n) \in K^n$ mit $p_s(c_1,\dots,c_n) \neq 0$. Setzen wir

$$p_j := \sum_{i_1+\dots+i_n=j} a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

und $\sigma(X_i) := X_i + c_i X_n$, $i = 1,\dots,n-1$, $\sigma(X_n) := c_n X_n$,

so gilt: σ ist Automorphismus, falls $c_n \neq 0$, was sich immer erreichen läßt, und

$$\sigma(p_j) = \sum_{i_1+\dots+i_n=j} a_{i_1\dots i_n} (X_1+c_1X_n)^{i_1}\dots(X_{n-1}+c_{n-1}X_n)^{i_{n-1}} (c_nX_n)^{i_n},$$

also

$$\sigma(p_j)\ (0,\dots,0,X_n) = X_n^{j} \sum_{i_1+\dots+i_n=j} a_{i_1\dots i_n} c_1^{i_1} \dots c_n^{i_n}$$

$$= p_j(c_1,\dots,c_n)\, X_n^{j}\ .$$

Aus $\sigma(g) = \sum_{j=s}^{\infty} \sigma(p_j)$ folgt $\sigma(g)\ (0,\dots 0,X_n) = \sum_{j=s}^{\infty} p_j(c_1,\dots,c_n)X_n^{j}$.

Das heißt $\sigma(g)$ ist X_n-allgemein von der Ordnung s. .-

Satz 5.23

Sei $g \in \mathfrak{m}(R)$, $g \neq 0$, $n > 0$, $\sigma\colon R \to R$ ein analytischer Automorphismus, so daß $\sigma(g)$ X_n-allgemein von der Ordnung $s > 0$ ist. Dann ist der analytische Homomorphismus $\tau : R \to R$, definiert durch

$$\tau(X_i) := \sigma^{-1}(X_i),\ i = 1,\dots,n-1\ ,\ \tau(X_n) := g \quad \text{endlich.}$$

Beweis:

Es ist $R\sigma(g)/_{RX_1+\dots+RX_{n-1}} = RX_n^{s}/_{RX_1+\dots+RX_{n-1}}$, also gilt

$$R\ \tau(\mathfrak{m}(R)) = R\ (\sigma^{-1}(X_1),\dots,\sigma^{-1}(X_{n-1}),g)$$

$$= \sigma^{-1}(R(X_1,\dots,X_{n-1},\sigma(g)))$$

$$= \sigma^{-1}(R(X_1,\dots,X_{n-1},X_n^{s})) \supseteq \mathfrak{m}(R)^{s}$$

Nach Satz 5.18 ist τ quasiendlich und somit nach Satz 5.19 endlich

Satz 5.24

R ist noethersch.

Beweis:

Bekanntlich ist ein kommutativer Ring noethersch, wenn jeder Restklassenring $R/_{Rf}$, $f \in R$, $f \neq 0$, noethersch ist. Wir führen den Beweis durch Induktion.

Für $n = 0$, also $R = K$, ist nichts zu zeigen.

Sei $n > 0$ und $g \in R$, $g \neq 0$, beliebig. Sei $\sigma : R \to R$ ein Automorphismus, so daß $\sigma(g)$ X_n-allgemein von der Ordnung s ist. Definieren wir $\tau : R \to R$ wie in Satz 5.23, so ist τ endlich, also R via τ ein endlicher R-Modul. Nach Bemerkung 5.16,(ii) ist dann auch $\bar{\tau} : {}^{R}/_{RX_n} \to {}^{R}/_{Rg}$ endlich.

Da ${}^{R}/_{RX_n} = R'$, ist somit ${}^{R}/_{Rg}$ endlicher R'-Modul. Da R' nach Induktionsannahme noethersch ist, ist ${}^{R}/_{Rg}$ ein noetherscher R'-Modul und damit erst recht ein noetherscher Ring. .-

§ 6 Differentialgleichungssysteme

Bekanntlich existiert unter gewissen Voraussetzungen eine Lösung des reellen Differentialgleichungssystems

$$(*) \quad y' = f(x,y) \ ,$$

die eindeutig bestimmt ist, falls eine Anfangsbedingung

$$y(x_o) = y_o$$

vorgegeben ist. In diesem Paragraphen wollen wir Differentialgleichungssysteme über einem beliebigen bewerteten Körper K der Charakteristik Null betrachten. Dabei soll das Funktionensystem f aus der Gleichung (*) aus konvergenten Potenzreihen über K bestehen. Unser Ziel ist, nachzuweisen, daß unter diesen Voraussetzungen - zusammen mit einer Anfangsbedingung - ebenfalls ein eindeutig bestimmtes Lösungssystem existiert. Dieses besteht aus konvergenten Potenzreihen über K und hängt, wie wir zeigen werden, sogar "analytisch" von Parametern und Anfangswerten ab.

1. Die formale Lösung

Wenn es überhaupt zu einem Differentialgleichungssystem konvergenter Potenzreihen eine konvergente Lösung geben soll, so muß dieses auch als System formaler Potenzreihen eine formale Lösung besitzen. Wir zeigen:

Satz 6.1

Es seien $f_p \in K[[T,Y_1,\dots,Y_n]]$, $p = 1,\dots,n$,

$$(1) \quad f_p(T,Y_1,\dots,Y_n) = \sum_{k_o,\dots,k_n} a_{pk_o\dots k_n} T^{k_o} Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n} \ ,$$

$$a_{pk_o\dots k_n} \in K \ .$$

Dann gibt es genau ein System $F = (F_1,\dots,F_n)$, $F_p \in K[[T]]$, $p = 1,\dots,n$, so daß gilt:

$$\text{(DGF)}\quad \begin{aligned} &\text{i)}\ F_p(0) = 0 && , \ p = 1,\ldots,n \\ &\text{ii)}\ \frac{\partial F_p}{\partial T}(T) = f_p(T,F_1(T),\ldots,F_n(T)) && , \ p = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

F heißt <u>Lösung von (DGF).</u>

<u>Beweis:</u>

Unsere Aufgabe ist es, die Koeffizienten $c_{pi} \in K$ zu den gesuchten Potenzreihen

(2) $F_p(T) := \sum_{i \geq 0} c_{pi}\, T^i$ mit $F_p(0) = 0$, $p = 1,\ldots,n$,

zu bestimmen. Aus $F_p(0) = 0$ folgt $c_{po} = 0$ für $p = 1,\ldots,n$. Sei

(3) $\sum_{i \geq k} d_{pki}\, T^i := (\sum_{i \geq 1} c_{pi}\, T^i)^k$, $p = 1,\ldots,n$, wobei wir

$d_{poo} := 1$ und $d_{poi} := 0$ für $i \geq 1$ setzen. Es ist dann

(4) $d_{pki} = \sum_{l_1+\ldots+l_k=i} c_{pl_1}\ldots c_{pl_k}$

Falls die Lösung F existiert, muß die Bedingung (DGF) i) erfüllt sein, d.h. wir können die F_p für die Unbestimmten Y_p substituieren; daraus ergibt sich:

$f_p(T,F_1(T),\ldots,F_n(T))$

$$= \sum_{k_o,\ldots,k_n} a_{pk_o\ldots k_n}\, T^{k_o} (\sum_{l_1 \geq 1} c_{1l_1}\, T^{l_1})^{k_1} \ldots (\sum_{l_n \geq 1} c_{nl_n}\, T^{l_n})^{k_n}$$

$$= \sum_{k_o,\ldots,k_n} a_{pk_o\ldots k_n}\, T^{k_o} (\sum_{l_1 \geq k_1} d_{1k_1l_1}\, T^{l_1}) \ldots (\sum_{l_n \geq k_n} d_{nk_nl_n}\, T^{l_n})$$

(5) $= \sum_{i \geq o} T^i (\sum_{k_o+l_1+\ldots+l_n=i} \sum_{k_1=o}^{l_1} \ldots \sum_{k_n=o}^{l_n} a_{pk_o\ldots k_n} d_{1k_1l_1} \ldots d_{nk_nl_n})$

Die Reihen F_p erfüllen genau dann die Bedingung (DGF) ii), wenn für jedes $p \in \{1,\dots,n\}$ die Koeffizienten gleich hoher Potenzen in

$$\frac{\partial F_p}{\partial T}(T) = \sum_{i \geq 1} i\, c_{pi}\, T^{i-1}$$

und in (5) übereinstimmen, das ist genau dann der Fall, wenn

$$(6) \quad i c_{pi} = \sum_{k_o+l_1+\dots+l_n=i-1} \; \sum_{k_1=o}^{l_1} \dots \sum_{k_n=o}^{l_n} a_{pk_o\dots k_n}\, d_{1k_1l_1} \dots d_{nk_nl_n}$$

für $p = 1,\dots,n$ und für alle $i \in \mathbb{N}^*$ gilt.

Mit Formel (4) lassen sich die Elemente $d_{pkl} \in K$ eindeutig aus den c_{pi}, $i \leq l$, $p = 1,\dots,n$, berechnen. Die rechte Seite von (6) hängt daher - abgesehen von den gegebenen $a_{pk_o\dots k_n} \in K$ - höchstens von $c_{p1},\dots,c_{pi-1}$, $p = 1,\dots,n$, ab. Die Gleichungen (6) sind somit Rekursionsformeln. Da die Anfangswerte der Rekursion c_{po}, $p = 1,\dots,n$, durch die Bedingung (DGF) i) eindeutig bestimmt sind und die Charakteristik von K Null ist, lassen sich die Koeffizienten c_{pi}, $p = 1,\dots,n$, $i \in \mathbb{N}$ in eindeutiger Weise berechnen. Die Gleichungen (6) geben also einerseits eine notwendige Bedingung für eine Lösung an, andererseits ist durch sie die Lösung von (DGF) schon in eindeutiger Weise bestimmt. .-

2. Konvergenz der formalen Lösung

Nehmen wir nun zusätzlich an, daß die vorgelegten Potenzreihen f_p konvergent sind, so gibt der folgende Satz Auskunft über die Beschaffenheit der Lösung F von (DGF).

Satz 6.2

Seien Potenzreihen f_p durch (1) gegeben und gelte $f_p \in K\langle\langle T,Y_1,\dots,Y_n\rangle\rangle$, $p = 1,\dots,n$, dann gilt für die Lösung $F = (F_1,\dots,F_n)$ von (DGF): $F_p \in K\langle\langle T\rangle\rangle$, $p = 1,\dots,n$.

Beweis:

Der Beweis von Satz 6.2 gliedert sich in zwei Teile. Ist K trivial bewertet, so ist, da $K [\![T]\!] = K \langle\!\langle T \rangle\!\rangle$, nichts zu zeigen. Die Fälle einer archimedischen und einer nichttrivialen, nichtarchimedischen Bewertung auf K bedürfen jedoch gesonderter Betrachtungen.

a) Der nichtarchimedische Fall

Sei also K durch $|\,|$ nichtarchimedisch bewertet. Der Nachweis der Konvergenz der F_p wird durch Vergleich mit der Exponentialreihe geführt.

Nach Satz 5.9 können wir o.B.d.A. annehmen

$$|a_{pk_o\ldots k_n}| \le 1 \quad \text{für alle} \quad (k_o,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ und } p = 1,\ldots,n.$$

Nach (6) und aufgrund der scharfen Dreiecksungleichung gilt dann:

$$|c_{pi}| \le \left|\frac{1}{i}\right| \max_{\substack{l_1+\ldots+l_n \le i-1 \\ 0 \le k_1 \le l_1 \\ \vdots \\ 0 \le k_n \le l_n}} \{|d_{1k_1l_1}|\cdots|d_{nk_nl_n}|\}$$

$$(7) \qquad \le \left|\frac{1}{i}\right| \max_{\substack{l_1+\ldots+l_n \le i-1 \\ 0 \le k_1 \le l_1 \\ \vdots \\ 0 \le k_n \le l_n \\ i_1^{(1)}+\ldots+i_{k_1}^{(1)} = l_1 \\ \vdots \\ i_1^{(n)}+\ldots+i_{k_n}^{(n)} = l_n}} \{(|c_{1i_1^{(1)}}|\cdots|c_{1i_{k_1}^{(1)}}|)\cdots(|c_{ni_1^{(n)}}|\cdots|c_{ni_{k_n}^{(n)}}|)\}$$

Wir behaupten nun

$$|c_{pi}| \le \left|\frac{1}{i!}\right| \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} \quad \text{und } p = 1,\ldots,n$$

und beweisen dies durch Induktion über i.

Für $i = 0$, $i = 1$ ist die Behauptung richtig, da
$c_{po} = 0, |c_{p1}| = |a_{po\ldots o}| \leq 1, p = 1,\ldots,n$.
Sei $i \geq 2$.

Zu zeigen: Ist $|c_{pj}| \leq |\frac{1}{j!}|$ für alle $j \leq i-1$ und $p = 1,\ldots,n$,
dann gilt auch $|c_{pi}| \leq |\frac{1}{i!}|$ für $p = 1,\ldots,n$.

Aufgrund der Induktionsvoraussetzungen, der Bedingungen unter (7) und mit Satz 4.4 folgern wir:

$$|c_{1i_1^{(1)}}|\ldots|c_{1i_{k_1}^{(1)}}| \leq |\frac{1}{i_1^{(1)}!}|\ldots|\frac{1}{i_{k_1}^{(1)}!}| \leq |\frac{1}{I_1!}|$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$|c_{ni_1^{(n)}}|\ldots|c_{ni_{k_n}^{(n)}}| \leq |\frac{1}{i_1^{(n)}!}|\ldots|\frac{1}{i_{k_n}^{(n)}!}| \leq |\frac{1}{I_n!}|$$

Satz 4.4 impliziert weiter

$$|c_{pi}| \leq |\frac{1}{i}| \quad (|\frac{1}{I_1!}|\ldots|\frac{1}{I_n!}|) \leq |\frac{1}{i}|\cdot|\frac{1}{(i-1)!}| = |\frac{1}{i!}| \quad , p = 1,\ldots,n.$$

Damit ist unsere Behauptung gezeigt.

Wir können aufgrund von Satz 4.6 und Satz 5.8 o.B.d.A. annehmen, daß $|\,|$ auf $\mathbb{Q}$ eine q-adische Bewertung induziert. Mit Satz 4.11 gilt dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_{pi}| \left(\frac{1}{q}\right)^i \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\frac{1}{i!}| \left(\frac{1}{q}\right)^i < \infty \quad , p = 1,\ldots,n .$$

Das aber bedeutet, $F_p \in K\langle\langle T\rangle\rangle$ im Falle einer nichtarchimedischen Bewertung auf K.

b) Der archimedische Fall

Sei nun K durch $|\,|$ archimedisch bewertet. Mit $|\,|_\infty$ sei die gewöhnliche Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Der Konvergenzbeweis wird mit Hilfe des Majorantenkriteriums geführt.

