

# MATHEMATICAL SYSTEMS IN ECONOMICS 36

Edited by  
Herausgegeben von

S. N. AFRIAT  
Ottawa

G. BAMBERG  
Augsburg

W. EICHHORN  
Karlsruhe

G. HAMMER  
Augsburg

R. HENN  
Karlsruhe

R. KAERKES  
Aachen

K. NEUMANN  
Karlsruhe

H. NOLTEMEIER  
Göttingen

O. OPITZ  
Innsbruck

B. RAUHUT  
Aachen

J. ROSENMÜLLER  
Karlsruhe

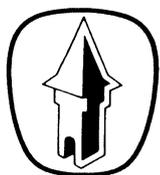
R. W. SHEPHARD  
Berkeley

## Polyedrische Charakterisierungen kombinatorischer Optimierungsprobleme

**Martin Grötschel**

Institut für Ökonometrie  
und Operations Research  
Universität Bonn

Nassestraße 2, D - 5300 Bonn



VERLAG ANTON HAIN · MEISENHEIM AM GLAN

**CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek**

**Grötschel, Martin**

Polyedrische Charakterisierungen kombinatorischer Optimierungsprobleme. — Meisenheim am Glan: Hain, 1977.

(Mathematical systems in economics; H. 36)

ISBN 3-445-01537-6

© 1977 Verlag Anton Hain Meisenheim GmbH  
Herstellung: Hain-Druck KG, Meisenheim/Glan  
Printed in Germany  
ISBN 3-445-01537-6

III

*Meinen Eltern gewidmet*

IV = Vakrat

IV

*Inhaltsverzeichnis*

Introduction .....	1
Teil 1. Grundlagen.....	9
Kapitel 1. Graphentheorie .....	9
§ 1. Graphen .....	9
§ 2. Digraphen .....	11
Kapitel 2. Polyedertheorie .....	12
§ 3. Lineare Algebra .....	13
§ 4. Polyeder .....	14
Kapitel 3. Boolesche Algebra .....	18
§ 5. Die grundlegenden Begriffe .....	18
§ 6. Beziehungen zur Polyedertheorie .....	20
Kapitel 4. Matroidtheorie .....	24
§ 7. Unabhängigkeitssysteme und Matroide .....	25
§ 8. Matroid Polytope .....	30
§ 9. Der Polytop der Basen .....	35
Teil 2. Das symmetrische Travelling Salesman Problem .....	43
Kapitel 5. Das Spanning Tree Problem .....	45
§ 10. Der Forest Polytop .....	46
§ 11. Der Spanning Tree Polytop .....	47
Kapitel 6. Das 2-Matching Problem .....	50
§ 12. Verschiedene Matching Polytope .....	51
§ 13. Die gebrochenen Ecken von $\bar{Q}_{2M}$ .....	52
§ 14. Die Facettialstruktur des monotonen 2-Matching Polytopen .....	54
§ 15. Der 2-Matching Polytop .....	60
Kapitel 7. Erste Resultate über die Struktur der symmetrischen Travelling Salesman Polytope .....	66
§ 16. Zusammenhang mit verwandten Problemen .....	66
§ 17. Die Dimension von $Q_T^n$ und $\tilde{Q}_T^n$ .....	68
§ 18. Primimplikanten - triviale Facetten .....	70

Kapitel 8. Liftungssätze für die symmetrischen Travelling Salesman  
 Polytope ..... 78

§ 19. Einige Lemmata ..... 78

§ 20. Liftungssätze für  $Q_T^n$  ..... 99

§ 21. Liftungssätze für  $\tilde{Q}_T^n$  ..... 118

Kapitel 9. Facetten der symmetrischen TSP-Polytope ..... 125

§ 22. Neue gültige Ungleichungen ..... 125

§ 23. Facetten von  $Q_T^n$  ..... 131

§ 24. Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  ..... 145

§ 25. Hypohamiltonsche, hypokettenhamiltonsche Graphen und die  
 Komplexität der Facettialstruktur von  $\tilde{Q}_T^n$  ..... 151

Teil 3. Das asymmetrische Travelling Salesman Problem ..... 167

Kapitel 10. Das Zuordnungsproblem ..... 168

§ 26. Partitions Matroide ..... 169

§ 27. Der Zuordnungspolytop ..... 171

Kapitel 11. Das Optimum Branching Problem ..... 174

§ 28. Minimale starke Blöcke ..... 175

§ 29. Der Branching Polytop (Antibranching Polytop) ..... 184

§ 30. Der Polytop der Arboreszenzen ..... 191

Kapitel 12. Erste Resultate über die Struktur der asymmetrischen  
 Travelling Salesman Polytope ..... 196

§ 31. Die "gutartigen" Verwandten ..... 196

§ 32. Die Dimension von  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  ..... 199

§ 33. Primimplikanten - triviale Facetten ..... 204

Kapitel 13. Liftungssätze für die asymmetrischen Travelling Salesman  
 Polytope ..... 211

§ 34. Liftungssätze für  $P_T^n$  ..... 211

§ 35. Liftungssätze für  $\tilde{P}_T^n$  ..... 225

Kapitel 14. Facetten der asymmetrischen Travelling Salesman Polytope 233

§ 36. Neue gültige Ungleichungen ..... 234

§ 37. Facetten von  $P_T^n$  ..... 240

§ 38. Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  ..... 260

Teil 4. Die Lösung eines symmetrischen 120-Städte Travelling Salesman  
Problems mit linearer Programmierung ..... 274

Literaturverzeichnis ..... 297

Symbole und Abkürzungen ..... 302

Sachverzeichnis ..... 303

### *Introduction*

One of the startling features of combinatorial programming is the fact that most of its problems can be easily stated in a readily understandable way, but are hard to solve. Only recently ([Cook,1971],[Karp,1972]) progress has been made in rigorously classifying easy and hard combinatorial optimization problems by translating them into language recognition problems on Turing machines. The easy problems (P-problems) are those which can be solved in a polynomial number of computational steps depending on the "size" of the problem (i.e. binary encoding of the problem data) on a deterministic Turing machine and hence on a real computer. NP-problems are those which are solvable on a nondeterministic Turing machine in polynomial time, and are called hard if no polynomial algorithm on a deterministic Turing machine is known. An NP-problem  $\mathcal{P}$  is termed hardest (NP-complete) if it has the property that the existence of a polynomial algorithm on a deterministic Turing machine for  $\mathcal{P}$  implies the existence of such a polynomial algorithm for all NP-problems. Unfortunately most of the combinatorial optimization problems with a wide range of applications are NP-complete. However it is still an open question whether the class of NP-problems is strictly larger than the class of P-problems, though this is widely believed to be true.

Polyhedral combinatorics played and still plays an important role in proving that certain combinatorial optimization problems are indeed P-problems. Verifying this fact involves in general the design of a polynomial algorithm and the laborious proof of its correctness. The proof is often done by firstly defining a polyhedron whose vertices are in one to one correspondence with the feasible configurations of the combinatorial problem, secondly finding inequalities and equations which characterize this polytope completely, thirdly interpreting the algorithm as a special linear programming algorithm and fourthly using duality theory. Usually the difficult part of this procedure is the second step.

The success of these methods of polyhedral combinatorics with respect to P-problems clearly suggests trying a similar approach to attack NP-problems. A polyhedron associated with a combinatorial optimization problem is easily defined; what remains is to find a list of all the facets of this polyhedron. Since the beginning of this decade intensive research has been done to completely characterize polytopes associated with NP-problems. Although more and more classes of facets and hence "good" and "better" approximations of

these polytopes were discovered there is still no polytope associated with an NP-complete problem for which a complete linear characterization is known explicitly. Despite this negative aspect these results gave rise to a number of quite efficient so called cutting plane algorithms and improved branch-and-bound algorithms, hence the study of the facial structure of these polytopes proves again to be of practical relevance.

Furthermore the author conjectures that the fact that for all known NP-complete problems no explicit complete linear characterization of the associated polytope is available, is not merely a coincidence but results from a deeper mathematical phenomenon yet to be fathomed.

This study is a contribution to the efforts currently being made to characterize those polytopes which are associated with hard problems. It is especially concerned with the NP-complete travelling salesman problem and some P-problems which are closely related such as the spanning tree problem, the 2-matching problem, the assignment problem, and the branching problem.

Let  $K_n = [V, E]$  be the complete undirected graph on  $n$  nodes, let  $T_n$  be the set of all hamiltonian cycles of  $K_n$ , and let  $\tilde{T}_n$  be the set of all subsets of the hamiltonian cycles of  $K_n$ . If  $x^T \in \mathbb{R}^{|E|}$  is the edge incidence vector of  $T \subset E$  then we define

$$Q_T^n := \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^{|E|} \mid T \in T_n\},$$

$$\tilde{Q}_T^n := \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^{|E|} \mid T \in \tilde{T}_n\}.$$

$Q_T^n$  is called the *symmetric travelling salesman polytope*, and  $\tilde{Q}_T^n$  the *monotone symmetric travelling salesman polytope*.  $Q_T^n$  has the property that its vertices are in one to one correspondence with the hamiltonian cycles in  $K_n$ .

Similarly we define the *asymmetric travelling salesman polytope*  $P_T^n$  and the *monotone asymmetric travelling salesman polytope*  $\tilde{P}_T^n$  as the convex hull of all incidence vectors of the hamiltonian circuits (subsets of hamiltonian circuits) of the complete directed graph on  $n$  nodes.

The aim of this study is to approximate the polytopes  $Q_T^n$ ,  $\tilde{Q}_T^n$ ,  $P_T^n$  and  $\tilde{P}_T^n$  as well as possible, i.e. to find large classes of valid inequalities and to prove that these inequalities in fact define facets of those polytopes. Furthermore we shall characterize those facets of  $Q_T^n$ ,  $\tilde{Q}_T^n$ ,  $P_T^n$ ,  $\tilde{P}_T^n$  which are "inherited" from naturally related polytopes of P-problems such as the forest polytope, the 2-matching polytope, the assignment polytope and the branching polytope, and we shall prove some results which indicate that it is impossible to give a complete explicit characterization of the travelling salesman polytopes.

