Über Graphen mit Kreisen, die gegebene Wege enthalten

M. Grötschel, Bonn

Die im folgenden betrachteten Graphen $G=(V,E)$ sind ungerichtet, haben keine Mehrfachkanten und keine Schleifen. Der <u>Grad</u> eines Knoten $v\varepsilon V$ ist die Anzahl der Kanten $e\varepsilon E$, die v enthalten und wird mit <u>$d(v)$</u> bezeichnet. Eine monotone steigende Folge von ganzen Zahlen $d_1,\dots,d_n$ heißt eine <u>Gradsequenz</u>, wenn es einen Graphen mit n Knoten gibt, so daß $d_i = d(v_i)$, $i=1,\dots,n$ gilt. Eine Folge $P=(v_1,\dots,v_p)$ von Knoten heißt ein <u>Weg</u>, falls $\{v_i,v_{i+1}\}\varepsilon E$ $i=1,\dots,p-1$. Die <u>Länge des Weges ist</u> $p-1$ (Wege der Länge 0 enthalten weder Knoten noch Kanten). Ist darüber hinaus $\{v_1, v_p\}\varepsilon E$, so ist P ein <u>Kreis</u> der Länge p.

Ein interessantes und vielfach untersuchtes Problem der Graphentheorie ist es, notwendige oder hinreichende Bedingungen dafür zu finden, daß ein Graph Kreise gewisser Länge enthält. Ein umfassender Überblick über die bisher erzielten Ergebnisse findet sich in [4] und [1] .

Im folgenden soll ein Satz angegeben werden, der Aussagen darüber macht, wann in einem Graphen - gegeben irgendein Weg der Länge r - ein Kreis der Länge $m \geq r+3$ existiert, der diesen Weg enthält. Aus diesem Satz lassen sich einige der bekannten Resultate über Kreise in Graphen leicht ableiten. Die zum Teil recht umfangreichen Beweise der nachfolgenden Sätze finden sich in [3] .

Als wichtige Hilfsmittel für den Beweis von Theorem 2 erweisen sich Eigenschaften von h-fach zusammenhängenden Graphen.
Besonders nützlich ist dabei

<u>Satz 1</u> [3]

Sei G ein $(r+2)$-fach zusammenhängender Graph und $P=(a_o,\dots,a_p)$ ein Weg in G, $p \geq r$. Sei $Q=(a_s,\dots,a_{r+s})$ ein Weg der Länge r, der in P enthalten ist. Dann existiert ein Paar P', P'' von Wegen mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Endknoten von P' und P" sind a_o und a_p.

b) P' und P" haben keine weiteren gemeinsamen Knoten.

c) Falls P' (oder P") Knoten von P enthält, dann erscheinen diese in P' (oder P") in derselben Ordnung wie in P.

d) P' enthält den Weg Q.

Das zentrale Resultat von [3] läßt sich nun wie folgt formulieren.

Theorem 2 [3]

Sei $d_1,\dots,d_n$ die Gradsequenz eines Graphen $G=(V,E)$.

Sei $n\geq 3$, $m\leq n$ und $0\leq r\leq m-3$, und die folgende Bedingung sei erfüllt für alle k mit $0<k<\frac{1}{2}(m-r)$

$$(1) \quad d_k \leq k+r \Rightarrow d_{n-k-r} \geq n-k.$$

Sei darüberhinaus G $(r+2)$-fach zusammenhängend, wenn sowohl $\frac{1}{2}(m-r)\leq n-d_{n-r-1}-1$ als auch $d_k>k+r$ für alle $0<k<\frac{1}{2}(m-r)$ gilt.

Dann gibt es zu jedem Weg Q der Länge r in G einen Kreis, der mindestens die Länge m hat und Q enthält.

Korollar 3 [3]

Sei $d_1,\dots,d_n$ die Gradsequenz eines Graphen $G=(V,E)$.

Sei $n \geq 3$, $q \geq 2$, und die folgende Bedingung sei erfüllt.

$$(2) \quad d_k \leq k \leq q-1 \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k.$$

Sei darüber hinaus G 2-fach zusammenhängend, wenn sowohl $q-1<n-d_{n-1}-1$ als auch $d_k>k$ für alle $1 \leq k \leq q-1$ gilt. Dann enthält G einen Kreis, der mindestens die Länge $\min\{n,2q\}$ hat.

Korollar 4 [3]

Sei $G=(V,W,E)$ ein bipartiter Graph mit Gradsequenzen, $d(v_1) \leq\dots\leq d(v_n)$ und $d(w_1) \leq \dots \leq d(w_m)$, $n \leq m$. Falls

$$(3) \quad d(w_k) \leq k \leq n-1 \Rightarrow d(v_{n-k}) \geq m-k+1,$$

dann enthält G einen Kreis der Länge 2n.

In [3] wird weiterhin bewiesen, daß sich aus Theorem 2 de (siehe [4, S. 222]), der Satz von Chvátal (siehe [1, S. 2 schwache Form des Satzes von Berge [1, S. 204] ableiten l Anhand von Beispielen wird gezeigt, daß Theorem 2 in gewi möglich ist und daß Korollar 3 weder stärker noch schwäch von Bondy [2] und die noch unbewiesene Vermutung von Wood

Literatur

[1] Berge, C.: Graphs and Hypergraphs, North Holland Pub. Company, Amsterdam-London, 1973

[2] Bondy, J.A.: Large Cycles in Graphs, Discrete Mathema No. 2 (1971) 121-132

[3] Grötschel, M.: Graphs with Cycles containing given P No. 7537-OR, Institut für Ökonometrie und Universität Bonn, Juni 1975

[4] Walther, H.; Voss, H.-J.: Über Kreise in Graphen, VE Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974

[5] Woodall, D.R.: Sufficient Conditions for Circuits in London Math. Soc. (3) 24 (1972) 739-755