Definition 4.1

Eine formale Potenzreihe $\varphi \in \mathbb{R}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ heißt eine Majorante bezüglich $|\,|$ (kurz: $|\,|$-Majorante) der Potenzreihe $f \in K[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ genau dann, wenn für die Koeffizienten $\alpha_{k_1\ldots k_n} \in \mathbb{R}$ von φ und $a_{k_1\ldots k_n} \in K$ von f gilt

$$|a_{k_1\ldots k_n}| \leq \alpha_{k_1\ldots k_n} \quad \text{für alle} \quad (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n \;. -$$

Die Potenzreihen $f_p \in K\langle\!\langle T,Y_1,\ldots,Y_n\rangle\!\rangle$, $p = 1,\ldots,n$, besitzen nach Satz 6.1 eine formale Lösung $F = (F_1,\ldots,F_n)$ von (DGF) mit $F_p \in K[\![T]\!]$, $p = 1,\ldots,n$.

Zu zeigen: F_p ist bezüglich $|\,|$ konvergent, $p = 1,\ldots,n$.

Wir können die F_p als Potenzreihen aus $\hat{K}[\![T]\!]$ auffassen. Sind diese in $\hat{K}[\![T]\!]$ bezüglich $|\hat{\ }|$ konvergent, so auch - wegen $|\hat{\ }|\big|K = |\,|$ - bezüglich $|\,|$ in $K[\![T]\!]$.

Zu zeigen: F_p ist bezüglich $|\hat{\ }|$ konvergent, $p = 1,\ldots,n$.

Aufgrund des Satzes von Ostrowski (4.7) ist $\hat{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$ (bis auf Isomorphie), und $|\hat{\ }|$ ist äquivalent zu $|\,|_\infty$. Satz 5.8 besagt, daß die konvergenten Potenzreihenringe bezüglich äquivalenter Bewertungen gleich sind.

Zu zeigen: F_p ist bezüglich $|\,|_\infty$ konvergent, $p = 1,\ldots,n$.

Da $\mathbb{R}$ die Anforderungen an K in Satz 6.1 erfüllt, gibt es zu $\varphi_p \in \mathbb{R}[\![T,Y_1,\ldots,Y_n]\!]$, $p = 1,\ldots,n$, eine Lösung $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$ von (DGF) mit $\phi_p \in \mathbb{R}[\![T]\!]$, $p = 1,\ldots,n$. Wir zeigen nun:

Hilfssatz 6.3

Ist $\varphi_p \in \mathbb{R}[\![T,Y_1,\ldots,Y_n]\!]$ $|\,|_\infty$-Majorante von f_p, $p = 1,\ldots,n$, so gilt:

$$\phi_p \quad \text{ist} \quad |\,|_\infty\text{-Majorante von} \quad F_p, \; p = 1,\ldots,n.$$

Hilfssatz 6.4

Es gibt $|\,|_\infty$-Majoranten φ_p von f_p, $p = 1,\ldots,n$, mit der Eigenschaft: Die φ_p besitzen eine Lösung $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$ von DGF mit: $\phi_p \in \mathbb{R}\langle\!\langle T\rangle\!\rangle$, $p = 1,\ldots,n$.

Das bedeutet nun: F_p hat eine konvergente $|\,|_\infty$-Majorante ϕ_p, $p = 1,\dots,n$.

Damit ist auch F_p bezüglich $|\,|_\infty$ konvergent, $p = 1,\dots,n$, und wir sind bis auf den Beweis der Hilfssätze fertig. .-

Hilfssatz 6.3

Sind die Potenzreihen $\varphi_p \in \mathbb{R}[[T,Y_1,\dots,Y_n]]$ $|\,|_\infty$-Majoranten der in (1) definierten f_p, $p = 1,\dots,n$, so gilt für die Lösungen $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_n)$ bzw. $F = (F_1,\dots,F_n)$ von (DGF):

$$\phi_p \text{ ist } |\,|_\infty\text{-Majorante von } F_p,\ p = 1,\dots,n.$$

Beweis:

Die Koeffizienten ζ_{pi} der Reihen ϕ_p lassen sich mit Hilfe von Formel (6) errechnen, wobei die $a_{pk_o\dots k_n} \in K$ durch die Koeffizienten $\alpha_{pk_o\dots k_n} \in \mathbb{R}$ von φ_p und die d_{pkl} durch entsprechend definierte $\delta_{pkl} \in \mathbb{R}$ ersetzt werden müssen. Durch vollständige Induktion über i wollen wir zeigen, daß die Koeffizienten ζ_{pi} von ϕ_p die Majorantenbedingung

$$(8)\qquad \zeta_{pi} \geq |c_{pi}|_\infty \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N},\ p = 1,\dots,n$$

erfüllen.

Für die Indexpaare (p,o), $p = 1,\dots,n$, ist die Ungleichung (8) erfüllt, da $c_{po} = 0$, $\zeta_{po} = 0$ für $p = 1,\dots,n$.

Sei nun die Ungleichung (8) für alle Indexpaare (p,j), $p = 1,\dots,n$ und $j \leq i-1$, $i \geq 1$, erfüllt. Wenn wir beweisen können, daß (8) dann auch für alle Paare (p,i), $p = 1,\dots,n$, gültig ist, ist die Behauptung gezeigt.

$$
\begin{aligned}
i\zeta_{pi} &= \underbrace{\sum_{k_o+l_1+\dots+l_n=i-1} \; \sum_{k_1=o}^{l_1}\cdots\sum_{k_n=o}^{l_n}} \alpha_{pk_o\dots k_n}\, \delta_{1k_1l_1}\cdots\delta_{nk_nl_n} \\
&= \sum_{i-1}{}' \alpha_{pk_o\dots k_n} \Big(\underbrace{\sum_{i_1+\dots+i_{k_1}=l_1}} \zeta_{1i_1}\cdots\zeta_{1i_{k_1}}\Big)\cdots\Big(\sum_{i_1+\dots+i_{k_n}=l_n}\zeta_{ni_1}\cdots\zeta_{ni_{k_n}}\Big) \\
&\geq \sum_{i-1}{}' \alpha_{pk_o\dots k_n}\Big(\sum_{k_1,l_1}{}'' |c_{1i_1}|_\infty\cdots|c_{1i_{k_1}}|_\infty\Big)\cdots\Big(\sum_{k_n,l_n}{}'' |c_{ni_1}|_\infty\cdots|c_{ni_{k_n}}|_\infty\Big) \\
&\geq \sum_{i-1}{}' |a_{pk_o\dots k_n}|_\infty \Big|\sum_{k_1,l_1}{}'' c_{1i_1}\cdots c_{1i_{k_1}}\Big|_\infty\cdots\Big|\sum_{k_n,l_n}{}'' c_{ni_1}\cdots c_{ni_{k_n}}\Big|_\infty \\
&= \sum_{i-1}{}' |a_{pk_o\dots k_n}|_\infty\, |d_{1k_1l_1}|_\infty \cdots |d_{nk_nl_n}|_\infty \\
&\geq \Big|\sum_{i-1}{}' a_{pk_o\dots k_n}\, d_{1k_1l_1}\cdots d_{nk_nl_n}\Big|_\infty \\
&= |ic_{pi}|_\infty
\end{aligned}
$$

Daraus folgt $\zeta_{pi} \geq \frac{1}{i}\,|ic_{pi}|_\infty = |c_{pi}|_\infty$, $p = 1,\dots,n$, und das bedeutet ϕ_p ist $|\,|_\infty$-Majorante von F_p , $p = 1,\dots,n$. .-

Da die Potenzreihen f_p nach Voraussetzung bezüglich $|\,|$ und damit auch bezüglich $|\,|_\infty$ konvergieren, gibt es reelle Zahlen $D > 0$, $r > o$, mit

$$\sum_{k_o,\dots,k_n} |a_{pk_o\dots k_n}|_\infty\, r^{k_o+\dots+k_n} \leq D \quad ,$$

daraus folgt $$|a_{pk_o\dots k_n}|_\infty \leq \frac{D}{r^{k_o+\dots+k_n}}$$

<u>Hilfssatz 6.4</u>

Die Potenzreihen $\varphi_p \in \mathbb{R}[\![T,Y_1,\dots,Y_n]\!]$ mit den Koeffizienten

$$\alpha_{pk_o\dots k_n} := \frac{D}{r^{k_o+\dots+k_n}} \;,\quad p = 1,\dots,n \;,\; (k_o,\dots,k_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$$

sind konvergent, $|\,|_\infty$-Majoranten der Reihen f_p und besitzen eine Lösung $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_n)$ von (DGF) mit $\phi_p \in \mathbb{R}\langle\!\langle T\rangle\!\rangle$, $p = 1,\dots,n$.

Beweis:

Nach Definition sind die φ_p $||_\infty$-Majoranten der f_p, $p = 1,\dots,n$. Sie sind offensichtlich konvergent, und ihr Konvergenzbereich ist $R := \{(t,y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}: |t| < r, |y_1| < r,\dots,|y_n| < r\}$.
Es gilt:

$$\varphi_p(T,Y_1,\dots,Y_n) = \sum_{k_o,\dots,k_n} \frac{D}{r^{k_o+\dots+k_n}} T^{k_o} Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}$$

$$= (\sum_{k_o} D(\tfrac{1}{r}T)^{k_o}) (\sum_{k_1} (\tfrac{1}{r} Y_1)^{k_1}) \dots (\sum_{k_n} (\tfrac{1}{r} Y_n)^{k_n})$$

$$= \frac{D}{1-\frac{1}{r} T} \prod_{p=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{r} Y_p}$$

Für die eindeutig bestimmte formale Lösung $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_n)$ gilt:

$$(9) \quad \begin{aligned} &\phi_p(0) = 0 &&, p=1,\dots,n \\ &\frac{\partial \phi_p}{\partial T}(T) = \varphi_p(T,\phi_1(T),\dots,\phi_n(T)) = \frac{D}{1-\frac{1}{r} T} \prod_{p=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{r} \phi_p(T)} &&, p=1,\dots,n \end{aligned}$$

Zu zeigen ist: ϕ_p ist konvergent für $p = 1,\dots,n$.

Die eindeutig bestimmte formale Lösung $\varphi(T)$ der Differentialgleichung

$$(10) \qquad (1- \frac{1}{r} \varphi(T))^n \frac{\partial\varphi(T)}{\partial T} = \frac{D}{1-\frac{1}{r} T} \quad , \quad \varphi(0) = 0$$

ist offensichtlich auch eine Lösung von (9), das bedeutet

$$\varphi(T) = \phi_p(T) \quad , \quad p = 1,\dots,n .$$

Es bleibt zu zeigen: φ ist konvergent.

(10) ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen und läßt sich durch Integration direkt lösen. Es ergibt sich (siehe [4])

$$\varphi(T) = r(1- \left[1 + D(n+1) \ln(1-\tfrac{1}{r} T)\right]^{\frac{1}{n+1}})$$

ψ ist in einer Nullumgebung konvergent. Nach der Formel von Hadamard ist der Konvergenzradius

$$\rho(\psi) = r(1-e^{\frac{-1}{(n+1)D}}) \quad .$$.-

Damit haben wir nun auch Satz 6.2 vollständig bewiesen.

3. Abhängigkeit von Parametern

Analog zum Falle gewöhnlicher reeller Differentialgleichungen wollen wir nun die Frage behandeln, ob es eine Lösung von (DGF) gibt und welches Aussehen diese hat, falls die vorgelegten Potenzreihen f_p aus (1) von Parametern abhängen; das soll heißen, die Koeffizienten $a_{pk_o\ldots k_n}$ von f_p sind nicht mehr konstante Körperelemente, sondern Potenzreihen in den Unbestimmten $U_1,\ldots,U_s$. Schreiben wir abkürzend Y^k für $Y_1^{k_1}\ldots Y_n^{k_n}$ und U^l für $U_1^{l_1}\ldots U_s^{l_n}$, so bedeutet das

$$(11) \qquad f_p = \sum_{k_o,\ldots,k_n} a_{pk_ok}(U)\, T^{k_o} Y^k$$

$$= \sum_{k_o,\ldots,k_n} (\sum_l b_{pk_okl} U^l)\, T^{k_o} Y^k$$

$$= \sum_{k_o,\ldots,k_n,l_1,\ldots,l_s} b_{pk_o\ldots k_n l_1\ldots l_s} T^{k_o} Y^k U^l \quad .$$

"Abhängigkeit von Parametern" heißt also in unserer "Welt", daß die gegebenen Potenzreihen f_p Elemente von

$K [\![U_1,\ldots,U_s]\!] [\![T,Y_1,\ldots,Y_n]\!] = K [\![T,Y_1,\ldots,Y_n,U_1,\ldots,U_s]\!] =: K[\![T,Y,U]\!]$

sind.

Satz 6.5

Es seien $f_p \in K [\![T,Y,U]\!]$, $p = 1,\ldots,n$, gegeben. Dann gibt es genau ein System $F = (F_1,\ldots,F_n)$, $F_p \in K [\![T,U]\!]$ $p = 1,\ldots,n$ mit

(DGP)

i) $F_p(0) = 0$, $p = 1,\ldots,n$

ii) $\frac{\partial F_p}{\partial T}(T,U) = f_p(T,F_1(T,U),\ldots,F_n(T,U))$, $p = 1,\ldots,n$

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zu Satz 6.1. Wir setzen formal an

$$F_p(T,U) = \sum_{i,l} c'_{pil} \; T^i U^l$$

$$= \sum_i \Big(\sum_{l_1,\dots,l_s} c'_{pil_1\dots l_s} U_1^{l_1} \dots U_s^{l_s} \Big) T^i$$

$$= \sum_i c_{pi} (U) \; T^i$$

Sind die Potenzreihen f_p durch (11) gegeben, so gilt dann mit

$$\sum_{i\geq k} d_{pki}(U) \; T^i := \Big(\sum_{i\geq 1} c_{pi}(U) \; T^i \Big)^k \quad \text{nach (4)}$$

$$(12) \quad ic_{pi}(U) = \sum_{k_o+l_1+\dots+l_n=i-1} \; \sum_{k_1=o}^{l_1} \dots \sum_{k_n=o}^{l_n} a_{pk_o\dots k_n}(U) \; d_{1k_1l_1}(U)\dots d_{nk_nl_n}(U) \; .$$

Alle oben durchgeführten Operationen - Substituieren, Addieren und Multiplizieren von Potenzreihen - sind definiert und führen zu eindeutig bestimmten Lösungen. (12) stellt (Begründung wie in Satz 6.1) eine Rekursionsformel dar mit eindeutig festgelegten Anfangswerten. Da die Charakteristik von K Null ist, sind die Potenzreihen $c_{pi}(U) \in K[\![U]\!]$ auf eindeutige Weise berechenbar. Daraus ergibt sich, daß es genau eine Lösung $F = (F_1,\dots,F_p)$ von (DGP) gibt mit $F_p \in K[\![T,U_1,\dots,U_s]\!]$, $p=1,\dots,n$.-

Setzen wir die f_p als konvergent voraus, so ergibt sich auch hier das erwartete Ergebnis.