On the other hand we shall solve a 120-city symmetric travelling salesman problem by linear programming, which shows that the characterizations found may prove to be of value for solving large problems.

Teil 1 contains the mathematical prerequisites for the later chapters. In § 1 undirected graphs are defined, some graph theoretical concepts are introduced, and a few results are cited. The same is done for directed graphs in § 2. In § 3 some necessary results from linear algebra are cited while § 4 contains a variety of results on polytopes collected from the literature. Some of these theorems, such as Satz 4.4, Satz 4.5, are fundamental tools in the further discussions.

In § 5 basic notions of boolean algebra are introduced. These are needed in § 6 to cite some well known results connecting boolean concepts with polyhedral theory. In particular Padberg's lifting procedure (Satz 6.4) in connection with prime implicant inequalities will prove to be of value in the sequel.

Kapitel 4 deals with some aspects of the elegant theory of matroid polytopes due to Jack Edmonds. Those concepts of matroid theory and the theory of independence systems which are useful in polyhedral theory are given in § 7. Some properties of inseparable sets in matroids are proved (Satz 7.2, Satz 7.4). In § 8 a matroid polytope is defined as the convex hull of all incidence vectors of the independent sets of a matroid. A new proof is given for the non-redundancy part of Edmonds' [1970] complete and non-redundant linear characterization of matroid polytopes (Satz 8.3, Satz 8.4). Furthermore the convex hull of the incidence vectors of all bases of a matroid is non-redundantly characterized in § 9 (see Satz 9.3, Satz 9.6, Satz 9.8, Satz 9.9).

The symmetric travelling salesman problem is treated in Teil 2.

First (Kapitel 5 and 6) those polytopes of P-problems which are closely related to the symmetric travelling salesman problem are studied.

Utilizing the results about matroid theory we give complete and non-redundant linear characterizations of the forest polytope (Satz 10.3) and of the spanning tree polytope (Satz 11.2).

Kapitel 6 is devoted to the 2-matching problem. Several polytopes related to matchings and b-matchings appearing in the literature are discussed in § 12. We consider here the polytopes:  $Q_{2M}^n$  = convex hull of all incidence vectors of perfect 2-matchings in the complete graph  $K_n$ ,  $\tilde{Q}_{2M}^n$  = convex hull of all incidence vectors of 2-matchings in the complete graph  $K_n$ , and

$$\bar{Q}_{2M}^n := \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid 0 \leq x_e \leq 1 \quad \forall e \in E, \quad \sum_{e \in \omega(i)} x_e = 2 \quad \forall i \in V\}.$$

$\bar{Q}_{2M}^n$  is in a certain sense the coarsest meaningful relaxation of  $Q_{2M}^n$ . All the vertices of  $\bar{Q}_{2M}^n$ , in particular the fractional vertices, are characterized

in § 13 (Satz 13.1, Satz 13.2). Starting with the complete characterization of the monotone 2-matching polytope  $\tilde{Q}_{2M}^n$  given by Edmonds [1965] we first of all prove that all trivial inequalities define facets of  $\tilde{Q}_{2M}^n$ . Afterwards

we single out the dominated 2-matching constraints and prove that the 2-matching constraint  $\sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \frac{k-1}{2}$  defines a facet of  $\tilde{Q}_{2M}^n$

if and only if  $|W_0 \cap W_i| = 1$ ,  $|W_i| = 2$ ,  $i = 1, \dots, k$ ;  $W_i \cap W_j = \emptyset$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ ,

$k \geq 3$  and odd, or  $k = 1$  and  $|W_0| \geq 4$  (Satz 11.4). Satz 14.6 gives a complete and non-redundant linear characterization of  $\tilde{Q}_{2M}^n$ . The 2-matching polytope  $Q_{2M}^n$  which is a face of  $\tilde{Q}_{2M}^n$  is characterized in § 15. Its dimension is  $|E| - |V|$  and therefore some of the facets of  $\tilde{Q}_{2M}^n$  are no longer facets of  $Q_{2M}^n$  or are equivalent to others. The trivial inequalities are considered in Satz 15.7.

Those 2-matching constraints which are equivalent with respect to  $Q_{2M}^n$  are given in Satz 15.5, and in Satz 15.9 all 2-matching inequalities which define facets of  $Q_{2M}^n$  are characterized. Satz 15.10 gives a complete and non-redundant linear description of  $Q_{2M}^n$ .

In § 16 the polyhedral relationships between the symmetric travelling salesman problem and the spanning tree problem as well as the 2-matching problem are discussed. Using a well known result of graph theory (Satz 17.2) the dimension of the travelling salesman polytope  $Q_T^n$  is found in Satz 17.3 to be  $|E| - |V|$ .

In the first part of § 18 the prime implicants of the resolvent functions of the sets  $T_n$  and  $\tilde{T}_n$  are determined. Utilizing theorems of § 6 the trivial inequalities, the degree constraints, and the subtour elimination constraints are identified as facets of  $\tilde{Q}_T^n$  (Sätze 18.1, 18.2, 18.3). Folgerung 18.4 characterizes those facets of the forest polytope which are also facets of the monotone travelling salesman polytope  $\tilde{Q}_T^n$ . Proving that the trivial inequalities  $x_{ij} \leq 1$ ,  $x_{ij} \geq 0$  are facets of the symmetric travelling salesman polytope  $Q_T^n$  requires much more effort (Satz 18.5, Satz 18.6). The polytopes  $Q_T^4$ ,  $Q_T^5$  and  $\tilde{Q}_T^4$  are given completely in 18.7, 18.8, 18.9.

Kapitel 8 provides us with lifting theorems for  $Q_T^n$  and  $\tilde{Q}_T^n$ . A number of lemmas needed in the following two paragraphs is given in § 19. Their proofs are dull, lengthy, but unavoidable and are carried out in detail. The foundations for subsequent proofs that certain inequalities define facets of  $Q_T^n$  are laid in § 20. Four theorems (Satz 20.1, 20.2, 20.3, 20.4) of the following type are proved:

Let  $ax \leq a_0$  be a facet of  $Q_T^n$ ; we assume that some coefficients are explicitly known, some are not, and for some coefficients lower bounds are given. Based on the partial knowledge of  $ax \leq a_0$  a new inequality  $a'x' \leq a'_0$  is explicitly defined which is valid for  $Q_T^{n'}$ ,  $n' > n$ , and it is proved that this inequality defines a facet of  $Q_T^{n'}$ .

Two similar lifting theorems (Satz 21.1, 21.2) for  $\tilde{Q}_T^n$  are proved in § 21. Kapitel 8 contains the main proof load for the characterization of facets of  $Q_T^n$  and  $\tilde{Q}_T^n$ .

Based on Edmonds' 2-matching constraints Chvátal [1973a] defined a new class of valid inequalities - the so called comb inequalities - for the symmetric travelling salesman polytopes. Those comb inequalities which are dominated with respect to  $Q_T^n$  and  $\tilde{Q}_T^n$  are determined in § 22. The non-dominated Chvátal-comb inequalities are generalized to a new class of comb inequalities (22.10, 22.11).

Facets of the symmetric travelling salesman polytope  $Q_T^n$  are determined in § 23. It is shown that all subtour elimination constraints  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  are facets of  $Q_T^n$  provided that  $3 \leq |W| \leq |V| - 3$ , and that exactly two of these inequalities are equivalent with respect to  $Q_T^n$  (Sätze 23.1, 23.2, 23.3). Those facets of the spanning tree polytope which are also facets of  $Q_T^n$  are ascertained in Satz 23.5. That the "smallest" comb inequality defines a facet of  $Q_T^n$ ,  $n \geq 6$ , is proved in Satz 23.6. Using Satz 23.6 and the four theorems of § 21 it is shown in Satz 23.7 that all new comb inequalities define facets of  $Q_T^n$ ; again exactly two of these comb inequalities are equivalent with respect to  $Q_T^n$ . Satz 23.9 determines all the facets of the 2-matching polytope  $Q_{2M}^n$  which are also facets of  $Q_T^n$ . A non-redundant partial characterization of  $Q_T^n$  is given in Satz 23.10 which in our opinion is already quite a good approximation of  $Q_T^n$ .

Using § 22 analogous results concerning the facial structure of the monotone symmetric travelling salesman polytope  $\tilde{Q}_T^n$  are given in § 24. Satz 24.4 gives a non-redundant system of facets of  $\tilde{Q}_T^n$ . The number of these different facets is calculated in Satz 24.5. It turns out that the number of known facets of  $\tilde{Q}_T^n$  is already tremendously large.

In § 25 hypohamiltonian and hypotraceable graphs are introduced. A certain new property  $\Delta$  is defined (Definition 25.1), and it is shown in 25.3 - 25.9 that almost all known hypohamiltonian and hypotraceable graphs have property  $\Delta$ . Hypohamiltonian and hypotraceable inequalities are defined in Satz 25.10, and we prove in Satz 25.14 that for all hypohamiltonian graphs  $G = [V, E]$ ,

$|V| = n$ , having property  $\Delta$  there exists a hypohamiltonian graph  $G' = [V, E']$ ,  $E \subset E'$ , such that the hypohamiltonian inequality  $\sum_{e \in E'} x_e \leq n - 1$  is a facet of  $\tilde{Q}_T^n$  but is not a facet of  $\tilde{Q}_T^m$ ,  $m > n$ . A similar result for hypotractable graphs is given in Satz 25.15. These two classes of very complicated inequalities for which an explicit characterization seems to be rather difficult to find, lead us to the conjecture that it is impossible to give a complete and non-redundant explicit characterization of  $\tilde{Q}_T^n$  (see also the discussions at the ends of § 24 and § 25).

The facial structures of the asymmetric travelling salesman polytopes are studied in Teil 3.

First of all (Kapitel 10 and 11) we consider polytopes associated with P-problems which are natural relatives of the asymmetric travelling salesman problem.

Two matroid polytopes induced by special partition matroids on a digraph are characterized completely and non-redundantly in § 26. In § 27 the well known (monotone) assignment polytope is shown to be the intersection of these two matroid polytopes and a characterization is given.

Kapitel 11 deals with the optimum branching (and antibranching) problem. In order to characterize the branching polytope non-redundantly the class of two-connected and strongly connected digraphs (called strong blocks) is treated in § 28. It is shown that all strong blocks can be constructed by a special "ear decomposition" (Satz 28.1) which provides one tool for the study of minimal strong blocks which are strong blocks  $G = (V, E)$  such that  $G - e$  is not a strong block for all  $e \in E$ . The two main results are that the number of edges  $|E|$  of minimal strong blocks is bounded by  $|V| \leq |E| \leq 2|V| - 3$  (Satz 28.6) and that all minimal strong blocks contain at least two nodes with indegree and outdegree one (Satz 28.11). Using Satz 28.11 and the complete characterization of branching polytopes found by Edmonds [1968] a non-redundant characterization of branching polytopes is given in § 29 (see Satz 29.5). Taking advantage of a simple new characterization of quasi-strongly connected digraphs (Satz 30.2) the convex hull of the incidence vectors of all arborescences of a digraph is studied in § 30.

The polyhedral relationship between the asymmetric travelling salesman problem on the one hand and the above-mentioned two partition matroid problems, the spanning tree problem, the assignment problem, and the branching (antibranching) problem on the other is discussed in § 31.

That the dimension of the asymmetric travelling salesman polytope  $P_T^n$  is  $n(n-3)+1$  is shown in Satz 32.2. Two proofs are given, the second one turns out to be of great value in § 37.

In § 33 we calculate the prime implicants of the resolvent functions of  $P_T^n$  and  $\tilde{P}_T^n$  and prove, using sequential lifting procedures, that the degree constraints are facets of  $\tilde{P}_T^n$ . Contrary to the symmetric problem sequential lifting procedures do not suffice to show that the subtour elimination constraints are facets of  $\tilde{P}_T^n$ . Several "strange" liftings are shown in Bemerkung 33.6.

Kapitel 13 is the analogue of Kapitel 8 with respect to the asymmetric travelling salesman polytopes  $P_T^n$ ,  $\tilde{P}_T^n$ . With some effort two lifting theorems for  $P_T^n$  (Sätze 34.1, 34.2) and two lifting theorems for  $\tilde{P}_T^n$  (Sätze 35.1, 35.2) are proved which enable us to transport facets of lower dimensional polytopes to higher dimensional ones.

New inequalities valid for  $P_T^n$  and  $\tilde{P}_T^n$  are derived in § 36. An asymmetric version of the new comb-inequalities is defined in Satz 36.2. Further new inequalities are the C2-comb-inequalities (Satz 36.5), C3-comb-inequalities (Satz 36.8),  $D_k^-$  and  $D_k^+$ -inequalities (Satz 36.10),  $E_4$ -inequalities (Satz 36.12) and  $T_k$ -inequalities (Satz 37.5).

The "sharpness" of these inequalities with respect to  $P_T^n$  is studied in § 37. First of all we prove that the subtour-elimination constraints define facets of  $P_T^n$  (Satz 37.3), two of which however are equivalent. Satz 37.4 shows which of the facets of the spanning tree polytope, of the branching polytope and the antibranching polytope are also facets of  $P_T^n$ . Except for  $k = n-3$  all  $T_k$ -inequalities define facets of  $P_T^n$  (Satz 37.12). The  $D_3^-$ ,  $D_3^+$ ,  $D_4^-$ ,  $D_4^+$ -inequalities are shown to be facets of  $P_T^n$  in 37.14 - 37.17. Furthermore some of the C3-comb-inequalities and all  $E_4$ -inequalities define facets of  $P_T^n$  (37.21, 37.22). A summary of these results is given in 37.23.

Similar results about the facial structure of the monotone asymmetric travelling salesman polytope  $\tilde{P}_T^n$  are proved in § 38. A summary is given in 38.15. It turns out that almost all inequalities which define facets of  $P_T^n$  also define facets of  $\tilde{P}_T^n$  and that some classes of facets of  $\tilde{P}_T^n$  are not facets of  $P_T^n$  (for instance some comb-inequalities).

Finally Teil 4 gives a detailed description of the way we solved a symmetric 120-city real-world travelling salesman problem by iteratively applying linear programming techniques and merely using the facets found above as cutting planes.

Summarizing the results of this study, we have shown the following:  
Partially based on known results from the literature we characterized completely and non-redundantly all those polytopes associated with P-problems which are closely related to the symmetric or asymmetric travelling salesman problem. We succeeded to completely answer the question which of the facets of these polytopes remain facets of the travelling salesman polytopes and which do not. Furthermore we found very large classes of new valid inequalities for both, the symmetric and the asymmetric travelling salesman polytopes, and we were able to prove that most of these inequalities in fact define facets thus giving a partial non-redundant linear characterization of the symmetric and asymmetric travelling salesman polytopes. These results imply on the one hand that the numbers of facets of the travelling salesman polytopes are tremendously large and on the other that the facial structure of these polytopes is rather complicated, i.e. it is most unlikely that a complete explicit characterization can ever be obtained. Nevertheless it seems that the facets found define polytopes which are already quite good approximations of the symmetric and asymmetric travelling salesman polytopes and hence - as has been shown - might be helpful in practice.

This study has grown out of my work at the Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, during the years 1974 - 1976 in the stimulating environment of the Sonderforschungsbereich 21. Among the many persons with whom I collaborated and discussed the topics presented here two had an invaluable influence on me. Professor Bernhard Korte was a stimulating supervisor at all times and was always ready to discuss problems. His support and criticism were of great value for me. During his stay at Bonn Professor Manfred W. Padberg introduced me to this subject and taught me the methods of polyhedral combinatorics. Parts of chapters 7, 9, 12, and 14 were done in collaboration with him or are generalizations of joint results. I am grateful to both of them. Special thanks are also due to my wife Iris for the careful typing and proof-reading.

Martin Grötschel

## TEIL 1. GRUNDLAGEN

### *Kapitel 1. Graphentheorie*

Die Graphentheorie gehört wohl zu den Teilgebieten der Mathematik, die sich im letzten Jahrzehnt besonders stark weiterentwickelt haben. Ein wichtiger Grund dafür dürfte ihre vielfältige Anwendbarkeit in den verschiedensten Bereichen der Wirtschaftswissenschaften und der technischen Wissenschaften sein. Leider gibt es jedoch keine zwei Lehrbücher der Graphentheorie, in denen identische Wörter oder Symbole dasselbe bedeuten. Deshalb wollen wir zunächst, um Verwechslungen zu vermeiden, alle im weiteren verwendeten Begriffe definieren und einige ihrer Eigenschaften angeben. Die hier dargestellten Definitionen und Ergebnisse sind auf die speziellen Erfordernisse dieser Arbeit zugeschnitten und im wesentlichen den Standardreferenzen der Graphentheorie [Berge,1973] und [Harary,1972] sowie - in der deutschsprachigen Literatur - [Noltemeier,1976], [Wagner,1970] und [Neumann,1975] entnommen, in denen auch weitergehende Erläuterungen zu finden sind.

#### § 1. Graphen

Ein ungerichteter Graph  $G$  (im weiteren Graph) besteht aus einer endlichen nicht-leeren Menge  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , deren Elemente Knoten genannt werden, und aus einer endlichen Familie  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  von zweielementigen Teilmengen von  $V$ . Die Elemente von  $E$  heißen Kanten. Als Kurzschreibweise für einen Graphen wählen wir die Bezeichnung  $G = [V, E]$ . Im weiteren werden wir fast immer  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  setzen.

Ist  $e = \{v, w\}$  eine Kante, so heißen  $v$  und  $w$  Endknoten von  $e$ , und wir sagen,  $e$  inzidiert mit (verbindet)  $v$  und  $w$ . Zwei Knoten heißen benachbart (adjazent), wenn es eine Kante gibt, die beide verbindet.

$$N(v) := \{w \in V \mid \exists e \in E \text{ mit } e = \{v, w\}\}$$

ist die Menge der Nachbarn von  $v \in V$ .

Gibt es mehrere Kanten, die zwei Knoten miteinander verbinden, so heißen diese parallel. Die Anzahl der Kanten, die mit einem Knoten  $v \in V$  inzidieren, heißt Grad von  $v$ , in Zeichen  $d(v)$ . Für Graphen ohne parallele Kanten bedeutet das:  $d(v) = |N(v)|$ .

Ist  $W \subset V$ , so ist  $\omega(W)$  die Menge der Kanten aus  $E$ , die genau einen Endknoten in  $W$  haben, für  $\omega(\{v\})$  schreiben wir  $\omega(v)$ ;  $E(W)$  ist die Menge der Kanten, die beide

Endknoten in  $W$  haben. Ist  $F \subset E$ , so ist  $V(F)$  die Menge aller Knoten in  $F$ , d.h.

$$V(F) := \bigcup_{e_i \in F} e_i.$$

Ein Graph  $G' = [V', E']$  heißt Untergraph von  $G = [V, E]$ , falls  $V' \subset V$  und  $E' \subset E$  gilt. Für  $W \subset V$  heißt  $[W, E(W)]$  der Knoten-induzierte ( $W$ -induzierte) Untergraph von  $G$ . Für  $F \subset E$  heißt  $[V(F), F]$  der Kanten-induzierte ( $F$ -induzierte) Untergraph von  $G$ .

Zur Abkürzung verwenden wir die folgende Schreibweise: Ist  $G = [V, E]$  ein Graph, so sei

$$\begin{aligned} G-v &:= [V-\{v\}, E(V-\{v\})] \quad \text{für } v \in V \text{ und} \\ G-e &:= [V, E-\{e\}] \quad \text{für } e \in E \text{ sowie} \\ G+e &:= [V, E \cup \{e\}] \quad \text{für } e \subset V \text{ mit } |e| = 2, e \notin E. \end{aligned}$$

Eine Kette von  $v_0$  nach  $v_s$ ,  $s \geq 1$ , ist eine Folge von Knoten und Kanten  $[v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_s, v_s]$  mit der Eigenschaft, daß  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$  gilt. Ist  $G$  ohne parallele Kanten, so ist die Kette durch  $[v_0, v_1, \dots, v_s]$  bereits eindeutig bestimmt. Eine Kette mit  $v_0 = v_s$ ,  $s \geq 2$ , heißt Zyklus und wird mit  $\langle e_1, v_1, \dots, e_s, v_s \rangle$  bzw.  $\langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle$  bezeichnet. Wir wollen außerdem annehmen, daß alle Knoten einer Kette bzw. eines Zyklus voneinander verschieden sind. Die Anzahl der Kanten einer Kette bzw. eines Zyklus heißt die Länge der Kette (des Zyklus). Zyklen der Länge  $|V|$  heißen Hamilton-Zyklen oder Touren.