Satz 6.6

~~Es seien $f_p \in K \langle\!\langle T,Y,U \rangle\!\rangle$, $p = 1,\dots,n$, gegeben. Dann gilt für~~ die eindeutig bestimmte formale Lösung $F = (F_1,\dots,F_n)$ von (DGP)

$$F_p \in K \langle\!\langle T,U_1,\dots,U_s \rangle\!\rangle \quad p = 1,\dots,n \; .$$

Beweis:

Wir wollen den Beweis nur skizzieren, da er analog zum Beweis von Satz 6.2 verläuft und nichts Neues bringt, jedoch erheblich mehr Rechen- und Schreibarbeit verlangt.

Im Falle der trivialen Bewertung auf K ist wiederum alles klar. Ist K nichttrivial nichtarchimedisch bewertet, so geht man folgendermaßen vor:

Man rechnet die rechte Seite von (12) so weit aus, daß sich die Koeffizienten $c'_{pil_1\ldots l_s}$ von F_p rekursiv durch Koeffizientenvergleich aus den Koeffizienten der Potenzreihen $a_{pk_o\ldots k_n}$, $d_{1k_1l_1},\ldots,d_{nk_nl_n}$ berechnen lassen. O.B.d.A. kann man wieder für die Koeffizienten b... von f_p annehmen $|b\ldots| \leq 1$. Man zeigt dann, daß die Reihe $\sum\limits_{i,l_1,\ldots,l_s} \frac{1}{i!\ l_1!\ldots l_s!} T^i U_1^{l_1}\ldots U_s^{l_s}$ konvergiert, schätzt die $|c'_{pil_1\ldots l_s}|$ wie in Satz 6.2 a) gegen die $\frac{1}{i!\ l_1!\ldots l_s!}$ ab und erhält so die Konvergenz im nichtarchimedischen Fall.

Ist K archimedisch bewertet, so argumentieren wir ebenfalls wie in Satz 6.2 b). Wir betten K in seine Komplettierung bezgl. $||$ ei und können dann o.B.d.A. in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit dem gewöhnlichen Betrag $||_\infty$ rechnen. Wir zeigen wie in Satz 6.3, daß jedes System von $||_\infty$-Majoranten φ_p von f_p, $p = 1,\ldots,n$, Lösungen $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$ bzw. $F = (F_1,\ldots,F_n)$ besitzt mit der Eigenschaft ϕ_p ist Majorante von F_p, $p = 1,\ldots,n$. Können wir zeigen, daß es $||_\infty$-Majoranten φ_p gibt, für deren Lösung ϕ gilt, ϕ_p ist konvergent für $p = 1,\ldots,n$, dann sind wir fertig. Wir geben solche Majoranten an.

Da die f_p konvergieren, gibt es D, $r \in R_+^*$ mit

$$b_{pk_o\ldots k_n l_1\ldots l_s} \leq \frac{D}{r^{k_o+\ldots+k_n+l_1+\ldots+l_s}}$$

Setze:

$$ß_{pk_o\ldots k_n l_1\ldots l_s} := \frac{D}{r^{k_o+\ldots+k_n+l_1+\ldots+l_s}}$$

$\varphi_p := \Sigma \; ß_{pk_o kl} T^{k_o} Y^k U^l$ ist konvergent und

$||_\infty$-Majorante von f_p. $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$ mit

$$\phi_p(T,U_1,\ldots,U_s) := r(1-\left[1+D(n+1)\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{r}U_i}\right) \ln(1-\tfrac{1}{r}T)\right]^{\frac{1}{n+1}}), p=1,\ldots,n$$

ist konvergent und hat die Eigenschaft

$$\phi_p(0) = 0 \qquad , p=1,\ldots,n$$

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial T}(T,U_1,\ldots,U_s) = \varphi_p(T,\phi_1(T,U),\ldots,\phi_n(T,U)), p = 1,\ldots,n$$

Damit ist der Beweis erledigt. .-

4. Abhängigkeit von Anfangsbedingungen

In der Differentialgleichungstheorie schließt sich in natürlicher Weise die Untersuchung der Struktur der Lösung einer Differentialgleichung bei Variation der Anfangsbedingung an. Im folgenden Satz wird dieses Problem formuliert und beantwortet.

Satz 6.7

Sei $f_p \in K\langle\langle T,Y_1,\ldots,Y_n\rangle\rangle$, $h_p \in K\langle\langle V_1,\ldots,V_m\rangle\rangle$, $h_p(0) = 0$, $p = 1,\ldots,n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Potenzreihen $F_p \in K\langle\langle T,V_1,\ldots,V_m\rangle\rangle$, $p = 1,\ldots,m$, mit

(DGA)

i) $F_p(0,V_1,\ldots,V_m) = h_p(V_1,\ldots,V_m)$, $p=1,\ldots,n$

ii) $\frac{\partial F_p}{\partial T}(T,V_1,\ldots,V_m) = f_p(T,F_1(T,V),\ldots,F_n(T,V))$, $p=1,\ldots,n$

Beweis:

Alle in i) und ii) vorgenommenen Substitutionen sind definiert, da $h_p \in \mathfrak{m}(K\langle\!\langle V\rangle\!\rangle)$ und $F_p \in \mathfrak{m}(K\langle\!\langle T,V\rangle\!\rangle)$.

Sei $\varphi : K\langle\!\langle T,Y\rangle\!\rangle \to K\langle\!\langle T,Y,V\rangle\!\rangle$ definiert durch

$$T \to T\ ,\ Y_p \to Y_p + h_p\ ,\ p = 1,\ldots,n\ .$$

Für jedes $f \in K\langle\!\langle T,Y\rangle\!\rangle$ ist $\varphi(f)$ damit eine wohlbestimmte Potenzreihe aus $K\langle\!\langle T,Y,V\rangle\!\rangle$. Sei $h := (h_1,\ldots,h_n)$ und

$$g_p(T,Y,V) := \varphi(f_p(T,Y)) = f_p\ (T,Y+h)$$

Nach Satz 6.6 gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $G = (G_1,\ldots,G_n)$, $G_p \in K\langle\!\langle T,V_1,\ldots,V_n\rangle\!\rangle$, $p = 1,\ldots,n$, mit

$$G_p(0) = 0,\ \frac{\partial G_p}{\partial T}\ (T,V) = g_p(T,G(T,V),V) \qquad , p = 1,\ldots,n.$$

Sei nun

$$F_p(T,V_1,\ldots,V_m) := G_p(T,V_1,\ldots,V_m) + h_p(V_1,\ldots,V_m),$$

dann gilt:

$$F_p \in K\langle\!\langle T,V\rangle\!\rangle$$

i) $F_p(0,V) = G_p(0,V) + h_p(V) = h_p(V) \qquad , p = 1,\ldots,n$

ii)
$$\begin{aligned}\frac{\partial F_p}{\partial T}\ (T,V) &= \frac{\partial G_p}{\partial T}\ (T,V) + \frac{\partial h_p}{\partial T}\ (V)\\ &= g_p(T,G(T,V),V)\\ &= \varphi(f_p(T,G(T,V)))\\ &= f_p(T,G(T,V)+h)\\ &= f_p(T,F(T,V)) \qquad , p = 1,\ldots,n.\end{aligned}$$

Also erfüllt $F = (F_1,\ldots,F_n)$ die Bedingungen von (DGA). .-

5. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Als unmittelbare Folgerung aus den in den Abschnitten 1. - 4. bewiesenen Sätzen ergibt sich

Satz 6.8 (EES)

Sei $f_i \in K \langle\langle T, Y_1, \ldots, Y_n, U_1, \ldots, U_s \rangle\rangle =: K \langle\langle T, Y, U \rangle\rangle$, $i = 1, \ldots, n$,
und sei $h_i \in \mathfrak{m}(K \langle\langle V_1, \ldots, V_m \rangle\rangle) =: \mathfrak{m}(K \langle\langle V \rangle\rangle)$, $i = 1, \ldots, n$,
dann gibt es ein eindeutig bestimmtes System von Potenzreihen
$F = (F_1, \ldots, F_n)$, $F_i \in K \langle\langle T, V_1, \ldots, V_m, U_1, \ldots, U_s \rangle\rangle = K \langle\langle T, V, U \rangle\rangle$,
$i = 1, \ldots, n$, mit der Eigenschaft

(DGL)
i) $F_i(0, V, U) = h_i(V)$
ii) $\frac{\partial F_i}{\partial T}(T, V, U) = f_i(T, F_1(T, V, U), \ldots, F_n(T, V, U), U)$

F heißt die Lösung von (DGL). .-

§ 7 Äußere Algebra

Wir wenden uns nun einem anderen Teilgebiet der Algebra, der multilinearen Algebra, zu. Dabei werden wir uns besonders für äußere Potenzen von Moduln, speziell von freien Moduln, und für die Rechenregeln des äußeren Produkts interessieren. In diesem Paragraphen soll R immer für einen kommutativen Ring mit 1 stehen, und M bezeichne einen Modul über R.

1. Das Tensorprodukt

Zunächst wollen wir einen R-Modul T konstruieren mit der Eigenschaft, daß die p-linearen Abbildungen $\prod_{i=1}^{p} M_i \to G$ (vgl. Def. 2.1) in einer eineindeutigen Beziehung zu den R-linearen Abbildungen $T \to G$ stehen, und zwar für alle R-Moduln G.

Definition 7.1

Seien M_i, $i = 1,\ldots,p$, $p \geq 2$, R-Moduln. Ein Paar (T,t) heißt Tensorprodukt der M_i, $i = 1,\ldots,p$, wenn gilt:

(T.1) T ist ein R-Modul.

(T.2) $t : \prod_{i=1}^{p} M_i \to T$ ist p-lineare Abbildung.

(T.3) Zu jedem R-Modul G und zu jeder p-linearen Abbildung $f: \prod_{i=1}^{p} M_i \to G$ gibt es genau eine R-lineare Abbildung $h: T \to G$ mit $f = h \circ t$, d.h. h macht das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^{p} M_i \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, dashed, "h"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Satz 7.1

Sind (T,t) und (T',t') zwei Tensorprodukte zu M_i, $i = 1,\ldots,p$, dann gibt es genau einen R-Isomorphismus $g: T' \to T$ mit

$$t = g \circ t' .$$

Beweis:

Nach (T.3) existiert zu T' und zu t': $\prod_{i=1}^{p} M_i \to T'$ genau eine R-lineare Abbildung $g' = T \to T'$ mit $t' = g' \circ t$, weil (T,t) nach Voraussetzung Tensorprodukt ist. Andererseits existiert, da (T',t') ebenfalls Tensorprodukt ist, zu T und t: $\prod_{i=1}^{p} M_i \to T$ genau eine R-lineare Abbildung $g: T' \to T$ mit $t = g \circ t'$. Aus $t = g \circ g' \circ t = id \circ t$ und $t' = g' \circ g \circ t' = id \circ t'$ folgt, g ist bijektiv. .-

Satz 7.2

Es gibt ein Tensorprodukt der M_i, $i = 1, \ldots, p$.

Beweis:

Sei (M,j) der von der Menge $\prod_{i=1}^{p} M_i$ erzeugte freie Modul (vgl. Bem. 1.4), d.h. M wird erzeugt von den Elementen $j(x_1, \ldots, x_p)$, $x_i \in M_i$. Sei N der Untermodul von M, der von allen Elementen von M der folgenden Form erzeugt wird:

$$j(x_1, \ldots, x_i + x_i', \ldots, x_p) - j(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) - j(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p)$$

$$j(x_1, \ldots, a x_i, \ldots, x_p) - a\, j(x_1, \ldots, x_p)$$

mit $x_j, x_j' \in M_j$, $j = 1, \ldots, p$, $a \in R$. Sei $T := {}^{M}/_{N}$ und $e : M \to T$ der natürliche Epimorphismus. Dann ist (T,t) mit $t := e \circ j$ ein Tensorprodukt zu $\prod_{i=1}^{p} M_i$, denn : T ist R-Modul und nach Konstruktion ist t p-linear. Ist G irgendein R-Modul und f: $\prod_{i=1}^{p} M_i \to G$ p-lineare Abbildung, dann gibt es, weil M frei ist, genau einen R-Homomorphismus $h': M \to G$ mit $f = h' \circ j$. Da f p-linear ist, verschwindet h' auf N nach Konstruktion. Somit können wir h' zu einem R-Homomorphismus $h: T \to G$ durchdrücken mit $f = h \circ e \circ j = h \circ t$. Damit ist auch h eindeutig bestimmt. .

~~Im weiteren werden wir nun den Fall betrachten $M_i = M$, $i = 1, \ldots, p$.~~

Wir setzen

$$\bigotimes_{i=1}^{p} M_i := (T,t),$$

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_p := t(x_1,\ldots,x_p) \ , \qquad x_i \in M_i,\ i = 1,\ldots,p \ .$$

$x_1 \otimes \ldots \otimes x_p$ nennen wir das Tensorprodukt von $x_1,\ldots,x_p$. Aufgrund der Konstruktion wird $\bigotimes_{i=1}^{p} M_i$ von den Elementen $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p$ erzeugt.

2. Äußere Potenzen eines Moduls

Nun konstruieren wir einen R-Modul, der die gleichen Eigenschaften wie das Tensorprodukt bezüglich p-linearer alternierender Abbildungen besitzt.

Definition 7.2

Sei M ein R-Modul. Ein Paar (A,a) heißt p-te äußere Potenz von M, wenn gilt:

(A.1) A ist R-Modul.

(A.2) $a\colon M^p \to A$ ist alternierende p-lineare Abbildung.