Ist  $K = [v_0, e_1, \dots, e_s, v_s]$  eine Kette, so soll die Schreibweise  $v \in K$  bzw.  $e \in K$  besagen, daß der Knoten  $v \in V$  bzw. die Kante  $e \in E$  in der Kette  $K$  vorkommt.

Ist  $T \subset E$  eine Kantenmenge und  $[v_1, \dots, v_k]$  eine Kette, so schreiben wir für  $T \cup \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < k\}$  kurz  $T \cup [v_1, \dots, v_k]$ .

Sei  $M$  eine Menge, und für alle Teilmengen von  $M$  sei eine Eigenschaft  $P$  definiert, dann heißt  $B \subset M$  maximal (minimal) bezüglich  $P$ , wenn  $B$  die Eigenschaft  $P$  besitzt und jede echte Obermenge (Teilmenge) von  $B$  nicht die Eigenschaft  $P$  hat.

Ein Graph  $G = [V, E]$  heißt zusammenhängend, falls es zu je zwei Knoten  $v, w \in V$  eine Kette von  $v$  nach  $w$  gibt.  $G$  heißt zweifach zusammenhängend, falls es zu je zwei Knoten  $v, w \in V$  einen Zyklus gibt, der  $v$  und  $w$  enthält. Eine Komponente von  $G$  ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von  $G$ .  $v \in V$  heißt Artikulationsknoten, falls  $G-v$  mehr Komponenten enthält als  $G$ . Ein Block ist ein Knoten-induzierter Untergraph  $B$  von  $G$ , der zusammenhängend ist, mindestens zwei Knoten und keine Artikulationsknoten enthält und bezüglich dieser Eigenschaft maximal ist, d.h. ein Block ist ein maximaler zweifach zusammenhängender Untergraph von  $G$ .

Ein Graph, der keinen Zyklus enthält, heißt Wald, ein zusammenhängender Wald heißt Baum. Man überlegt sich leicht, daß ein Baum genau  $|V|-1$  Kanten enthält und daß jedes Hinzufügen einer weiteren Kante genau einen Zyklus erzeugt. Ein Baum  $[W,T]$  in einem Graphen  $[V,E]$  mit  $T \subset E$  und  $V = W$  heißt spannender Baum. Ein Graph  $G = [V,E]$ ,  $|V| \geq 2$ , heißt vollständig, wenn  $E = \{\{i,j\} \mid i,j \in V, i \neq j\}$  gilt. Vollständige Untergraphen eines Graphen heißen Cliquen.

## § 2. Digraphen

Ein gerichteter Graph oder Digraph besteht aus einer endlichen Menge  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  von Knoten und einer endlichen Familie  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  mit  $e_i \in V \times V - \{(v,v) \mid v \in V\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Die Elemente  $e$  von  $E$  heißen Bögen. Digraphen bezeichnen wir mit  $G = (V,E)$ . In manchen Fällen lassen wir auch die Existenz von Bögen  $(i,i)$ , den sogenannten Schlingen, zu.

Jedem Digraphen  $G = (V,E)$  kann man in eindeutiger Weise einen Graphen  $G' = [V,F]$  wie folgt zuordnen:

$$\begin{aligned} V &\ni v \rightarrow v \in V \\ E &\ni (i,j) \rightarrow \{i,j\} \in F. \end{aligned}$$

Über diese Zuordnung kann man alle Konzepte der ungerichteten Graphen auch auf Digraphen betrachten. Es ist also sinnvoll, von zusammenhängenden Digraphen, von einem Digraphen, der ein Baum ist, etc. zu sprechen.

Ist  $e = (v,w)$  ein Bogen, so heißt  $v$  Anfangsknoten und  $w$  Endknoten von  $e$ ,  $v$  heißt Vorgänger von  $w$  und  $w$  Nachfolger von  $v$ , wir sagen  $e$  geht von  $v$  aus und endet in  $w$ .

$$\begin{aligned} N^+(v) &:= \{w \in V \mid \exists e \in E \text{ mit } e = (v,w)\}, \\ N^-(v) &:= \{w \in V \mid \exists e \in E \text{ mit } e = (w,v)\}, \\ N(v) &:= N^+(v) \cup N^-(v). \end{aligned}$$

$N^+(v)$  ist die Menge der Nachfolger von  $v$  und  $N^-(v)$  die Menge der Vorgänger von  $v$ , analog zum ungerichteten Fall heißt  $N(v)$  die Menge der Nachbarn von  $v$ . Bögen, die denselben Anfangs- und denselben Endknoten haben, heißen parallel. Die Bögen  $(v,w)$ ,  $(w,v)$  heißen antiparallel. Die Mächtigkeit der Menge der von einem Knoten  $v$  ausgehenden Bögen (in  $v$  endenden Bögen) nennen wir den Außengrad (Innengrad) von  $v$  und bezeichnen ihn mit  $d^+(v)$  ( $d^-(v)$ ). Hat der Digraph  $G$  keine parallelen Bögen, so gilt  $d^+(v) = |N^+(v)|$ ,  $d^-(v) = |N^-(v)|$ .  $d(v) := d^+(v) + d^-(v)$  heißt Grad von  $v$ .

Ist  $W \subset V$ , so ist  $\omega^+(W)$  bzw.  $\omega^-(W)$  die Menge der Bögen aus  $E$ , deren Anfangsknoten bzw. Endknoten in  $W$  liegt, aber deren Endknoten bzw. Anfangsknoten nicht in  $W$  liegt.  $\omega(W) := \omega^+(W) \cup \omega^-(W)$ . Statt  $\omega(\{w\})$  schreiben wir  $\omega(w)$ . Gilt  $\omega(W) = \omega^+(W)$

oder  $\omega(W) = \omega^{-}(W)$ , dann heißt  $\omega(W)$  Cokreis.  $E(W)$  ist die Menge der Bögen, die Anfangs- und Endknoten in  $W$  haben. Für  $F \subset E$  ist  $\underline{V(F)} := \bigcup_{(v,w) \in F} \{v,w\}$ .

Unterdigraphen, sowie Knoten- (Kanten-) induzierte Unterdigraphen werden wie bei Graphen definiert, die Bezeichnungen  $G-v$ ,  $G-e$ ,  $G+e$  ebenfalls.

Ein Weg von  $v_0$  nach  $v_s$ ,  $s \geq 1$ , ist eine Folge von Knoten und Bögen  $[v_0, e_1, v_1, \dots, e_s, v_s]$  mit der Eigenschaft, daß  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , gilt. Hat  $G$  keine parallelen Bögen, so schreiben wir kurz  $[v_0, v_1, \dots, v_s]$ . Ein Weg mit  $v_0 = v_s$  heißt Kreis und wird mit  $\langle e_1, v_1, \dots, e_s, v_s \rangle$  bzw.  $\langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle$  bezeichnet. Zusätzlich wollen wir verlangen, daß alle Knoten eines Weges bzw. Kreises voneinander verschieden sind. Die Anzahl der Bögen eines Weges (Kreises) heißt die Länge des Weges (Kreises). Kreise der Länge  $|V|$  heißen Hamilton-Kreise, Wege der Länge  $|V|-1$  Hamilton-Wege.

Jeder Weg (Kreis) ist in natürlicher Weise eine Kette (Zyklus), aber nicht umgekehrt. Falls keine Verwechslung möglich ist, werden wir - der Kürze halber - Hamilton-Kreise manchmal auch Touren nennen, dabei aber die gerichtete Struktur meinen.

Ein Digraph heißt stark zusammenhängend, wenn es zu je zwei verschiedenen Knoten  $v, w \in V$  einen Weg von  $v$  nach  $w$  und einen Weg von  $w$  nach  $v$  gibt. Das ist äquivalent dazu, daß jeder Bogen auf einem Kreis liegt.

Ein Digraph heißt Branching, wenn er ein Wald ist und wenn in jedem Knoten höchstens ein Bogen endet. Eine Arboreszenz ist ein zusammenhängendes Branching, oder äquivalent dazu, eine Arboreszenz ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten, der sogenannten Wurzel, in der kein Bogen endet, von der aus aber jeder andere Knoten auf genau einem Weg erreicht werden kann.

Wir nennen einen Digraphen  $D = (V, E)$ ,  $|V| \geq 2$ , vollständig, wenn gilt  $E = V \times V - \{(i, i) \mid i \in V\}$ . Vollständige Unterdigraphen heißen Cliquen. Im Gegensatz zum Falle von Graphen enthält nicht jeder Digraph - aufgrund dieser speziellen Definition - eine Clique.

## *Kapitel 2. Polyedertheorie*

Im weiteren bezeichne  $\mathbb{R}$  die reellen Zahlen und  $\mathbb{R}^n$  den Vektorraum der  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$ . Wir werden ausnahmslos endlich-dimensionale Räume betrachten und nicht immer explizit die Dimension der betrachteten Vektoren und Matrizen angeben, sofern diese aus dem Kontext heraus ersichtlich ist. Desgleichen verzichten wir immer auf ein Transpositionszeichen, da i.a. klar ist, ob Vektoren als Zeilen- oder Spaltenvektoren zu interpretieren sind. Im folgenden wollen

wir einige Grundbegriffe der linearen Algebra, die wir häufig benutzen werden, auflisten. Sie finden sich in jedem Standardtext über lineare Algebra. Desgleichen wollen wir die wichtigsten und für diese Arbeit zentralen Begriffe der Polyedertheorie einführen und einige ihrer Eigenschaften angeben. Dieses Gebiet ist ausführlich in [Grünbaum,1967], [Rockafellar,1972] und [Stoer,Witzgall,1970] dargestellt.