(A.3) Sei G ein beliebiger R-Modul, $f\colon M^p \to G$ eine beliebige alternierende p-lineare Abbildung, dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $h\colon A \to G$ mit $f = h \circ a$.

Diagramm:

$$\begin{tikzcd} M^p \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "f"'] & & A \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Satz 7.3

Sind (A,a) und (A',a') zwei p-te äußere Potenzen von M, so gibt es einen R-Isomorphismus $g\colon A' \to A$ mit $a = g \circ a'$.

Beweis:

$$\begin{tikzcd} M^p \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "a'"'] & A \arrow[d, dashed] \\ & A' \end{tikzcd} \quad \exists!\ g' : a' = g' \circ a \qquad\qquad \begin{tikzcd} M^p \arrow[r, "a'"] \arrow[dr, "a"'] & A' \arrow[d, dashed] \\ & A \end{tikzcd} \quad \exists!\ g :\ a = g \circ a'$$

Es folgt $a' = g' \circ g \circ a' = id \circ a'$, $a = g \circ g' \circ a = id \circ a$.
Damit ist g bijektiver Homomorphismus. .-

Satz 7.4

Zu jedem R-Modul M und zu jedem $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine p-te äußere Potenz.

Beweis:

Für p = 1 erfüllt (A,a) mit A:= M, a:= id alle Anforderungen. Sei $p \geq 2$. Nach Satz 7.1, 7.2 existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Tensorprodukt $\bigotimes_{i=1}^{p} M$. Sei $t: M^p \to \bigotimes_{i=1}^{p} M$ die kanonische Abbildung, und sei N der Untermodul von $\bigotimes_{i=1}^{p} M$, der von allen Elementen $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \in \bigotimes_{i=1}^{p} M$ erzeugt wird, bei denen zwei Komponenten gleich sind. Wir definieren

$$A := \bigotimes_{i=1}^{p} M / N$$

Ist $e: \bigotimes_{i=1}^{p} M \to A$ der kanonische Epimorphismus, dann ist $a := e \circ t$ trivialerweise p-linear und nach Konstruktion von A sogar alternierend. Sei nun G ein beliebiger R-Modul und $f: M^p \to G$ eine beliebige alternierende p-lineare Abbildung. Aufgrund der Eigenschaften des Tensorproduktes existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $h': \bigotimes_{i=1}^{p} M \to G$ mit $f = h' \circ t$. h' verschwindet aber auf N, da f alternierend ist. Somit induziert h' eine eindeutig bestimmte R-lineare Abbildung $h: A \to G$ mit $f = h \circ e \circ t = h \circ a$ . .-

Die p-te äußere Potenz (A,a) eines Moduls M wollen wir - der Literatur folgend - mit

$$\bigwedge^p M := (A,a)$$

bezeichnen. Die kanonische Abbildung a wird dabei wie üblich unterdrückt. Für den Fall $p = 0$ setzen wir

$$\bigwedge^0 M := R$$

Die Elemente von $\bigwedge^p M$ heißen <u>p-Vektoren</u>. Die 0-Vektoren sind also die Skalare. Wir schreiben

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_p := a(x_1,\ldots,x_p) = e(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)$$

und nennen diese Elemente von $\bigwedge^p M$ <u>zerlegbare p-Vektoren</u>. Nach Konstruktion wird $\bigwedge^p M$ von den zerlegbaren p-Vektoren erzeugt.

<u>Folgerung 7.5</u>

Für beliebige R-Moduln M und G gilt:

$A^p(M,G)$ ist R-isomorph zu $\mathrm{Hom}(\bigwedge^p M,G)$ . .-

3. Das äußere Produkt

Die Abbildungen

$$(x_1,\ldots,x_p) \to x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_q \quad , M^p \to \bigwedge^{p+q} M$$
$$(x_1,\ldots,x_q) \to x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_q \quad , M^q \to \bigwedge^{p+q} M$$

sind p-(bzw. q-) linear und alternierend für jedes fest gewählte Tupel $(y_1,\ldots,y_q)$ (bzw. $(x_1,\ldots,x_p)$) . Nach (A.3) gibt es dann eindeutig bestimmte lineare Abbildungen

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \to x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_q \quad , \bigwedge^p M \to \bigwedge^{p+q} M$$
$$y_1 \wedge \ldots \wedge y_q \to x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_q \quad , \bigwedge^q M \to \bigwedge^{p+q} M$$

für jeden fest gewählten q-(bzw. p-) Vektor $y_1 \wedge \ldots \wedge y_q$ (bzw. $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$) .

Das bedeutet, daß die Abbildung

$$(*)\quad (x_1\wedge \dots \wedge x_p, y_1\wedge \dots \wedge y_q) \to x_1\wedge \dots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_q \,,$$

$$\bigwedge^p M \times \bigwedge^q M \to \bigwedge^{p+q} M$$

in jeder Komponente R-linear, also bilinear ist.

<u>Definition 7.3</u>

Mit $\wedge : \bigwedge^p M \times \bigwedge^q M \to \bigwedge^{p+q} M$ wollen wir die in (*) definierte Abbildung bezeichnen. $\alpha \wedge \beta$ heißt das <u>äußere Produkt</u> von $\alpha \in \bigwedge^p M$, $\beta \in \bigwedge^q M$.

Im Falle $p = 0$, $q = 1$, ist $a \wedge x$, $a \in R$, $x \in M$ nichts anderes als das skalare Produkt $a \cdot x$.

<u>Rechenregeln 7.6</u>

(1) $(x_1\wedge\dots\wedge x_p) \wedge (y_1\wedge\dots\wedge y_q) = x_1\wedge\dots\wedge x_p\wedge y_1\wedge\dots\wedge y_q$

(2) $x_1\wedge\dots\wedge(ax_i+x_i') \wedge\dots\wedge x_p = ax_1\wedge\dots\wedge x_i\wedge\dots\wedge x_p + x_1\wedge\dots\wedge x_i'\wedge\dots\wedge x_p$

(3) $x_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge x_{\sigma(p)} = \operatorname{sgn}\sigma \; x_1\wedge\dots\wedge x_p$

(4) $(\alpha_1+\alpha_2) \wedge (\beta_1+\beta_2) = \alpha_1\wedge\beta_1 + \alpha_1\wedge\beta_2 + \alpha_2\wedge\beta_1 + \alpha_2\wedge\beta_2$

(5) $\alpha\wedge\beta = (-1)^{p\cdot q}\; \beta\wedge\alpha$

(6) $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) =: \alpha\wedge\beta\wedge\gamma$

mit y_j, $x_j \in M$, $a \in R$, $\alpha_i \in \bigwedge^p M$, $\beta_i \in \bigwedge^q M$, $\gamma \in \bigwedge^r M$.

Obige Rechenregeln sind einfache Folgerungen aus der Multilinearität von " $\wedge$ " und der Tatsache, daß ein zerlegbarer p-Vektor verschwindet, falls zwei seiner Komponenten übereinstimmen.

(1) und (6) berechtigen uns, $x_1\wedge\dots\wedge x_p$ das äußere Produkt von $x_1,\dots,x_p \in M$ zu nennen.

<u>Definition 7.4</u>

$$\bigwedge M := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p M$$ heißt die <u>äußere Algebra von M</u> .

$\wedge M$ ist als direkte Summe von R-Moduln ein R-Modul. Durch das oben definierte äußere Produkt wird ein Produkt $\wedge : \wedge M \to \wedge M$ gegeben, das alle Forderungen an eine R-Algebra befriedigt. Der einzige Schönheitsfehler ist die Nichtkommutativität von $\wedge$.

4. Äußere Potenzen einer R-linearen Abbildung

Sind M und N R-Moduln und ist $f: M \to N$ R-linear, dann ist durch

$$(x_1,\dots,x_p) \to f(x_1)\wedge\dots\wedge f(x_p)\ ,\ x_i \in M,\ i = 1,\dots,p\ ,$$

offensichtlich eine p-lineare alternierende Abbildung $M^p \to \wedge^p N$. gegeben. Nach (A.3) gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\wedge^p M \to \wedge^p N$, die wir mit $\wedge^p f$ bezeichnen wollen, mit der Eigenschaft

$$\wedge^p f(x_1\wedge\dots\wedge x_p) = f(x_1)\wedge\dots\wedge f(x_p)\ .$$

Diese eindeutig bestimmte Abbildung $\wedge^p f : \wedge^p M \to \wedge^p N$ nennen wir die <u>p-te äußere Potenz von f</u>. Für $p = o$ ist $\wedge^o f$ ohne Sinn, für $p = 1$ gilt $\wedge^1 f = f$.

Mit geeignet gewählten f, g, α, β gelten folgende unmittelbar einsichtigen

<u>Rechenregeln 7.7</u>

(1) $\wedge^p(f\circ g) = (\wedge^p f) \circ (\wedge^p g)$

(2) $\wedge^{p+q} f(\alpha\wedge\beta) = \wedge^p f(\alpha) \wedge \wedge^q f(\beta)$

(3) $\wedge^p \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{\wedge^p M}$.-

<u>Satz 7.8</u>

Sind M und N freie R-Moduln und ist die lineare Abbildung $f: M\to N$ injektiv, so ist auch $\wedge^p f : \wedge^p M \to \wedge^p N$ injektiv.

Beweis:

Ist $f: M \to N$ injektiv, so gibt es eine lineare Abbildung $g: N \to M$ (N frei!) mit $g \circ f = id_M$. Aus Regel 7.7, (1), (3) folgt $(\Lambda^p g) \circ (\Lambda^p f) = id_{\Lambda^p M}$. Das aber heißt, $\Lambda^p f$ ist injektiv. .-

5. Äußere Potenzen eines freien Moduls

Der Existenzbeweis von äußeren Potenzen eines Moduls liefert, daß diese von den zerlegbaren p-Vektoren erzeugt werden. Man kann dieses Ergebnis noch verbessern, und es zeigt sich, daß bei freien Moduln eine schöne Dimensionsformel gilt.

Satz 7.9

Ist $\{x_1,\dots,x_n\}$ ein Erzeugendensystem eines R-Moduls M, so wird $\Lambda^p M$ von $\{x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p} : i_j \in \{1,\dots,n\}, j = 1,\dots,p\}$ erzeugt.

Beweis:

Sei $\alpha \in \Lambda^p M$, o.B.d.A. $\alpha = y_1 \wedge \dots \wedge y_p$. Mit $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$ folgt

$$y_1 \wedge \dots \wedge y_p = \left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} x_{i_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_p=1}^{n} a_{pi_p} x_{i_p}\right)$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a_{1i_1} \dots a_{pi_p} \, x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p} .$$.-

Mit Rechenregel 7.6, (3) ergibt sich:

Folgerung 7.10

M wird bereits von $\{x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ erzeugt.

Aus der Tatsache, daß ein zerlegbarer p-Vektor mit zwei gleichen Komponenten verschwindet, erhalten wir:

Folgerung 7.11

Ist $cgM = n$, dann gilt $\Lambda^p M = 0$ für $p > n$. .-

Satz 7.12

Ist M ein freier R-Modul mit der Basis $\{x_1,\dots,x_n\}$, dann ist $\Lambda^p M$ frei und es gilt:

$$\dim \Lambda^p M = \binom{n}{p} .$$

Beweis:

Nach 7.10 ist $B := \{x_{i_1}\wedge\dots\wedge x_{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ ein Erzeugendensystem mit $\binom{n}{p}$ Elementen. Zu zeigen bleibt noch: B ist linear unabhängig.

a) $p = n$

Aus Satz 1.7 wissen wir, daß $A^n(M)$ die Basis $\{\det\}$ besitzt mit $\det(x_1,\dots,x_n) = 1$. Nach (A.3) gibt es genau eine lineare Abbildung $h: \Lambda^n M \to R$ mit $h(x_1\wedge\dots\wedge x_n) = \det(x_1,\dots,x_n) = 1$. Sei $c\in R$ mit $c(x_1\wedge\dots\wedge x_n) = 0$, dann gilt

$c = c\det(x_1,\dots,x_n) = c\,h(x_1\wedge\dots\wedge x_n) = h(cx_1\wedge\dots\wedge x_n) = h(0) = 0$.
Also ist $\{x_1\wedge\dots\wedge x_n\}$ Basis von $\Lambda^n M$.

b) $1 \leq p \leq n$

Sei $0 = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} a_{i_1\dots i_p}\, x_{i_1}\wedge\dots\wedge x_{i_p}$, $a_{i_1\dots i_p} \in R$.

Sei $(j_1,\dots,j_p)$ ein beliebiges p-Tupel mit $1 \leq j_1 <\dots< j_p \leq n$, und sei $(j_{p+1},\dots,j_n)$ ein $(n-p)$-Tupel, das aus den Elementen von $\{1,\dots,n\}$ besteht, die nicht Komponenten von $(j_1,\dots,j_p)$ sind. Dann gilt:

$$0 = \Big(\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} a_{i_1\dots i_p}\, x_{i_1}\wedge\dots\wedge x_{i_p}\Big)\wedge x_{j_{p+1}}\wedge\dots\wedge x_{j_n}$$

$$= (a_{j_1\dots j_p}\, x_{j_1}\wedge\dots\wedge x_{j_p})\wedge x_{j_{p+1}}\wedge\dots\wedge x_{j_n}$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma\; a_{j_1\dots j_p}\, x_1\wedge\dots\wedge x_n$$

Nach a) folgt daraus $a_{j_1\dots j_p} = 0$, und wir sind fertig. .-

<u>Folgerung 7.13</u>

$$\dim \Lambda M = 2^n .$$

.-

§ 8 Derivationen und Differentialmoduln

In diesem Paragraphen geht es darum, die Begriffe "Derivation" und "Differentialmodul" einzuführen und einige ihrer wichtigen Eigenschaften herauszuarbeiten. Die gesamte Theorie kann über beliebigen kommutativen Ringen mit 1 und beliebigen Moduln über diesen aufgezogen werden. Im Rahmen dieser Arbeit sind wir jedoch nicht an solchen Ergebnissen interessiert. Da später nur Aussagen über Differentialmoduln über konvergenten Potenzreihenringen benötigt werden, wollen wir uns auf solche beschränken und bemerken, daß fast alle aufgeführten Sätze auch für analytische Stellenalgebren gelten. Wie immer bezeichne K einen bewerteten Körper der Charakteristik Null, es seien $R:=K\langle\langle X_1,\dots,X_n\rangle\rangle$ und $S := K\langle\langle Y_1,\dots,Y_m\rangle\rangle$, M sei ein endlich erzeugter R-Modul.

1. Derivationen

Definition 8.1

Eine K-lineare Abbildung $D: R \to M$ heißt eine *(K-)Derivation von R mit Werten in M* (kurz *Derivation*), wenn die Produktregel

$$D(f\cdot g) = f\cdot Dg + g\cdot Df \quad \text{für alle } f,g\in R \quad \text{gilt.}$$

Man sieht sofort, daß die Menge aller Derivationen von R mit Werten in M einen K-Vektorraum bildet, den wir mit *Der(R,M)* bezeichnen wollen. Statt Der(R,R) schreiben wir *Der(R)*. Durch $(aD)\,f := a(Df)$, $f\in R$, wird bei festem $a\in R$, $D\in \mathrm{Der}(R,M)$ offensichtlich wieder eine Derivation gegeben, das bedeutet, daß Der(R,M) sogar eine R-Modulstruktur trägt.

Bemerkung 8.1

Es gilt $D(K) = \{0\}$ für jede Derivation D, da aus $D(1) = D(1\cdot 1) = 1\,D(1) + 1\,D(1)$ folgt, $D(1) = 0$.

Bemerkung 8.2

Sei $\varphi: R \to S$ ein analytischer Homomorphismus, dann wird durch

$$\varphi^o(D) := D \circ \varphi$$

für jeden S-Modul N ein R-Homomorphismus φ^o: $\mathrm{Der}(S,N) \to \mathrm{Der}(R,N)$ definiert. Ist φ surjektiv, so ist φ^o injektiv.

Beweis:

φ^o ist trivialerweise ein R-Homomorphismus.

Angenommen φ ist surjektiv und φ^o nicht injektiv. Dann gibt es $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(S,N)$, $D_1 \neq D_2$ mit $\varphi^o(D_1) = \varphi^o(D_2)$. Es folgt für alle $r \in R$ $\varphi^o(D_1)(r) = \varphi^o(D_2)(r)$, d.h. $D_1 \circ \varphi(r) = D_2 \circ \varphi(r)$. Da φ surjektiv ist, ergibt sich $D_1(s) = D_2(s)$ für alle $s \in S$. Widerspruch zu $D_1 \neq D_2$. .-

Satz 8.3

Für jedes $D \in \mathrm{Der}(R,M)$ gilt: $D(\mathfrak{m}^{k+1}) \subset \mathfrak{m}^k M$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Beweis:

Induktion! Für $k=0$ ist nichts zu zeigen $(\mathfrak{m}^0 := R)$. Sei nun die Aussage für $k < n$ richtig und sei $f \in \mathfrak{m}^{n+1}$. Dann kann man f in der Form $\Sigma f_i g_i$, $f_i \in \mathfrak{m}$, $g_i \in \mathfrak{m}^n$ darstellen, also:

$$Df = \Sigma f_i Dg_i + \Sigma g_i Df_i$$

Da $Dg_i \in \mathfrak{m}^{n-1} M$ nach Induktionsvoraussetzung, folgt $Df \in \mathfrak{m}^n M$. .-

Folgerung 8.4

Sind $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(R,M)$ Derivationen und gilt $D_1 f_k = D_2 f_k$, $k = 1,\ldots,n$, für ein Erzeugendensystem $\{f_1,\ldots,f_n\}$ von $\mathfrak{m}$, so gilt $D_1 = D_2$.

Beweis:

Für jedes Polynom $p \in K[f_1,\ldots,f_n]$ gilt aufgrund der Produktregel $D_1 p = D_2 p$. Sei nun $f \in R$ beliebig. Nach Bemerkung 2.14

gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $p_i \in K[f_1,\dots,f_n]$, so daß $f - p_i \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Aus Satz 8.3 folgt dann

$$D_1f - D_2f = D_1(f-p_i) - D_2(f-p_i) \in \mathfrak{m}^i M \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N}\ .$$

Aufgrund des Krullschen Durchschnittssatzes ist $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i M = \{0\}$ und damit $D_1 f = D_2 f$ für alle $f \in R$. .-

Wie wir in § 3 gezeigt haben, sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial X_i} : R \to R$, $i = 1,\dots,n$, Derivationen. Der folgende Satz besagt nun, daß diese im wesentlichen alle Derivationen von R sind.

<u>Satz 8.5</u> (Kettenregel)

Sei $\{e_1,\dots,e_k\}$ ein Erzeugendensystem (bzw. Basis) von M. Dann gilt für jede Derivation $D \in \mathrm{Der}(R,M)$

$$D = \sum_{i=1}^{n} D X_i \frac{\partial}{\partial X_i}\ .$$

Insbesondere bilden die Derivationen $\{e_j \frac{\partial}{\partial X_i} : j = 1,\dots,k;\ i = 1,\dots,n\}$ ein Erzeugendensystem (bzw. Basis) von $\mathrm{Der}(R,M)$.

<u>Beweis:</u>

Sei $D \in \mathrm{Der}(R,M)$. Dann ist auch $D' := \sum_{i=1}^{n} DX_i \frac{\partial}{\partial X_i}$ eine Derivation.

Da $DX_i = D'X_i$ für $i = 1,\dots,n$, gilt nach Folgerung 8.4 $D = D'$.

Sei $DX_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\, e_j$, $a_{ij} \in R$, so ist

$$D = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\, e_j \frac{\partial}{\partial X_i}\ .$$

Also ist $\{e_j \frac{\partial}{\partial X_i} : j = 1,\dots,k\ ;\ i = 1,\dots,n\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Der}(R,M)$.

Ist $\{e_1,\dots,e_k\}$ eine Basis von M, so ergibt sich aus

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \; e_j \; \frac{\partial}{\partial X_i} = 0$$

zunächst $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \quad \frac{\partial}{\partial X_i} = 0 \quad$ für $j = 1,\dots,k$.

Wenden wir $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \; \frac{\partial}{\partial X_i}$ auf X_j an, so liefert das $a_{ij} = 0$. .-

Bemerkung 8.6

Der soeben bewiesene Satz verallgemeinert in der Tat die Kettenregel aus §5. Ist nämlich $\varphi: R \to S$ ein analytischer Homomorphismus, so ist durch $r \cdot f := \varphi(r) \cdot f$, $r \in R$, $f \in S$, der Ring S bezüglich φ ein R-Modul. $\varphi^{o} \left(\frac{\partial}{\partial Y_j}\right) = \frac{\partial}{\partial Y_j} \circ \varphi : R \to S$ ist nach Bemerkung 8.2 eine Derivation. Daher folgt:

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} \circ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(X_i)}{\partial Y_j} \cdot \frac{\partial}{\partial X_i} \qquad .-$$

Folgerung 8.7

Speziell ergibt sich aus der Kettenregel, daß $\left\{\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n}\right\}$ eine R-Basis von Der(R) ist. Sie heißt die kanonische Basis zur Karte $\langle\!\langle X_1,\dots,X_n\rangle\!\rangle$. Der (R) ist also ein freier R-Modul vom Range n. Ist $\langle\!\langle Z_1,\dots,Z_n\rangle\!\rangle$ eine weitere Karte von R, so gilt aufgrund der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial Y_j} \cdot \frac{\partial}{\partial X_i} \quad , \quad j = 1,\dots,n . \qquad .-$$

Beispiel:

Betrachten wir den R-Modulepimorphismus $\delta: \mathfrak{m}(R) \to \dot{R}$ (vergleiche Definition 5.4).

Durch

$$\delta(f) := \delta(f - f(o)) = f - f(o) \mod \mathfrak{m}(R)^2$$

wird δ zu einer Abbildung $R \to \dot{R}$ fortgesetzt.

δ bleibt K-linear, ist jedoch kein R-Homomorphismus mehr, sondern eine Derivation. Für $f, g \in R$ verifizieren wir die Produktregel:

$$\begin{aligned}
\delta(f\cdot g) &= \delta(f\cdot g - f\cdot g(o)) \\
&= \delta(f\cdot g - f(o)\cdot g(o)) + \delta((f-f(o))\cdot(g-g(o))) \\
&= \delta(f\cdot g - f(o)\cdot g(o) + f\cdot g + f(o)\cdot g(o) - f(o)\cdot g - g(o)\cdot f) \\
&= \delta(2\, f\cdot g - f(o)\, g - g(o) f) \\
&= \delta(f\cdot g - f(o) g) + \delta(f\cdot g - g(o) f) \\
&= g\,\delta f + f\delta g\ .
\end{aligned}$$

2. Differentialmoduln

Sei weiterhin $R := K\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$, und alle betrachteten R-Moduln seien endlich.

Der Definition und Konstruktion von Differentialmoduln liegt folgendes Problem zugrunde.

Ist $D: R \to N$ eine Derivation von R mit Werten in dem R-Modul N und $f: N \to M$ ein R-Modulhomomorphismus, so ist $f\circ D$, wie man sofort sieht, eine Derivation von R mit Werten in M. Durch $f \to f\circ D$ wird ein R-Modulhomomorphismus $\mathrm{Hom}(N,M) \to \mathrm{Der}(R,M)$ gegeben.

Es stellt sich nun die Frage, ob es ein universelles N und eine universelle Derivation d gibt, so daß jede Derivation $D: R \to M$ in irgendeinen beliebigen endlichen R-Modul M über N eindeutig faktorisierbar ist.

Definition 8.2

Ein Paar (Ω, d) heißt Differentialmodul zu R, wenn folgendes gilt:

(D.1) Ω ist endlich erzeugter R-Modul.

(D.2) $d \in \mathrm{Der}(R,\Omega)$.

(D.3) Ist M ein endlicher R-Modul und $D \in \mathrm{Der}(R,M)$, dann gibt es genau ein $h \in \mathrm{Hom}(\Omega,M)$ mit $D = h\circ d$.

h macht folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "D"'] & & \Omega \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Wie das meiste in dieser Arbeit ist diese Definition sehr spezieller Natur. Man könnte als Grundalgebra R eine beliebige kommutative Algebra über einem beliebigen kommutativen Ring mit 1 zulassen und auf die Endlichkeitsbedingung verzichten. In [15] wird gezeigt, daß unter diesen Bedingungen unser Problem eine eindeutige Lösung besitzt. Nimmt man die Endlichkeitsforderung hinzu, so ist die Existenz nicht immer gewährleistet. Sie ist jedoch gesichert, wenn man als Grundalgebren analytische Stellenalgebren oder speziell konvergente Potenzreihenringe wählt, was im folgenden gezeigt wird. Das von uns Differentialmodul genannte Gebilde wird in der Literatur häufig mit Kählerscher oder universellendlicher Differentialmodul bezeichnet.

Wie jedes universelle Problem ist auch dieses, sofern überhaupt, bis auf Isomorphie eindeutig lösbar.

Satz 8.8

Sind (Ω,d) und (Ω',d') Differentialmoduln zu R, so gibt es genau einen R-Isomorphismus $g:\Omega' \to \Omega$ mit $d = g\circ d'$.

Beweis:

Zu $d' \in Der(R,\Omega')$ gibt es nach (D.3) genau ein $g' \in Hom(\Omega,\Omega')$ mit $d' = g'\circ d$, ebenso gibt es zu $d \in Der(R,\Omega)$ genau ein $g \in Hom(\Omega',\Omega)$ mit $d = g\circ d'$. Es ergibt sich $d = g\circ g'\circ d$, $d' = g'\circ g\circ d'$, woraus folgt $g\circ g' = id$, $g'\circ g = id$; d. h. g ist bijektiv. .-

Folgerung 8.9

$$\Omega = R\, d\, R$$

Beweis:

Offensichtlich ist (RdR,d) ein Differentialmodul zu R. Nach Satz 8.8 gibt es einen R-Isomorphismus $g : RdR \to \Omega$ mit $d = g \circ d$. Da g eindeutig bestimmt ist und $id: RdR \to \Omega$ ebenfalls die Gleichung $d = id \circ d$ erfüllt, gilt notwendig $g = id$ und damit $\Omega = RdR$ . .-

Satz 8.10

Sei Ω ein freier R-Modul vom Range n, $\{e_1,\dots,e_n\}$ eine Basis von Ω . Die Abbildung $d: R \to \Omega$ werde durch

$$f \to df := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i} e_i$$

definiert. Dann ist (Ω,d) ein Differentialmodul zu R.

Beweis:

Nach Definition ist Ω endlich erzeugter R-Modul und $d \in Der(R,\Omega)$. Wegen $dX_i = e_i$, $i = 1,\dots,n$, wird Ω von $\{dX_1,\dots,dX_n\}$ erzeugt, d.h. $\Omega = RdR$.

Es bleibt zu zeigen: Zu jedem endlich erzeugten R-Modul M und jeder Derivation $D: R \to M$ gibt es genau einen R-Homomorphismus $h: \Omega \to M$ mit $D = h \circ d$. Wir definieren $h(e_i) := DX_i$, $i = 1,\dots,n$. h ist dann nach Satz 1.1 ein eindeutig bestimmter R-Homomorphismus $\Omega \to M$. Aufgrund der Kettenregel gilt für jedes $f \in R$

$$Df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i} DX_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i} h(e_i) = h\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i} e_i\right) = h(df) .$$

.-

Das heißt $D = h \circ d$, und die Eindeutigkeit von h ist ebenfalls klar.

Bemerkung und Bezeichnung

Satz 8.9 zeigt, daß $\{dX_1,\dots,dX_n\}$ eine Basis von Ω ist. Sie heißt die zur Karte $\langle\langle X_1,\dots,X_n\rangle\rangle$ gehörende oder kanonische Basis von Ω . Ist $\langle\langle Z_1,\dots,Z_n\rangle\rangle$ eine weitere Karte von R, so gilt

$$dZ_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z_j}{\partial X_i} dX_i \quad , \quad i = 1,\dots,n .$$

Sind R und S zwei verschiedene konvergente Potenzreihenringe, so wollen wir die zugehörigen Differentialmoduln mit Ω (R) bzw. Ω(S) bezeichnen, auf eine unterschiedliche Bezeichnung für die universellen Derivationen d_R bzw. d_S verzichten wir und schreiben in allen Fällen d. Die Elemente von Ω (R) heißen Pfaffsche Formen oder auch (äußere) Differentialformen 1. Ordnung über R.