### § 3. Lineare Algebra

Ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt Linearkombination von Vektoren  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ , wenn es  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$  gibt mit  $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i$ . Die lineare Hülle  $\text{lin}(S)$  einer Menge  $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$  ist die Menge aller Linearkombinationen von Elementen von  $S$ .  $\text{lin}(\emptyset) := \{0\}$ .

Eine Linearkombination, die  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$  erfüllt, heißt Affinkombination. Mit  $\text{aff}(S)$  bezeichnen wir die affine Hülle der Elemente von  $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ , das ist die Menge aller Affinkombinationen von Elementen von  $S$ .  $\text{aff}(\emptyset) := \{0\}$ .

Eine Affinkombination heißt Konvexkombination, wenn  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , gilt. Analog definieren wir die konvexe Hülle von  $S$ ,  $\text{conv}(S)$ , und  $\text{conv}(\emptyset) := \{0\}$ .

Aufgrund der Definition gilt:  $S \subset \text{conv}(S) \subset \text{aff}(S) \subset \text{lin}(S)$ .  $S$  ist ein linearer Teilraum (affiner Teilraum, eine konvexe Menge), wenn gilt  $S = \text{lin}(S)$  ( $S = \text{aff}(S)$ ,  $S = \text{conv}(S)$ ).  $\text{lin}(S)$  ( $\text{aff}(S)$ ,  $\text{conv}(S)$ ) ist der Durchschnitt aller linearen Teilräume (affinen Teilräume, konvexen Mengen), die  $S$  enthalten.

Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine endliche, nichtleere Menge und  $\lambda_x \in \mathbb{R} \quad \forall x \in S$ . Besitzt  $S$  die Eigenschaft

$$(a) \quad \sum_{x \in S} \lambda_x x = 0 \Rightarrow \lambda_x = 0 \quad \forall x \in S,$$

$$\text{bzw.} \quad (b) \quad \sum_{x \in S} \lambda_x x = 0 \text{ und } \sum_{x \in S} \lambda_x = 1 \Rightarrow \lambda_x = 0 \quad \forall x \in S,$$

so heißt  $S$  linear bzw. affin unabhängig, andernfalls linear bzw. affin abhängig. Die leere Menge sei per definitionem linear und affin unabhängig. Offensichtlich ist jede linear unabhängige Menge  $S$  auch affin unabhängig, ebenso ist  $S \cup \{0\}$  affin unabhängig.

Die bezüglich der linearen Unabhängigkeit maximalen Teilmengen eines Vektorraums heißen Basen. Ein fundamentaler Satz der linearen Algebra besagt, ist  $U$  ein linearer Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ , dann haben alle Basen von  $U$  die gleiche endliche Kardinalität. Diese Zahl nennen wir Dimension von  $U$ ,  $\text{dim } U$ .

Ein affiner Raum  $T$  heißt parallel zu einem affinen Raum  $S$ , wenn es ein  $a \in \mathbb{R}^n$  gibt mit  $T = S + a$ . Offensichtlich ist  $L(T) := \{x-y \mid x, y \in T\}$  ein zu  $T$  paralleler

linearer Raum, und zwar der einzige zu  $T$  parallele lineare Teilraum des  $\mathbb{R}^n$ .  
Wir definieren für einen affinen Raum  $T$

$$\dim T := \dim L(T).$$

Damit können wir für beliebige Teilmengen  $S \subset \mathbb{R}^n$  einen Dimensionsbegriff einführen

$$\dim S := \dim \text{aff}(S).$$

Öffensichtlich gilt  $\dim S = \dim \text{conv}(S) = \dim \text{aff}(S)$ .

Aus den obigen Definitionen folgt sofort:

Satz 3.1.

Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

- (a) Die Menge  $S$  hat die Dimension  $m$  genau dann, wenn sie  $m+1$  affin unabhängige Vektoren enthält.
- (b) Ist  $0 \notin \text{aff}(S)$ , so gilt  $\dim S = m$  genau dann, wenn  $S$   $m+1$  linear unabhängige Vektoren enthält.  $\square$

#### § 4. Polyeder

Für alle weiteren Betrachtungen sei der  $\mathbb{R}^n$  immer mit dem gewöhnlichen inneren Produkt  $\underline{xy} := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  versehen. Mengen des Typs  $H = \{x \mid ax = a_0\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ , sind  $(n-1)$ -dimensionale affine Teilräume von  $\mathbb{R}^n$ , solche Räume wollen wir Hyperebenen nennen. Der Kürze wegen sagen wir häufig "die Hyperebene  $ax = a_0$ ". Mengen des Typs  $\{x \mid ax \leq a_0\}$  nennen wir (abgeschlossene) Halbräume, desgleichen werden wir vom "Halbraum  $ax \leq a_0$ " sprechen.

Durchschnitte von endlich vielen Halbräumen heißen Polyeder. Ein beschränktes Polyeder heißt Polytop. Analytisch lassen sich Polyeder  $P$  wie folgt darstellen:

$$P = \{x \mid Ax \leq b\},$$

wobei  $A$  eine  $(m, n)$ -Matrix und  $b \in \mathbb{R}^m$  ist, wiederum sprechen wir kurz vom Polyeder  $Ax \leq b$ .

Eine Ungleichung  $ax \leq a_0$  heißt gültig bezüglich eines Polyeders  $P$ , wenn  $P \subset \{x \mid ax \leq a_0\}$  ist.

Eine Menge  $F \subset P$  heißt Seitenfläche von  $P$ , wenn  $F = P$  oder  $F = \emptyset$  gilt oder wenn es eine gültige Ungleichung  $ax \leq a_0$  bezüglich  $P$  gibt mit  $F = \{x \mid ax = a_0\} \cap P$ . Jede Seitenfläche eines Polyeders ist natürlich selbst ein Polyeder. Die Seitenflächen, die verschieden von  $\emptyset$  und  $P$  sind, nennen wir echte Seitenflächen. Ist  $ax \leq a_0$  gültig für  $P$  und  $F = \{x \mid ax = a_0\} \cap P$  echte Seitenfläche von  $P$ , so sprechen wir kurz von der Seitenfläche  $ax \leq a_0$ , ungeachtet der Tatsache, daß  $F$

durchaus Darstellungen durch verschiedene Ungleichungen besitzen kann.

Zwei Ungleichungen  $ax \leq a_0$ ,  $bx \leq b_0$ , die dieselbe Seitenfläche  $F$  eines Polyeders  $P$  definieren, d.h.  $F = P \cap \{x \mid ax = a_0\} = P \cap \{x \mid bx = b_0\}$  nennen wir äquivalent bezüglich  $P$ .

Die Menge der Seitenflächen eines Polyeders bildet bezüglich der mengentheoretischen Inklusion einen Verband. Über die Struktur der Verbände von Seitenflächen ist nur wenig bekannt; von einer Charakterisierung solcher Verbände (siehe etwa [Stoer, Witzgall, 1970, S. 73 ff]) scheint man noch weit entfernt zu sein. Eine bessere Kenntnis dieser Verbände könnte durchaus ein Gewinn für die Optimierung sein.

Von zentraler Bedeutung bei der Untersuchung von Polyedern sind die Facetten. Facetten nennt man die maximalen echten Seitenflächen eines Polyeders. Nur die Kenntnis aller Facetten ermöglicht eine vollständige und nicht redundante Beschreibung eines Polyeders durch ein System von Gleichungen und Ungleichungen.

Satz 4.1.

Sei  $P$  ein Polyeder,  $Bx = b$  ein minimales System von Gleichungen mit  $\text{aff}(P) = \{x \mid Bx = b\}$ . Zu jeder Facette  $F$  von  $P$  gebe es genau eine gültige Ungleichung  $a^F x \leq a_0^F$  mit  $F = P \cap \{x \mid a^F x = a_0^F\}$ . Sei  $Ax \leq a$  das System dieser Ungleichungen, dann gilt

$$\dim P = n - \text{Rang}(B),$$

$$P = \{x \mid Bx = b, Ax \leq a\}.$$

Dieses System von Gleichungen und Ungleichungen ist minimal.  $\square$

Satz 4.2.

Ist das Polyeder  $P \subset \mathbb{R}^n$  volldimensional, d.h.  $\dim P = n$ , so existiert ein bis auf Linearfaktoren eindeutig bestimmtes minimales System von Ungleichungen  $Ax \leq a$  mit

$$P = \{x \mid Ax \leq a\}. \quad \square$$

Satz 4.3.

(a)  $F \subset P$  ist eine nichtleere Seitenfläche von  $P$  genau dann, wenn es ein  $c \in \mathbb{R}^n$  gibt mit

$$F = \{x \mid cx = \max\{cy \mid y \in P\}\}.$$

(b) Ist  $F$  echte Seitenfläche von  $P$ , so gilt

$$\dim F \leq \dim P - 1. \quad \square$$

Zum Beweis, daß eine Seitenfläche von  $P$  eine Facette ist, erweist sich folgender Satz als sehr nützlich.

Satz 4.4.

Sei  $F$  echte Seitenfläche von  $P$ . Dann sind äquivalent:

(a)  $F$  ist Facette von  $P$ .

(b)  $\dim F = \dim P - 1$ .

(c)  $F$  enthält  $\dim P$  affin unabhängige Vektoren.

(d) Ist  $\text{aff}(P) = \{x \mid Ax = a\}$  und  $F = P \cap \{x \mid bx = b_0\}$ , dann existieren zu jeder Hyperebene  $cx = c_0$  mit  $F = P \cap \{x \mid cx = c_0\}$  ein Vektor  $\lambda \in \mathbb{R}^{n-\dim P}$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$\lambda A + \pi b = c.$$

(Aus dieser Beziehung folgt:  $\lambda a + \pi b_0 = c_0$ .)