Satz 8.11

Seien $(\Omega(R),d)$ und $(\Omega(S),d)$ die Differentialmoduln zu den konvergenten Potenzreihenringen R und S. Ist $\varphi: R \to S$ ein analytischer Homomorphismus, dann gibt es genau einen R-Homomorphismus $d\varphi: \Omega(R) \to \Omega(S)$, der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, dash, "\varphi"] \arrow[d, "d"'] & S \arrow[d, "d"] \\ \Omega(R) \arrow[r, dashed, "d\varphi"] & \Omega(S) \end{tikzcd}$$

Beweis:

Ω (R) ist frei vom Range n mit der Basis $\{dX_1,\dots,dX_n\}$. Via φ fassen wir Ω (S) als R-Modul auf. Dann definiert

$$dX_i \to d\circ\varphi(X_i) \quad , \quad i = 1,\dots,n,$$

einen R-Homomorphismus $d\varphi: \Omega(R) \to \Omega(S)$, der das Gewünschte leistet. Die Eindeutigkeit ist mit Satz 1.1 gegeben. .-

Bemerkung 8.12

Die Abbildung $d\varphi$ heißt das Differential des Homomorphismus φ. Es gilt:

a) $d(\psi\circ\varphi) = d\psi \circ d\varphi$

~~b)~~ $\cancel{d(d_R) = id_{\Omega(R)}}$

c) Ist φ ein Isomorphismus, so auch $d\varphi$.

Beweis: trivial .-

Satz 8.13

Seien $f_i \in \mathfrak{m}(R)$, $i = 1,\dots,n$, und sei $\{df_1,\dots,df_n\}$ eine Basis von $\Omega(R)$, dann ist $\langle\!\langle f_1,\dots,f_n \rangle\!\rangle$ eine Karte von R.

Beweis:

Nach Folgerung 5.12 ist $\langle\!\langle f_1,\dots,f_n \rangle\!\rangle$ genau dann eine Karte von R, wenn $\{\delta f_1,\dots,\delta f_n\}$ eine Basis von $\dot{R}$ ist. Nach Beispiel Seite 73 ist $\delta : R \to \dot{R}$ eine Derivation, aufgrund von (D.3) existiert dann genau eine Abbildung $h\colon \Omega(R) \to \dot{R}$ mit $\delta = h \circ d$.

Es bleibt zu zeigen: $\{h \circ df_1,\dots,h \circ df_n\}$ ist eine Basis von $\dot{R}$.

Nach Voraussetzung ist $\{df_1,\dots,df_n\}$ eine Basis von $\Omega(R)$. Mit δ ist auch h surjektiv, also wird $\dot{R}$ von $h \circ df_1,\dots,h \circ df_n$ erzeugt.

Aus Dimensionsgründen ist das bereits eine Basis. .-

3. Äußere Differentialformen über R, Poincaré-Sequenz

Den in § 7 entwickelten Kalkül der äußeren Algebra wenden wir nun auf die Differentialmoduln an. Wir definieren R-Moduln $\Omega^p := \Omega^p(R)$ wie folgt:

$$\Omega^0 := R$$
$$\Omega^1 := \Omega(R)$$
$$\Omega^p := \Lambda^p\, \Omega^1 \quad , \ p > 1$$

Da Ω^1 nach Satz 8.9 frei vom Range n ist, folgt aus Satz 7.12, Ω^p ist frei und $\dim \Omega^p = \binom{n}{p}$. Insbesondere ist $\Omega^p = 0$ für $p > n$. Sei im weiteren $\Omega := \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p$, Ω ist nach Folgerung 7.13 freier R-Modul vom Range 2^n und heißt <u>Modul der äußeren Differentialformen über R</u>. Jedes Element aus Ω^p heißt <u>homogen vom Grade p</u> oder <u>p-Form über R</u>. Die 0-Formen sind die Elemente von R, die 1-Formen die Pfaffschen Formen. Durch das in Definition 7.3 definierte äußere Produkt "$\wedge$" wird Ω zu einer assoziativen, nichtkommutativen R-Algebra, in der alle Rechenregeln 7.6 gelten.

Wir zeigen nun:

Satz 8.14

Es gibt genau eine Sequenz

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{p-1}} \Omega^p \xrightarrow{d_p} \Omega^{p+1} \longrightarrow \cdots$$

von K-linearen Abbildungen d_p mit folgenden Eigenschaften

(i) d_{-1} ist die natürliche Injektion $K \to R$.
d_0 ist die natürliche Derivation $R \to \Omega^1$.

(ii) Für $\alpha \in \Omega^q$, $\beta \in \Omega^p$ gilt:

$$d_{q+p}(\alpha \wedge \beta) = d_q(\alpha) \wedge \beta + (-1)^q \alpha \wedge d_p(\beta) .$$

(iii) $d_{p+1} \circ d_p = 0$ für $p \geq 0$.

Beweis:

Um die Eindeutigkeit der d_p zu zeigen, verifizieren wir zunächst:

$$d_k(dX_{i_1} \wedge \ldots \wedge dX_{i_k}) = 0 \quad \text{für} \quad k \geq 1.$$

Im Falle $k = 1$ gilt: $d_1(dX_{i_1}) = d_1 \circ d_0(X_{i_1}) = 0$ nach (iii).

Sei die Aussage für $k-1 \geq 1$ bereits bewiesen.

Aus (ii) folgt mit $q = 1$, $p = k-1$, $\alpha = dX_{i_1}$, $\beta = dX_{i_2} \wedge \ldots \wedge dX_{i_k}$ nach Induktionsannahme

$$d_k(dX_{i_1} \wedge \ldots \wedge dX_{i_k}) = d_1(dX_{i_1}) \wedge \beta - \alpha \wedge d_{k-1}(dX_{i_2} \wedge \ldots \wedge dX_{i_k}) = 0$$

Ist nun $\alpha = \sum\limits_{\ldots} f_i \, dX_i$ eine beliebige p-Form, so gilt

$$(*)\ d_p(\alpha) = \sum_{\ldots} d_p(f_i dX_i) = \sum_{\ldots} (d_0(f_i) \wedge dX_i + f_i \, d_p(dX_i))$$

$$= \sum_{\ldots} d_0(f_i) \wedge dX_i$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_p}}{\partial X_j} dX_j \wedge dX_{i_1} \wedge \ldots \wedge dX_{i_p} .$$

d_p ist also aufgrund obiger Darstellung eindeutig festgelegt.

Definiert man umgekehrt die d_p durch (*), so ist sofort klar, daß d_p K-linear ist und daß (i) erfüllt ist. Beim Nachweis von (ii) kann man sich auf zerlegbare Formen der Gestalt

$$\alpha = f \; dX_{i_1} \wedge \ldots \wedge dX_{i_q} \; , \; ß = g \; dX_{k_1} \wedge \ldots \wedge dX_{k_p}$$

beschränken.

Für diese gilt aber mit $i = (i_1,\ldots,i_q)$, $k = (k_1,\ldots,k_p)$

$$d_{q+p}(\alpha \wedge ß) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f\cdot g)}{\partial X_j} \; dX_j \wedge dX_i \wedge dX_k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial X_j} \; dX_j \wedge dX_i\right) \wedge g dX_k + (-1)^q \, f dX_i \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \; dX_j \wedge dX_k\right)\right)$$

$$= d_q(\alpha) \wedge ß + (-1)^q \, \alpha \wedge d_p(ß) \; .$$

(iii) braucht ebenfalls nur für zerlegbare Formen gezeigt zu werden. Es ergibt sich:

$$d_{p+1} \circ d_p(\alpha) = d_{p+1}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_j} \; dX_j \wedge dX_i \right)$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial X_j \, \partial X_l} \; dX_j \wedge dX_l \wedge dX_i$$

$$= 0 \; ,$$

wegen $dX_j \wedge dX_l \; = -dX_l \wedge dX_j$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial X_j \, dX_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial X_l \, \partial X_j}$ . .-

Definition 8.3

Die in Satz 8.13 konstruierte Sequenz heißt Poincaré-Sequenz von R Die Abbildungen d_p heißen die äußeren Ableitungen.

Satz 8.15

Es seien $R := K\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$, $S := K\langle\langle Y_1,\ldots,Y_m\rangle\rangle$, $\Omega_n^p := \Omega^p(R)$, $\Omega_m^p := \Omega^p(S)$, $p \in \mathbb{N}$, und $\varphi : R \to S$ sei ein analytischer Homomorphismus. Dann hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & R \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \arrow[r] & \Omega_n^p \arrow[r, "d_p"] \arrow[d, "d^p\varphi"] & \Omega_n^{p+1} \arrow[r, "d_{p+1}"] \arrow[d, "d^{p+1}\varphi"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & S \arrow[r, "d_0"] & \cdots \arrow[r] & \Omega_m^p \arrow[r, "d_p"] & \Omega_m^{p+1} \arrow[r, "d_{p+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

wobei $d^p\varphi := \Lambda^p d\varphi : \Omega_n^p \to \Omega_m^p$ die p-te äußere Potenz von $d\varphi : \Omega_n^1 \to \Omega_m^1$ ist.

<u>Beweis:</u>

Aufgrund von Satz 8.11 brauchen wir nur den Fall $p \geq 2$ zu behandeln.

Es sei also $\alpha = f \; dX_{i_1} \wedge \ldots \wedge dX_{i_p} \in \Omega_n^p$, dann gilt:

$d^p\varphi(\alpha) = \varphi(f) \cdot d(\varphi(X_{i_1})) \wedge \ldots \wedge d(\varphi(X_{i_p}))$ und somit wegen Satz 8.14, (ii):

$$\begin{aligned}
d_p \circ d^p\varphi(\alpha) &= d_p(\varphi(f) \cdot d(\varphi(X_{i_1})) \wedge \ldots \wedge d(\varphi(X_{i_p}))) \\
&= d(\varphi(f)) \wedge d(\varphi(X_{i_1})) \wedge \ldots \wedge d(\varphi(X_{i_p})) \\
&\quad + (-1)^0 \varphi(f) \; d_p(d(\varphi(X_{i_1})) \wedge \ldots \wedge d(\varphi(X_{i_p})))
\end{aligned}$$

Bei erneuter Anwendung von Satz 8.14, (ii) sieht man wegen $d_1 \circ d = 0$, daß der zweite Summand verschwindet. Es folgt nun mit Hilfe von Satz 8.5 (Kettenregel), bzw. Bem. 8.6:

$$\frac{\partial}{\partial Y_j}(\varphi(f)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial Y_j}(\varphi(X_i)), \quad j = 1, \ldots, m:$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right) d(\varphi(X_i)) &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial Y_j}(\varphi(X_i)) \, dY_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial Y_j}(\varphi(f)) \, dY_j \\
&= d(\varphi(f))
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$(d_p \circ d^p\varphi)\,(\alpha) = d(\varphi(f)) \wedge d(\varphi(X_{i_1})) \wedge \ldots \wedge d(\varphi(X_{i_p}))$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi\big(\tfrac{\partial f}{\partial X_i}\big)\, d(\varphi(X_i))\Big) \wedge d(\varphi(X_{i_1})) \wedge \ldots \wedge d(\varphi(X_{i_p}))$$

$$= (d^{p+1}\varphi)\,\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}\, dX_i \wedge d\,X_{i_1} \wedge \ldots \wedge dX_{i_p}\Big)$$

$$= (d^{p+1}\varphi)\; d_p(\alpha)$$

$$= (d^{p+1}\varphi \circ d_p)\;(\alpha)\;. \qquad .-$$

In [8] wird gezeigt, daß die Poincaré-Sequenz im Falle char $K = 0$ exakt ist. Diese Eigenschaft wird in dieser Arbeit jedoch nicht benötigt.

Aus schreibtechnischen und Übersichtlichkeitsgründen wollen wir die im Verlaufe dieses Paragraphen konstruierten Abbildungen und Moduln etwas anders bezeichnen und fassen noch einmal alle bisher bekannten und im weiteren benötigten Tatsachen über die äußeren Potenzen von Differentialmoduln und analytischen Homomorphismen zusammen.

Bemerkung 8.16

Seien R, R', R'' konvergente Potenzreihenringe, $\varphi: R \to R'$, $\psi: R' \to R''$ analytische Homomorphismen, sei $\varphi^{*} := d\varphi$, $\varphi^{**} := d^2\varphi$, $\Omega^1(R) := \Omega(R)$, $\Omega^2(R) := \wedge^2\, \Omega^1(R)$, d stehe für sämtliche äußeren Ableitungen d_p, $p \geq 0$, dann ist folgendes Diagramm kommutativ

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi"] & \Omega^1(R) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^{*}"] & \Omega^2(R) \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\
R' \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\psi"] & \Omega^1(R') \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\psi^{*}"] & \Omega^2(R') \arrow[d, "\psi^{**}"] \\
R'' \arrow[r, "d"] & \Omega^1(R'') \arrow[r, "d"] & \Omega^2(R'')
\end{tikzcd}$$

und es gilt:

(1) $\quad d \circ \varphi = \varphi^* \circ d$

(2) $\quad d \circ \varphi^* = \varphi^{**} \circ d$

(3) $\quad d \circ \psi^* \circ \varphi^* = \psi^{**} \circ \varphi^{**} \circ d$

(4) $\quad (\psi \circ \varphi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$

(5) $\quad \varphi^{**}(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)\ , \quad \alpha, \beta \in \Omega^1(R)$

Die Rechenregeln (1) - (5) ergeben sich aus den Sätzen 8.14, 8.15 und den Rechenregeln 7.7.

Beispiel:

An einem einfachen Beispiel wollen wir die häufig benutzte Technik zur Berechnung von φ^* in Breitwand vorführen.

Seien $R := K \langle\langle X_1, X_2 \rangle\rangle$, $S := K \langle\langle Y_1, Y_2, Y_3 \rangle\rangle$; $\varphi: R \to S$ sei gegeben durch $X_1 \to Y_1^2$, $X_2 \to Y_2 \cdot Y_3$. Sei $\alpha = 2X_1^2 X_2\, dX_1 + X_2^3\, dX_2 \in \Omega^1(R)$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(\alpha) &= \varphi^*(2X_1^2 X_2\, dX_1 + X_2^3\, dX_2) \\
&= \varphi(2X_1^2 X_2) \cdot \varphi^*(dX_1) + \varphi(X_2^3) \cdot \varphi^*(dX_2) \\
&= 2Y_1^4 Y_2 Y_3\, d(\varphi(X_1)) + Y_2^3 \cdot Y_3^3\, d(\varphi(X_2)) \\
&= 2Y_1^4 Y_2 Y_3\, d(Y_1^2) + Y_2^3 Y_3^3\, d(Y_2 Y_3) \\
&= 2Y_1^4 Y_2 Y_3 \left(\frac{\partial Y_1^2}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial Y_1^2}{\partial Y_2} dY_2 + \frac{\partial Y_1^2}{\partial Y_3} dY_3\right) \\
&\quad + Y_2^3 Y_3^3 \left(\frac{\partial Y_2 \cdot Y_3}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial Y_2 Y_3}{\partial Y_2} dY_2 + \frac{\partial Y_2 Y_3}{\partial Y_3} dY_3\right) \\
&= 4Y_1^5 Y_2 Y_3\, dY_1 + Y_2^3 Y_3^4\, dY_2 + Y_2^4 Y_3^3\, dY_3
\end{aligned}
$$

§ 9 Der Satz von Frobenius

Nachdem wir in den Paragraphen 1 bis 8 alle Grundlagen zusammengestellt, Vorbereitungen getroffen und die für den Beweis entscheidenden Sätze gezeigt haben, sind wir nun in der Lage, den Satz von Frobenius für konvergente Potenzreihenringe zu formulieren und zu beweisen.