(e) Ist  $P$  volldimensional und  $F = P \cap \{x \mid bx = b_0\}$ , dann gibt es zu jeder Hyperebene  $cx = c_0$  mit  $F = P \cap \{x \mid cx = c_0\}$  ein  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$\pi b = c.$$

(Aus dieser Beziehung folgt:  $\pi b_0 = c_0$ .)  $\square$

Manchmal ist es hilfreich zu wissen, daß bei der Beschreibung eines Polyeders durch Gleichungen und Ungleichungen eine Ungleichung von vornherein weggelassen werden kann, das heißt, daß sie entweder keine Facette von  $P$  definiert oder bereits eine äquivalente Ungleichung bekannt ist. Wir nennen eine solche Ungleichung redundant.

Satz 4.5.

Seien  $ax \leq a_0$ ,  $bx \leq b_0$ ,  $cx \leq c_0$  verschiedene gültige Ungleichungen bezüglich eines Polyeders  $P$ .  $P$  sei in keiner der Hyperebenen  $ax = a_0$ ,  $bx = b_0$  enthalten. Dann ist  $ax \leq a_0$  redundant bezüglich  $P$ , wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a)  $a = b + c$ ,  $a_0 = b_0 + c_0$ ,

(b)  $0 \leq a \leq b$  und  $a_0 \geq b_0$ ,

(c)  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $a \leq b + c$ ,  $a_0 \geq b_0 + c_0$ .  $\square$

Ist  $P$  volldimensional, dann ist  $ax \leq a_0$  im Falle (b) keine Facette, in den Fällen (a) und (c) gilt dies nur, wenn zusätzlich  $b \nmid ac \forall a \in \mathbb{R}$  gefordert wird.

Falls wie in den Fällen (b) und (c) von Satz 4.5 zu einer gültigen Ungleichung  $ax \leq a_0$  eine gültige Ungleichung  $bx \leq b_0$ ,  $a \nmid b$ , existiert mit  $0 \leq a \leq b$ ,  $a_0 \geq b_0$ , dann nennen wir  $ax \leq a_0$  dominiert.

Ein weiterer wichtiger Typ von Seitenflächen eines Polyeders sind die Seitenflächen der Dimension Null, die sogenannten Ecken. Offensichtlich ist jede Ecke einelementig und minimale echte Seitenfläche. Allerdings gilt das nicht umgekehrt, denn nicht jedes Polyeder besitzt Ecken. Betrachten wir hingegen Polytope, d.h. beschränkte Polyeder, so kann man zeigen:

Satz 4.6.

Sei  $P \subset \mathbb{R}^n$  ein nichtleerer Polytop, und  $V$  sei die Menge seiner Ecken. Dann gilt:

- (a)  $V \neq \emptyset$ ,  $|V|$  endlich.
- (b)  $P = \text{conv}(V)$ .
- (c) Für jedes  $c \in \mathbb{R}^n$  existiert ein  $v \in V$  mit  $cv = \max \{cx \mid x \in P\}$ .  $\square$

Eine "Umkehrung" von (a) und (b) hat folgendes Aussehen:

Satz 4.7.

Sei  $H \subset \mathbb{R}^n$  eine endliche Menge von Vektoren, dann gilt:

- (a)  $\text{conv}(H)$  ist ein Polytop.
  - (b) Für die Eckenmenge  $V$  von  $\text{conv}(H)$  gilt  $V \subset H$ .
- Betrachten wir speziell Ecken des Einheitswürfels, so gilt:
- (c) Ist  $x_i \in \{0,1\}$  für  $i = 1, \dots, n$  und jedes  $x \in H$ , dann gilt für die Eckenmenge  $V$  von  $\text{conv}(H)$

$$V = H. \quad \square$$

Polytope sind definitionsgemäß beschränkte Mengen, die Durchschnitte von endlich vielen Halbräumen sind. Satz 4.7 besagt nun andererseits, daß Polytope auch als konvexe Hülle von endlich vielen Vektoren gewonnen werden können. Diese beiden Charakterisierungen von Polytopen führen zu zwei zentralen Problemen der Optimierung.

In der linearen Programmierung ist gewöhnlich ein System von Gleichungen und Ungleichungen gegeben, gesucht wird nach einer Charakterisierung aller Ecken dieses Polyeders (ein solches Problem wird in § 13 behandelt) oder nach einer Ecke, die bezüglich einer Zielfunktion den optimalen Wert annimmt.

In der kombinatorischen Optimierung tritt meistens der umgekehrte Fall auf. Gegeben ist eine (zumindest theoretisch) wohlbekannt Menge  $V$  von Vektoren (häufig 0,1-Vektoren). Gesucht ist ein bezüglich irgendeiner Gewichtung  $c$  der Komponenten optimaler Vektor  $v \in V$ . Um die sehr effektiven Werkzeuge der Dualitätstheorie und linearen Programmierung anwenden zu können, betrachtet man den Polytopen  $\text{conv}(V)$ ; man weiß, daß alle Ecken von  $\text{conv}(V)$  Elemente von  $V$  sind, also wird das lineare Programm  $\max\{cx \mid x \in \text{conv}(V)\}$  das gewünschte Ergebnis liefern. Was fehlt ist "nur" eine (möglichst nicht redundante) Beschreibung von  $\text{conv}(V)$  durch lineare Gleichungen und Ungleichungen.

Ziel dieser Arbeit ist eine möglichst gute Beschreibung von Polytopen, die in natürlicher Beziehung zum symmetrischen und zum asymmetrischen Travelling Salesman Problem stehen. Für verschiedene mit dem Travelling Salesman Problem verwandte Probleme wird eine vollständige und nicht redundante lineare Charakteri-

sierung gefunden. Eine solche ist für die Travelling Salesman Polytope selbst nicht gelungen. Einige Ergebnisse (siehe etwa § 25) deuten darauf hin, daß eine konkrete Angabe aller Facetten der Travelling Salesman Polytope wohl kaum möglich sein wird. Trotzdem scheint die gefundene lineare Beschreibung bereits "recht gut" zu sein, da wir unter Zuhilfenahme der gefundenen Facetten vermittels linearer Programmierung ein symmetrisches Travelling Salesman Problem auf 120 Städten lösen konnten, was mit den bekannten Branch-and-Bound Verfahren zur Zeit kaum möglich sein dürfte.

### *Kapitel 3. Boolesche Algebra*

Einige Methoden und Begriffe der Booleschen Algebra haben sich bei in letzter Zeit erfolgten Untersuchungen als nützliche Hilfsmittel zur Beschreibung kombinatorischer Probleme in Polyederform erwiesen. Die hier aufgeführten Begriffe und ihre Eigenschaften werden in [Hammer, Rudeanu, 1968] und [Mendelson, 1970] eingehender behandelt; wir listen nur die für uns interessanten Aspekte auf. Tiefergehende Untersuchungen über die Beziehungen zwischen Boolescher Algebra und Polyedertheorie finden sich in [Hammer, Johnson, Peled, 1974], [Hammer, Johnson, Peled, 1975], [Peled, 1975b].

#### *§ 5. Die grundlegenden Begriffe*

Sei  $\mathbb{B} = \{0,1\}$ , dann ist eine Boolesche Funktion eine Abbildung  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ , wobei  $\mathbb{B}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{B}, i = 1, \dots, n\}$  ist. Für Boolesche Variable  $x, y$ , d.h. Variable  $x, y \in \mathbb{B}$ , definieren wir zwei zweistellige Operationen das Produkt  $xy := \min\{x, y\}$  und die Vereinigung  $x \vee y := \max\{x, y\}$ , desweiteren eine einstellige Operation die Negation  $\bar{x} := 1 - x$ .

Einen Booleschen Ausdruck in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  definieren wir rekursiv:

- (1)  $0, 1, x_1, \dots, x_n$  sind Boolesche Ausdrücke.
- (2) Sind A und B Boolesche Ausdrücke, dann auch  $AB, A \vee B, \bar{A}$ .
- (3) Es gibt keine weiteren Booleschen Ausdrücke außer denen, die durch (1) und (2) gebildet werden können.

Jeder Boolesche Ausdruck B repräsentiert offensichtlich eine Boolesche Funktion f, wir sagen dann f hat den Ausdruck B.

Ausdrücke der Form  $x_i$  oder  $\bar{x}_i$  heißen Literale, Produkte von Literalen Konjunktionen. Wegen  $x_i x_i = x_i$  können wir annehmen, daß ein Literal in einer Konjunktion höchstens einmal vorkommt.

Eine Konjunktion A enthält eine Konjunktion B, wenn jedes Literal von B auch in A enthalten ist. Eine Vereinigung von Konjunktionen heißt Disjunktion oder

disjunktive Form, die Konjunktionen sind ihre Terme. Man kann zeigen, daß jede Boolesche Funktion einen Ausdruck in einer disjunktiven Form besitzt.

Gilt für zwei Boolesche Funktionen  $f$  und  $g$ :  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{B}^n$ , so sagen wir:  $f$  impliziert  $g$  bzw.  $f$  ist ein Implikant von  $g$ , beispielsweise ist die Konjunktion  $A$  ein Implikant der Konjunktion  $B$ , wenn  $B$  in  $A$  enthalten ist. Eine Konjunktion  $P$  heißt Primimplikant einer Booleschen Funktion  $f$ , wenn  $P$  ein Implikant von  $f$  ist und keine Konjunktion, die  $f$  impliziert, echt in  $P$  enthalten ist. Ohne Schwierigkeiten läßt sich einsehen, daß jede Boolesche Funktion durch die Vereinigung aller ihrer Primimplikanten ausgedrückt werden kann. Auf diese Weise läßt sich unter den vielen verschiedenen Ausdrücken einer Booleschen Funktion eine bis auf Vertauschungen eindeutig bestimmte Normalform festlegen.

Ein (beschreibungsmäßig) einfaches Verfahren zur Ermittlung aller Primimplikanten ist die Consensus-Methode. Sie arbeitet wie folgt:

Schritt 1: (Absorption)

Gibt es in der gegenwärtigen disjunktiven Form von  $f$  einen Term  $P$ , der in einem Term  $Q$  enthalten ist, so entferne  $P$ .