<u>Satz 9.1</u> (Frobenius)

Sei K ein bewerteter Körper der Charakteristik Null, $R := K\langle\!\langle X_1,\dots,X_n\rangle\!\rangle$ und $\Omega^1(R)$ der Differentialmodul zu R. Sei $\Omega^1(R) = \Omega' \oplus \Omega''$ und gelte $d\Omega' \subset \Omega^1(R) \wedge \Omega'$ sowie $d\Omega'' \subset \Omega^1(R) \wedge \Omega''$, dann gibt es eine Karte $\langle\!\langle U_1,\dots,U_r,V_1,\dots,V_s\rangle\!\rangle$ von R mit der Eigenschaft

$$\Omega' = R(dU_1,\dots,dU_r)$$
$$\Omega'' = R(dV_1,\dots,dV_s)\ .$$

<u>Beweisverfahren:</u>

Wir geben zunächst den Beweis des Satzes in einer knappen und übersichtlichen Skizze an. Dann formen wir die Integrabilitätsbedingungen in handlichere Aussagen um und verifizieren anschließend die in der Beweisskizze aufgestellten Behauptungen. Zum Schluß zeigen wir, daß auch die Umkehrung des Satzes von Frobenius richtig ist.

<u>Beweisskizze:</u>

Satz 8.10 besagt, $\Omega^1(R)$ ist frei und $\dim\Omega^1(R) = n$. Aus der Voraussetzung $\Omega^1(R) = \Omega' \oplus \Omega''$ folgern wir mit Satz 2.9, (iii), daß auch Ω' und Ω'' frei sind. Sei $\dim\Omega' = r$, $\dim\Omega'' = s$, dann ergibt sich aus Folgerung 2.10 $\quad n = r + s$.

Im folgenden wollen wir uns bei der Beweisführung auf Betrachtungen über den R-Modul Ω' beschränken und bemerken, daß jede Konstruktion und jede Schlußfolgerung "wörtlich" für den Modul Ω'' wiederholt werden kann.

1. Beweisschritt:

Es gibt eine Karte $\langle\langle X_1,\ldots,X_r,Y_1,\ldots,Y_s\rangle\rangle$ von R mit der Eigenschaft:

Ω' besitzt eine Basis $\{\omega_1,\ldots,\omega_r\}$ mit

$$\omega_i = dX_i - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\,(X,Y)\,dY_j \quad , \quad a_{ij} \in R,\ i=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,s.$$

Da wir im allgemeinen nicht annehmen können, $\sum_{j=1}^{s} a_{ij}(X,Y) = 0$, müssen wir versuchen, eine neue Karte von R zu finden, so daß beim Übergang zu dieser Karte die obige Summe von Potenzreihen verschwindet. Zentrale Bedeutung hat dabei der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (EES), mit dessen Hilfe wir uns zunächst Potenzreihen mit folgenden schönen Eigenschaften verschaffen:

2. Beweisschritt

Es gibt Potenzreihen $F_i \in K\,\langle\langle T,V_1,\ldots,V_r,W_1,\ldots,W_s\rangle\rangle$, $i=1,\ldots,r$, mit

i) $F_i(0,V,W) \quad = V_i$

ii) $\frac{\partial F_i}{\partial T}(T,V,W) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(F_1(T,V,W),\ldots,F_r(T,V,W),TW_1,\ldots,TW_s)W_j$

iii) $F_i(1,V,TW)$ ist wohldefiniert, und es gilt:
$F_i(T,V,W) \quad = F_i(1,V,TW)$.

Aus der Eigenschaft iii) schließen wir, daß in der kanonischen Darstellung der F_i, $i = 1,\ldots,r$, wie folgt zusammengefaßt werden kann:

$$F_i(T,V,W) := \sum_{\ldots} b_{\ldots}\, T^{k_0} V_1^{k_1} \ldots V_r^{k_r} W_1^{i_1} \ldots W_s^{i_s}$$

$$= \sum_{\ldots} b_{\ldots} V_1^{k_1} \ldots V_r^{k_r} (TW_1)^{i_1} \ldots (TW_s)^{i_s}$$

Wir können somit ohne Bedenken die Unbestimmte Z_j für TW_j, $j = 1,\ldots,s$, substituieren.

$$H_i(V_1,\ldots,V_r,Z_1,\ldots,Z_s) := F_i(1,V,Z) \quad , \quad i = 1,\ldots,r,$$

sind also wohldefinierte Elemente von $K\,\langle\langle V,Z\rangle\rangle =: R'$.

3. Beweisschritt

Der K-Algebrahomomorphismus $\varphi : K\langle\langle X,Y\rangle\rangle \to K\langle\langle V,Z\rangle\rangle$, definiert durch

$$X_i \to H_i(V,Z)\ ,\quad i = 1,\dots,r,$$

$$Y_j \to Z_j\ ,\quad j = 1,\dots,s,$$

ist ein Isomorphismus.

Nach Bemerkung 8.12 ist der induzierte R-Homomorphismus $\varphi^* : \Omega^1(R) \to \Omega^1(R')$ ebenfalls ein Isomorphismus; daraus folgt, $\{\nu_1,\dots,\nu_r\}$ mit $\nu_i := \varphi^*(\omega_i)$, $i = 1,\dots,r$, ist eine Basis von $\varphi^*(\Omega')$.

4. Beweisschritt

Es gilt: $$\nu_i = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial H_i(V,Z)}{\partial V_k}\, dV_k\ ,\quad i = 1,\dots,r\ .$$

Damit erhalten wir, $\{dV_1,\dots,dV_r\}$ ist eine Basis von $\varphi^*(\Omega')$. Weil φ^* ein Isomorphismus ist, ist $\{(\varphi^*)^{-1}(dV_1),\dots,(\varphi^*)^{-1}(dV_r)\}$ eine Basis von Ω'. Ebenso folgt aus der Isomorphieeigenschaft von φ, $\langle\langle\varphi^{-1}(V_1),\dots,\varphi^{-1}(V_r),\varphi^{-1}(Z_1),\dots,\varphi^{-1}(Z_s)\rangle\rangle$ ist eine Karte von R. Setzen wir: $U_i := \varphi^{-1}(V_i)$, $i=1,\dots,r$, $U'_j := \varphi^{-1}(Z_j)$, $j = 1,\dots,s$, so ist $\langle\langle U_1,\dots,U_r,U'_1,\dots,U'_s\rangle\rangle$ eine Karte von R, und $\{dU_1,\dots,dU_r\}$ ist eine Basis von Ω' .

Wiederholen wir den soeben vorgeführten Beweis für den R-Modul Ω'', so ergibt sich:

Es gibt eine Karte $\langle\langle V'_1,\dots,V'_r,V_1,\dots,V_s\rangle\rangle$ von R mit der Eigenschaft, $\{dV_1,\dots,dV_s\}$ ist eine Basis von Ω''.

Nach Satz 2.8 und 2.9, (ii) ist $\{dU_1,\dots,dU_r,dV_1,\dots,dV_s\}$ eine Basis von $\Omega^1(R)$. Mit Satz 8.13 folgern wir daraus, $\langle\langle U_1,\dots,U_r,V_1,\dots,V_s\rangle\rangle$ ist eine Karte von R.

Damit haben wir eine Karte von R mit den gewünschten Eigenschaften gefunden und sind mit dem Beweis des Satzes-bis auf die noch zu untersuchenden vier Behauptungen - fertig. .-

Hilfssatz 9.2

Sei Ω ein freier Untermodul von $\Omega^1(R)$ mit der Basis $\{\nu_1,\dots,\nu_r\}$, sei $\nu := \nu_1\wedge\dots\wedge\nu_r$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $d\Omega \subset \Omega^1(R)\wedge\Omega$

(b) $d\omega \in \Omega^1(R)\wedge\Omega$, für alle $\omega\in\Omega$

(c) $d\nu_i \in \Omega^1(R)\wedge\Omega$, $i = 1,\dots,r$

(d) $d\nu_i\wedge\nu = 0$, $i = 1,\dots,r$

(e) $d\nu_i = \sum_{j=1}^{r} \theta_{ij}\wedge\nu_j$, $\theta_{ij}\in\Omega^1(R)$, $i = 1,\dots,r$, $j = 1,\dots,r$.

Beweis:

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) trivial

(c) $\Longrightarrow$ (d)
$$d\nu_i = \sum_{e=1}^{m} \alpha_e\wedge\omega_e \qquad , \alpha_e\in\Omega^1(R), \omega_e\in\Omega$$
$$= \sum_{e=1}^{m} \alpha_e\wedge\Big(\sum_{j=1}^{r} a_j\,\nu_j\Big) \qquad ; a_j\in R$$
$$= \sum_{e=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} a_j\,\alpha_e\wedge\nu_j$$

daraus folgt: $d\nu_i\wedge\nu = \sum_{e=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} a_j\alpha_e\wedge\nu_j\wedge\nu = 0$ für $i=1,\dots,r$.

(d) $\Longrightarrow$ (e)

Seien $\nu_{r+1},\dots,\nu_n$ so gewählt, daß $\{\nu_1,\dots,\nu_n\}$ eine Basis von $\Omega^1(R)$ ist.

Sei $d\nu_i = \sum_{1\le j<k\le n} f_{ijk}\,\nu_j\wedge\nu_k$, dann folgt aus $d\nu_i\wedge\nu = 0$

$\sum_{\dots} f_{ijk}\,\nu_j\wedge\nu_k\wedge\nu_1\wedge\dots\wedge\nu_r = 0$ und damit

$f_{ijk} = 0$ für $i = 1,\dots,r$ und alle j,k mit $r < j < k$.

Das bedeutet $d\nu_i = \sum_{j=1}^{r}\Big(\sum_{k=j+1}^{n} -f_{ijk}\,\nu_k\Big)\wedge\nu_j =: \sum_{j=1}^{r}\theta_{ij}\wedge\nu_j$

(e) $\Longrightarrow$ (a) trivial .-

Zur Vervollständigung der Beweisskizze des Satzes von Frobenius fehlt uns nur noch der Nachweis der Richtigkeit der vier Beweisschritte.

1. Beweisschritt

Es gibt eine Karte $\langle\!\langle X_1,\ldots,X_r,Y_1,\ldots,Y_s\rangle\!\rangle$ von R mit der Eigenschaft: Ω' besitzt eine Basis $\{\omega_1,\ldots,\omega_r\}$ mit

$$\omega_i = dX_i - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(X,Y)\, dY_j \quad , \; a_{ij} \in R, \; i = 1,\ldots,r, \; j = 1,\ldots,s.$$

Beweis:

Sei $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ eine Basis von Ω'. Bezüglich der kanonischen Basis $\{dX_1,\ldots,dX_n\}$ von $\Omega^1(R)$ möge folgende Darstellung bestehen

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, dX_j \;, \quad g_{ij} \in R \;.$$

Sei $G := (g_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,r\\ j=1,\ldots,n}}$. Da die α_i linear unabhängig sind, gibt es nach Bemerkung 2.7 eine invertierbare (r,r)-Untermatrix C von G. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit möge gelten: $C = (g_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,r\\ j=1,\ldots,r}}$.

Sei $C^{-1} = (c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,r\\ j=1,\ldots,r}}$, dann gilt für $i = 1,\ldots,r$

$$\begin{aligned}
\omega_i &:= \sum_{j=1}^{r} c_{ij}\, \alpha_j = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\, dX_k \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{r} c_{ij}\, g_{ik} \Big)}_{=\,\delta_{ik}} dX_k + \sum_{k=r+1}^{n} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{r} c_{ij}\, g_{jk} \Big)}_{=:\, h_{ik}} dX_k \\
&= dX_i + \sum_{k=r+1}^{n} h_{ik}\, dX_k
\end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 1.9 und 1.10 ist $\{\omega_1,\ldots,\omega_r\}$ eine neue Basis von Ω'.

Um im weiteren übersichtlicher rechnen zu können, wollen wir mit $Y_1,\ldots,Y_s$ die Unbestimmten $X_{r+1},\ldots,X_n$ bezeichnen. Setzen wir

$$a_{ik} := - h_{ik+r} \quad , \; k = 1,\ldots,s, \; i = 1,\ldots,r,$$

so ergibt sich

$a_{ik} \in R = K \langle\langle X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_s \rangle\rangle = K \langle\langle X,Y \rangle\rangle$ und

$$\omega_i = dX_i - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, dY_j \qquad i = 1,\dots,r\ . \qquad .-$$

2. Beweisschritt

Es gibt Potenzreihen $F_i \in K \langle\langle T,V_1,\dots,V_r,W_1,\dots,W_s \rangle\rangle$, $i=1,\dots,r$, mit

i) $F_i(0,V,W) = V_i$

ii) $\dfrac{\partial F_i}{\partial T}(T,V,W) = \sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij}(F_1(T,V,W),\dots,F_r(T,V,W),TW_1,\dots,TW_s)W_j$

iii) $F_i(1,V,TW)$ ist wohldefiniert und es gilt:

$F_i(T,V,W) = F_i(1,V,TW)$

Beweis:

Durch $Y_j \to TW_j$, $j = 1,\dots,s$, $X_i \to X_i$, $i = 1,\dots,r$, erhalten wir einen K-Algebrahomomorphismus $K \langle\langle X,Y \rangle\rangle \to K \langle\langle T,X,W \rangle\rangle$ und können Potenzreihen $f_i \in K \langle\langle T,X,W \rangle\rangle$ wie folgt definieren

$$f_i(T,X,W) := \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(X_1,\dots,X_r,TW_1,\dots,TW_s)W_j,\ i=1,\dots,r\ .$$

Nach (EES) existiert genau ein System $F = (F_1,\dots,F_r)$ von Potenzreihen $F_i \in K \langle\langle T,V,W \rangle\rangle$, $i = 1,\dots,r$, mit

i) $F_i(0,V,W) = V_i$

ii) $\dfrac{\partial F_i}{\partial T}(T,V,W) = f_i(T,F(T,V,W),W) = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}(F(T,V,W),TW)W_j$

Weiterhin gibt es mit

$g_i(T,X_1,\dots,X_r,W_1,\dots,W_s,S) := S\cdot f_i(ST,X,W) \in K\langle\langle T,X,W,S \rangle\rangle, i=1,\dots,r,$

nach (EES) ein eindeutig bestimmtes System $G = (G_1,\dots,G_r)$ von Potenzreihen $G_i \in K \langle\langle T,V,W,S \rangle\rangle$, $i = 1,\dots,r$, mit

i) $G_i(0,V,W,S) = V_i$

ii) $\frac{\partial G_i}{\partial T}(T,V,W,S) = g_i(T,G(T,V,W,S),WS) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(G(T,V,W,S),STW)SW_j$

Offensichtlich sind sowohl durch

$$G_i'(T,V,W,S) := F_i(ST,V,W), \quad i = 1,\dots,r,$$

als auch durch

$$G_i''(T,V,W,S) := F_i(T,V,SW), \quad i = 1,\dots,r,$$

Lösungen obiger Differentialgleichung gegeben. Aufgrund der Eindeutigkeit gilt damit für $i = 1,\dots,r$:

(*) $F_i(T,V,SW) = F_i(ST,V,W)$.

Gleichung (*) kann man folgendermaßen interpretieren: Kommt in irgendeinem Monom einer Potenzreihe F_i die Unbestimmte T in der Potenz k_o vor, so auch $W_1^{k_1}\dots W_s^{k_s}$ mit $k_1+\dots+k_s=k_o$. Es gibt also kein Glied der Potenzreihe F_i, in dem nur die Unbestimmte T und keine weitere Unbestimmte auftritt. Somit ist es sinnvoll, T durch $1\in K$ zu ersetzen.

Aus (*) folgt dann:

$$F_i(S,V,W) = F_i(1,V,SW) \in K\langle\langle V,W,S\rangle\rangle$$

Benennen wir nun noch die Unbestimmte S in T um, so erhalten wir

$$F_i(T,V,W) = F_i(1,V,TW) \in K\langle\langle T,V,W\rangle\rangle \ , \quad i = 1,\dots,r \ . \qquad .-$$

<u>3. Beweisschritt</u>

Der K-Algebrahomomorphismus $\varphi : K\langle\langle X,Y\rangle\rangle \to K\langle\langle V,Z\rangle\rangle$, definiert durch

$$X_i \to H_i(V,Z),\ i=1,\dots,r \quad , \quad Y_j \to Z_j \ , \ j=1,\dots,s,$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Zunächst ist die Substitution $X_i \to H_i(V,Z) = F_i(1,V,Z) = F_i(1,V,TW)$ sinnvoll, da

$$H_i(0,0) = F_i(1,0,0) = F_i(1,0,0\cdot W) = F_i(0,0,W) = 0 \,.$$

Die Bijektivität zeigen wir mit Hilfe des Jacobischen Umkehrsatzes.

$$\frac{\partial(\varphi(X_1),\ldots,\varphi(Y_s))}{\partial(V_1,\ldots,Z_s)}(0) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(X_i)}{\partial V_j}(0) & \frac{\partial\varphi(X_i)}{\partial Z_j}(0) \\ \frac{\partial\varphi(Y_i)}{\partial V_j}(0) & \frac{\partial\varphi(Y_i)}{\partial Z_j}(0) \end{pmatrix} \quad \text{i,j jeweils sinnvoll gewählt}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(X_i)}{\partial V_j}(0) & * \\ 0 & E_s \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(\frac{\partial\varphi(X_i)}{\partial V_j}(0)\right)$$

$$= 1$$

denn:

$$\frac{\partial\varphi(X_i)}{\partial V_j}(0) = \frac{\partial H_i(V,Z)}{\partial V_j}(0) = \frac{\partial F_i(1,V,TW)}{\partial V_j}(0) = \frac{\partial F_i(1,V,0)}{\partial V_j}(0)$$

$$= \frac{\partial F_i(0,V,W)}{\partial V_j}(0) = \frac{\partial V_i}{\partial V_j}(0) \,,$$

wobei das Argument 0 aus dem jeweils zuständigen K^k zu wählen ist (siehe Bemerkung 3.8). .-

4. Beweisschritt

Es gilt $$\upsilon_i = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial H_i(V,Z)}{\partial V_k}\, dV_k \quad , \; i=1,\ldots,r \,.$$

Beweis:

Nach Definition gilt:

$$\upsilon_i = \varphi^*(\omega_i) = \varphi^*(dX_i - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(X,Y)dY_j) = dH_i(V,Z) - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(H(V,Z),Z)dZ_j$$

Der K-Algebrahomomorphismus $\psi : K \langle\langle V,Z \rangle\rangle \to K \langle\langle T,V,W \rangle\rangle$ mit $\psi(V_i) = V_i$, $\psi(Z_j) = TW_j$ ist injektiv und induziert, wie man sofort sieht, einen injektiven $K \langle\langle V,Z \rangle\rangle$ - Homomorphismus $\psi^*: \Omega^1(K \langle\langle V,Z \rangle\rangle) \to \Omega^1(K \langle\langle T,V,W \rangle\rangle)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\psi^*(\upsilon_i) &= \psi^*(dH_i(V,Z) - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(H(V,Z),Z)\, dZ_j) \\
&= dH_i(V,TW) - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(H(V,TW),TW)\, d(TW_j) \\
&= dF_i(T,V,W) - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(F(T,V,W),TW)\, d(TW_j) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial F_i}{\partial V_k}(T,V,W)\, dV_k + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F_i}{\partial W_j}(T,V,W)\, dW_j + \frac{\partial F_i}{\partial T}(T,V,W)\, dT \\
&\quad - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(F(T,V,W),TW)\, TdW_j - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(F(T,V,W),TW)W_j\, dT
\end{aligned}$$

Aus 2. Beweisschritt, ii) ergibt sich:

$$\psi^*(\upsilon_i) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial F_i}{\partial V_k}(T,V,W)\, dV_k + \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial F_i}{\partial T}(T,V,W) - a_{ij}(F(T,V,W),TW)T\right)dW_j$$

Zwischenbehauptung:

$$c_{ij}(T,V,W) := \frac{\partial F_i}{\partial T}(T,V,W) - a_{ij}(F(T,V,W),TW)\, T = 0 \text{ für } \begin{array}{l} i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,s. \end{array}$$

Beweis:

Wir betrachten:

$$(1)\quad d(\psi^* \circ \varphi^*)(\omega_i) = d(\psi^*(\upsilon_i)) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial c_{ij}}{\partial T}(T,V,W)\, dT \wedge dW_j + \dots +$$

weitere Ausdrücke

Aufgrund der Voraussetzungen des Satzes - hier kommt endlich die Integrabilitätsbedingung ins Spiel - gibt es $\theta_{ik} \in \Omega^1(R)$ mit $d\omega_i = \sum_{k=1}^{r} \theta_{ik} \wedge \omega_k$. Mit den Rechenregeln aus Bemerkung 8.16 führt das zu:

$$(2)\quad d(\psi^{*} o \varphi^{*})(\omega_i) = \psi^{**} o \varphi^{**} (d\,\omega_i)$$

$$= \psi^{**} o \varphi^{**} \left(\sum_{k=1}^{r} \theta_{ik} \wedge \omega_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \psi^{**} o \varphi^{**} (\theta_{ik} \wedge \omega_k) = \sum_{k=1}^{r} \psi^{*} o \varphi^{*}(\theta_{ik}) \wedge \psi^{*} o \varphi^{*}(\omega_k).$$

Setzen wir $\psi^{*} o \varphi^{*} (\theta_{ik}) := e_{ik}(T,V,W)dT + \ldots +$ weitere Terme, so müssen die Koeffizienten vor gleichen Basiselementen in den Ausdrücken (1) und (2) identisch sein, speziell muß für die Koeffizienten von $dT \wedge dW_j$ gelten

$$(3)\quad \frac{\partial c_{ij}}{\partial T}(T,V,W) = \sum_{k=1}^{r} e_{ik}(T,V,W) \cdot c_{kj}(T,V,W)\ ,\ j=1,\ldots,s\ .$$

Die Potenzreihen $f'_i(T,X,V,W) := \sum_{k=1}^{r} e_{ik}(T,V,W) \cdot X_k$, $i=1,\ldots,r$, sind Elemente von $K \langle\!\langle T,X,V,W \rangle\!\rangle$. Nach (EES) gibt es genau ein System $F' = (F'_1,\ldots,F'_r)$, $F'_i \in K \langle\!\langle T,V,W \rangle\!\rangle$, $i = 1,\ldots,r$, mit:

i) $F'_i(0,V,W) = 0$

ii) $\frac{\partial F'_i}{\partial T}(T,V,W) = f'_i(T,F'(T,V,W),V,W) = \sum_{k=1}^{r} e_{ik}(T,V,W) \cdot F'_k(T,V,W)$.

Aus (3) ersehen wir, daß für jedes $j \in \{1,\ldots,s\}$ $c_j := (c_{1j},\ldots,c_{rj})$ die Bedingung ii) erfüllt. Aber auch i) wird erfüllt, denn

$$c_{ij}(0,V,W) = \frac{\partial F_i(0,V,W)}{\partial W_j} - a_{ij}(F(0,V,W),0W)\cdot 0 = \frac{\partial V_i}{\partial W_j} = 0\ ,\ \begin{matrix} i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,s \end{matrix}\ .$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung gilt zunächst

$$c_{ij} = c_{ik} \quad \text{für } i = 1,\ldots,r \text{ und } 1 \leq j,k \leq s\ .$$

Eine weitere Lösung obiger Differentialgleichung ist $F_i^!(T,V,W) := 0$, $i = 1,\ldots,r$. Die Eindeutigkeit der Lösung führt damit zu

$$c_{ij} = 0\,, \quad i = 1,\ldots,r \quad , \; j = 1,\ldots,s \; .$$.-

Wir führen nun den Beweis des 4. Beweisschrittes zu Ende. Aus dem obigen Ergebnis erhalten wir

$$\psi^* \circ \varphi^* (\omega_i) = \psi^*(\upsilon_i) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial F_i}{\partial V_k} (T,V,W)\, dV_k \, .$$

Wegen der Injektivität von ψ^* ist auf $\psi^*(\Omega^1(K \langle\!\langle V,Z \rangle\!\rangle))$ die Umkehrabbildung $(\psi^*)^{-1}$ definiert. Es ergibt sich

$$\upsilon_i = (\psi^*)^{-1} \circ \psi^*(\upsilon_i) = (\psi^*)^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial F_i}{\partial V_k}(1,V,TW)dV_k\Big) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial H_i}{\partial V_k}(V,Z)dV_k .$$

Damit ist der Beweis des letzten Beweisschrittes und somit der Beweis des Satzes von Frobenius abgeschlossen. .-

<u>Bemerkung 9.3</u>

Die Umkehrung des Satzes von Frobenius ist ebenfalls richtig.

<u>Beweis:</u>

Sei $\Omega' = R(dU_1,\ldots,dU_r)$, $\Omega'' = R(dV_1,\ldots,dV_s)$.

Ist $\omega \in \Omega'$, so gilt $\omega = \sum_{i=1}^{r} a_i \, d\, U_i$, $a_i \in K \langle\!\langle U,V \rangle\!\rangle$, $i=1,\ldots,r$, und wir erhalten

$$d\omega = \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial a_i}{\partial U_k} \, d\, U_k \wedge dU_i + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial a_i}{\partial V_k} \, dV_k \wedge dU_i \Big) \; .$$

Genau das aber heißt: $d\omega \in \Omega^1(R) \wedge \Omega'$.

Der gleiche Schluß läßt sich für Ω'' ziehen. .-

Literaturverzeichnis

[1] Atiyah-Macdonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Pub. Comp., London 1969

[2] Bosch, S.: Endliche analytische Homomorphismen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 41 - 49 1967

[3] Bourbaki, N.: Éléments de mathématique, Fasc. VII, Livre II: Algèbre, Chap. 3, Algèbre multilinéaire, Hermann, Paris 1958

[4] Cartan, Henri: Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen, BI-Hochschultaschenbücher 112/112 a

[5] Cartan, Henri: Differential Forms, Hermann, Paris 1970

[6] Diederich-Remmert: Funktionentheorie I, Springer Verlag Berlin · Heidelberg · New York 1972, Heidelberger Taschenbuch, Band 103

[7] Flanders, H.: Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Academic Press, New York · London 1963

[8] Grauert-Remmert: Analytische Stellenalgebren, Springer Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1971

[9] Hasse, H.: Zahlentheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1949

[10] Holmann, H.: Lineare und multilineare Algebra I, BI-Hochschultaschenbücher 173/173 a

[11] Hu, Sze-Tsen: Introduction to Homological Algebra, Holden-Day, Inc. San Francisco, Cambridge, London , Amsterdam 1968

[12] Kamke, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Akad. Verlagsges., Leipzig 1930

[13] Lang, S.: Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1965

[14] Narasimhan, R.: Analysis on Real and Complex Manifolds, Masson, Paris 1968

[15] Scheja, G.: Differentialmoduln lokaler analytischer Algebren, Schriftenreihe des Math. Inst. der Universität Fribourg, Fribourg, Wintersem. 1969/70

[16] Cartan, E.: La thèorie des groupes finis et continus et gêomêtrie differentielle, Gauthier-Villars, Paris 1937

[17] Chevalley, C.: Theory of Lie Groups, Princeton University Press 1946

[18] Frobenius, F.G.: Gesammelte Abhandlungen, Band I, Springer Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1968

Literaturverzeichnis nach Paragraphen geordnet

§ 1	[10] , [11] , [13]
§ 2	[1] , [8]
§ 3	[8]
§ 4	[6] , [9]
§ 5	[2] , [8]
§ 6	[4] , [12]
§ 7	[1] , [3] , [11] , [13]
§ 8	[8] , [15]
§ 9	[7] , ([5] , [14], [16], [17])

Sachverzeichnis