Schritt 2: (Consensus)

Gibt es in der gegenwärtigen disjunktiven Form von  $f$  zwei Terme  $P$  und  $Q$ , so daß genau ein Literal  $x_i$  negiert in einem der Terme  $P$ ,  $Q$ , unnegiert in dem anderen Term vorkommt, d.h.  $P = x_i P'$ ,  $Q = \bar{x}_i Q'$ , dann füge die Konjunktion  $P'Q'$  hinzu. Entferne die mehrfach vorkommenden Literale aus  $P'Q'$ .

Man kann zeigen (siehe [Mendelson, 1970, S. 94]), daß nach endlich vielen Wiederholungen der Schritte 1 und 2 alle Primimplikanten von  $f$  gefunden werden, jedoch arbeitet dieses Verfahren äußerst ineffektiv.

Eine Boolesche Funktion heißt monoton steigend in der Variablen  $x_i$ , wenn für alle  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{B}$  gilt:  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$ . Boolesche Funktionen  $f$ , die in allen Variablen monoton steigend sind, nennen wir kurz monoton.  $f$  ist also monoton genau dann, wenn aus  $y \leq x$  und  $f(x) = 0$  folgt:  $f(y) = 0$ . Darüberhinaus ist unmittelbar klar, daß kein Primimplikant einer monotonen Funktion  $f$  ein Literal der Form  $\bar{x}_i$  enthalten kann.

Eine disjunktive Form einer Booleschen Funktion  $f$  heißt irredundant, wenn jeder ihrer Terme ein Primimplikant von  $f$  ist und die disjunktive Form, die durch Weglassen irgend eines Terms entsteht, nicht mehr  $f$  repräsentiert. Im allgemeinen haben Boolesche Funktionen viele irredundante disjunktive Formen, jedoch haben monotone Funktionen eine eindeutig bestimmte, nämlich die Vereinigung aller ihrer Primimplikanten.

§ 6. Beziehungen zur Polyedertheorie

Ist  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$  eine Boolesche Funktion, so kann man die Menge der Lösungen der Gleichung  $f(x) = 0$  als Teilmenge der Ecken des  $n$ -dimensionalen Einheitswürfels auffassen, andererseits kann man jeder Teilmenge  $S$  der Ecken des  $n$ -dimensionalen Einheitswürfels eine Boolesche Funktion  $\rho_S: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$  zuordnen mit  $\rho_S(x) = 0 \iff x \in S$ . Jede Funktion  $\rho_S$  mit dieser Eigenschaft heißt Resolvente von  $S$ . Wählt man als Darstellung von  $\rho_S$ , was wir im weiteren immer annehmen wollen, die Vereinigung der Menge aller ihrer Primimplikanten, so ergibt sich eine eindeutige Zuordnung zwischen Teilmengen  $S$  des Einheitswürfels und gewissen Booleschen Funktionen.

In der Optimierungstheorie ist nun häufig die Situation gegeben, daß eine Teilmenge  $S$  des Einheitswürfels bekannt ist und daß sich  $\rho_S$  relativ einfach ausrechnen läßt. Um das Problem  $\max\{cx \mid x \in S\}$  lösen zu können, versucht man LP-Verfahren bezüglich des Polytops  $P_S = \text{conv}(S)$  anzuwenden. Damit dies möglich ist, muß eine möglichst vollständige Beschreibung von  $P_S$  durch Gleichungen und Ungleichungen bekannt sein. Eine der interessanten Fragen, die in letzter Zeit intensiv untersucht wurden, siehe etwa [Hammer,Johnson,Peled,1975], [Wolsey,1975], [Balas,1975], [Peled,1975b], ist das Problem, welche Beziehungen zwischen  $\rho_S$ , insbesondere den Primimplikanten von  $\rho_S$ , und dem Polytopen  $P_S$ , speziell den Facetten von  $P_S$ , bestehen.

Einige der Ergebnisse, die später benötigt werden, sollen hier kurz aufgelistet werden. Dabei soll  $\mathbb{B}^n$  mit der Eckenmenge des Einheitswürfels identifiziert werden. Zur Verkürzung der Sprechweise nennen wir die Menge  $S \subset \mathbb{B}^n$  monoton, wenn  $\rho_S$  monoton ist, desgleichen nennen wir  $P_S = \text{conv}(S)$  einen monotonen Polytopen, wenn  $\rho_S$  monoton ist. Nach Definition hat ein monotoner Polytop  $P$  die Eigenschaft

$$x \in P, y \in \mathbb{B}^n \text{ und } y \leq x \implies y \in P.$$

Satz 6.1.

Sei  $\emptyset \neq S \subset \mathbb{B}^n$  eine monotone Menge, und sei  $k$  die Anzahl der Primimplikanten der Länge 1 von  $\rho_S$ . Dann gilt

$$\dim P_S = n - k. \quad \square$$

Da ein Primimplikant der Länge 1 von  $\rho_S$  bewirkt, daß die zugehörige Variable in jeder Lösung von  $\rho_S(x) = 0$  den Wert 0 annimmt, können wir diese Variable von vornherein weglassen, d.h. wir nehmen im weiteren an, daß  $P_S$  volldimensional ist.

Die Frage, welche Facetten des Einheitswürfels auch Facetten von  $P_S$  sind, läßt sich leicht beantworten:

Satz 6.2.

Sei  $S \subset \mathbb{B}^n$  monoton und  $P_S$  volldimensional, dann gilt:

- (a)  $-x_i \leq 0$  ist Facette von  $P_S$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .
- (b)  $x_i \leq 1$  ist Facette von  $P_S$  genau dann, wenn  $x_i$  in keinem Primimplikanten der Länge 2 enthalten ist.  $\square$

Die Facetten des Einheitswürfels wollen wir triviale Facetten nennen.

Satz 6.3. [Hammer, Peled, Johnson, 1975]

Sei  $S \subset \mathbb{B}^n$  monoton und  $P_S$  volldimensional, dann gilt:

- (a) Außer den trivialen Facetten  $-x_i \leq 0$  hat  $P_S$  keine Facetten mit rechter Seite 0.
- (b) Alle nichttrivialen Facetten von  $P_S$  der Form  $ax \leq a_0$  haben positive rechte Seite und keine negativen Koeffizienten.  $\square$

Für niederdimensionale Seitenflächen gilt Satz 6.3 nicht.

Betrachten wir z.B. den Polytopen  $P_S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \geq 0, x_i \leq 1, i = 1, 2, 3, x_1 + x_2 \leq 1\}$ , wobei  $S = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$  gilt. Die Seitenfläche  $F$ , die von den Ecken  $(1,0,0), (0,1,0)$  aufgespannt wird, kann nur durch die gültige Ungleichung  $(1-\alpha)x_1 + (1-\alpha)x_2 - \alpha x_3 \leq 1-\alpha$  repräsentiert werden, wobei sie für  $\alpha < 0$  und  $\alpha > 1$  ungültig wird und für  $\alpha = 0, \alpha = 1$  die Facetten  $-x_3 \leq 0$  bzw.  $x_1 + x_2 \leq 1$  angibt. Es gibt also keine gültige Ungleichung  $ax \leq a_0$  mit positiven Koeffizienten und  $F = \{x \mid ax = a_0\} \cap P_S$ .

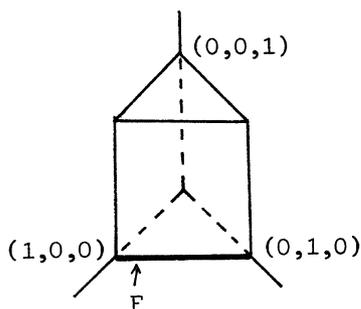


Fig. 6.1.

Sei  $S \subset \mathbb{B}^n$  monoton und  $I \subset N = \{1, \dots, n\}$ , so definieren wir

$$P_S(I) := P_S \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \quad \forall i \in I\}.$$

$P_S(I)$  können wir als Polytop im Vektorraum  $\mathbb{R}^{n-|I|}$  auffassen, wobei die zu  $I$  gehörigen Komponenten der Vektoren aus  $P_S$  entfernt worden sind.

Offensichtlich ist eine Ungleichung  $\sum_{i \in I} a_i x_i \leq a_0$  genau dann gültig für  $P_S(I)$ , wenn sie für  $P_S$  gültig ist.

Interessant ist nun die Tatsache, daß es Verfahren gibt, mit denen man aus Facetten von  $P_S(I)$  Facetten von  $P_S$  berechnen kann. Siehe dazu [Padberg,1973], [Padberg,1975], [Hammer,Johnson,Peled,1975], [Wolsey,1975], [Balas,1975], [Peled,1975a], [Peled,1975b], [Zemel,1974], [Balas,Zemel,1975].

Das folgende Verfahren heißt sequentielle Liftung und geht auf M.W. Padberg zurück. Dabei sei  $e_i \in \mathbb{R}^n$  der  $i$ -te Einheitsvektor und  $x^I \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor mit  $x_i^I = 0 \quad \forall i \in I$ .

Satz 6.4. [Padberg,1973/1975]

Sei  $S \subset \mathbb{B}^n$  monoton und  $P_S$  volldimensional. Sei  $I \subset N = \{1, \dots, n\}$  und  $i \in I$ .

Sei  $\sum_{k \in I} a_k x_k^I \leq a_0$  eine Facette von  $P_S(I)$  mit  $a_0 > 0$ . Sei

$$a_i := a_0 - \max_{k \in I} \{ \sum_{k \in I} a_k x_k^I \mid e_i + x^I \in S \}.$$

Dann ist  $a_i x_i + \sum_{k \in I} a_k x_k^I \leq a_0$  eine Facette von  $P_S(I - \{i\})$ .  $\square$

Der so berechnete Koeffizient  $a_i$  von  $x_i$  heißt Liftungskoeffizient von  $x_i$ .

Indem wir die obige Berechnung mehrfach wiederholen, können wir Facetten von niederdimensionalen Polytopen  $P_S(I)$  (sogenannte lokale Facetten) zu Facetten des eigentlich interessierenden Polytopen  $P_S$  (globale Facetten) erweitern. Da man die sequentielle Liftung in beliebiger Reihenfolge der  $i \in I$  durchführen kann, wird man im allgemeinen ausgehend von einer Facette von  $P_S(I)$  viele verschiedene Facetten von  $P_S$  erhalten können. Von besonderem Interesse ist dabei, daß das in Satz 6.4 angegebene ganzzahlige (i.a. komplizierte) Programm in vielen konkreten Fällen durch recht einfache Überlegungen zu lösen und daher von erheblicher beweistechnischer Hilfe ist, was wir natürlich im weiteren ausnutzen werden.

Verallgemeinerungen dieser Methode bieten sich an. Man kann versuchen, in einem Schritt nicht nur einen Liftungskoeffizienten zu berechnen, sondern mehrere gleichzeitig, ein solches Vorgehen nennt man parallele Liftung. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Komponenten in  $I$  nicht Null sondern Eins zu setzen und dann eine geeignete Prozedur zu definieren. Schließlich kann man noch alle diese Methoden mischen und erhält so eine Fülle von Liftungsmöglichkeiten. Da wir diese Verfahren im weiteren nicht verwenden werden und eine exakte Beschreibung in wenigen Zeilen nicht möglich ist, sei auf [Peled,1975a], [Peled,1975b], [Zemel,1974] verwiesen.

Kürzlich haben Balas und Zemel [1975] gezeigt, daß sich (zumindest theoretisch) alle Facetten eines monotonen volldimensionalen Polytopen durch eine verallgemeinerte Liftungsprozedur aus lokalen Facetten gewinnen lassen, d.h. daß Liftungsprozeduren, die allerdings gewöhnlich sehr schwierig durchzuführen sind, zu einer vollständigen Beschreibung von monotonen Polytopen führen können.

Von besonderem Interesse ist nun die Tatsache, daß sich gewisse lokale Facetten ad hoc angeben lassen, nämlich über die Primimplikanten der Resolventenfunktion  $\rho_S$  von  $S$ .

Satz 6.5. [Hammer, Johnson, Peled, 1975]

Sei  $P_S \subset \mathbb{R}^n$  ein volldimensionaler monotoner Polytop und  $A = \prod_{i \in I} x_i$  ein Primimplikant von  $\rho_S$ . Dann ist die Primimplikanten-Ungleichung

$$\sum_{i \in I} x_i \leq |I| - 1$$

eine Facette von  $P_S(N-I)$ .  $\square$

Satz 6.5 bildet zusammen mit Satz 6.4 eine Grundlage zur linearen Beschreibung monotoner volldimensionaler Polytope  $P_S$ . Primimplikanten lassen sich häufig recht einfach angeben, und ebenso ist es meistens nicht allzu schwierig, die lokalen Primimplikanten-Facetten vermöge des sequentiellen Liftungsverfahrens zu Facetten von  $P_S$  zu liften.

Die vorhergehenden Sätze behandeln nur den Fall monotoner Polytope  $P_S$ ; daß dies jedoch der wichtigste Fall ist und daß in gewissem Sinne damit alle Probleme behandelt werden, sieht man wie folgt:

Sei  $S \subset \mathbb{B}^n$ , dann definieren wir

$$\tilde{S} := \{x \in \mathbb{B}^n \mid \exists y \in S \text{ mit } x \leq y\}.$$

Offensichtlich ist die Menge  $\tilde{S}$  monoton; wir nennen  $\tilde{S}$  die Monotonisierung von  $S$ . Zwischen  $S$  und  $\tilde{S}$ ,  $P_S$  und  $P_{\tilde{S}}$  bestehen folgende Beziehungen.

Satz 6.6.

- (a)  $P_{\tilde{S}}$  ist eine Seitenfläche von  $P_{\tilde{S}}$ .
- (b) Die Resolvente  $\rho_{\tilde{S}}$  von  $\tilde{S}$  erhält man aus  $\rho_S$ , indem man alle Konjunktionen, die ein negiertes Literal enthalten, wegläßt.
- (c) Ist  $c \in \mathbb{R}^n$  und  $c_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dann sind äquivalent:
  - (1)  $x_0$  ist Ecke von  $P_S$  und optimal für  $\max\{cx \mid x \in P_S\}$ .
  - (2)  $x_0$  ist optimal für  $\max\{cx \mid x \in S\}$ .
  - (3)  $x_0$  ist optimal für  $\max\{cx \mid x \in \tilde{S}\}$ .
  - (4)  $x_0$  ist Ecke von  $P_{\tilde{S}}$  und optimal für  $\max\{cx \mid x \in P_{\tilde{S}}\}$ .

- (d) Sei  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha := 1 + \max\{c_i \mid i = 1, \dots, n\}$ , und sei  $c'_i := \alpha - c_i$ ,  $c' := (c'_1, \dots, c'_n)$ , dann sind äquivalent:
- (1)  $x_0$  ist Ecke von  $P_S$  und optimal für  $\min\{cx \mid x \in P_S\}$ .
  - (2)  $x_0$  ist optimal für  $\min\{cx \mid x \in S\}$ .
  - (3)  $x_0$  ist optimal für  $\max\{c'x \mid x \in \tilde{S}\}$ .
  - (4)  $x_0$  ist Ecke von  $P_{\tilde{S}}$  und optimal für  $\max\{c'x \mid x \in P_{\tilde{S}}\}$ .  $\square$

Kennen wir eine vollständige lineare Darstellung von  $P_{\tilde{S}}$ , so folgt aus Satz 6.6 (a), daß wir dann auch eine solche von  $P_S$  kennen ; allerdings ist eine nicht-redundante Beschreibung von  $P_{\tilde{S}}$  im allgemeinen keineswegs nicht-redundant bezüglich  $P_S$ , wie wir später in mehreren Beispielen sehen werden. Häufig sind viele der Facetten von  $P_{\tilde{S}}$  äquivalent bezüglich  $P_S$  oder gar nur niederdimensionale Seitenflächen von  $P_S$ , was zu einer wesentlichen Verkleinerung des Restriktionensystems führen kann. Leider gibt uns jedoch keine der im vorhergehenden beschriebenen Methoden ein Verfahren an die Hand, Facetten von  $P_S$  zu bestimmen. Für niederdimensionale bzw. nicht-monotone Polytope bleibt uns also nichts anderes übrig, als durch Inspektion des speziellen Problems "maßgeschneiderte" Liftungs- oder Facettenerkennungs-Verfahren zu entwickeln, was im weiteren für die in dieser Arbeit behandelten Probleme geschehen wird.

Die Fälle (c) und (d) von Satz 6.6 schließlich verknüpfen die Optimierungsprobleme über  $S$  und  $\tilde{S}$  algorithmisch und besagen, daß es bei geeigneter Zielfunktion an sich gleichgültig ist, ob man ein Optimum über  $S$ ,  $\tilde{S}$ ,  $P_S$  oder  $P_{\tilde{S}}$  sucht, da in allen Fällen dasselbe für alle Probleme zulässige optimale Ergebnis geliefert wird.

#### Kapitel 4. Matroidtheorie

Die Matroide sind ein (leider nicht allzu häufiges) Beispiel dafür, daß recht esoterische mathematische Strukturen nach längerer Zeit "reiner" Entwicklung durchaus ungeahnten und erfolgreichen Eingang in die "Niederungen" der Anwendung finden können. Der Ursprung der Matroidtheorie liegt in einem Aufsatz von Whitney [1935], welcher versuchte, einige Eigenschaften, die eine Menge linear unabhängiger Vektoren hat, kombinatorisch zu beschreiben, und dazu das Gebilde "Matroid" erfand.

Durch Arbeiten von J. Edmonds (z.B. [Edmonds,1970/1971]) und anderen sind interessante Beziehungen zwischen der Matroidtheorie und vielen Problemen der ganzzahligen Programmierung aufgedeckt worden, was zur Entwicklung "guter" (im Sinne der Komplexitätstheorie) Algorithmen für einige dieser Probleme (siehe z.B. [Lawler,1976]) oder zumindest guter suboptimaler Verfahren (Heuristiken) für

andere dieser Probleme (siehe z.B. [Korte, Hausmann, 1976]) geführt hat.

Das Buch von R. v. Randow [1975] gibt eine umfassende Einführung in die Theorie der Matroide, während in dem Buch von Lawler [1976] zahlreiche Anwendungen und die algorithmischen Aspekte dargestellt sind. In der Dissertation von R. Giles [1975] werden einigen Techniken der Matroidtheorie neue Gebiete erschlossen und viele der Ergebnisse von Edmonds in bezug auf Matroid Polyeder abgerundet.

Alle in dieser kurzen Zusammenfassung zitierten Begriffe und Ergebnisse sind, falls keine andere Literaturangabe gemacht wird, dem Buch von R. v. Randow [1975] entnommen.

### § 7. Unabhängigkeitssysteme und Matroide

Sei  $E$  eine endliche Menge und  $\mathcal{A}$  eine nicht-leere Teilmenge der Potenzmenge  $\mathcal{P}(E)$  von  $E$ .  $M = (E, \mathcal{A})$  heißt Unabhängigkeitssystem, wenn gilt

$$I \subset J \in \mathcal{A} \Rightarrow J \in \mathcal{A}.$$

Die Elemente von  $\mathcal{A}$  heißen unabhängig und die Elemente von  $\mathcal{P}(E) - \mathcal{A}$  abhängig. Beispiele von Unabhängigkeitssystemen sind die monotonen Eckenmengen des Einheitswürfels. Unabhängigkeitssysteme, in denen alle einelementigen Teilmengen von  $E$  unabhängig sind, heißen normal.

Für jede Menge  $S \subset E$  heißen die maximalen unabhängigen Mengen  $B \subset S$  Basen von  $S$ , die Basen von  $E$  nennen wir kurz Basen. Die minimalen abhängigen Teilmengen  $Z \subset E$  heißen Zirkuits. In der Sprache der monotonen Mengen entsprechen die Zirkuits gerade den Primimplikanten.

Für jedes  $S \subset E$  ist eine Rangfunktion  $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$  definiert durch

$$r(S) := \max\{|B| \mid B \text{ Basis von } S\}.$$

Die Rangfunktion  $r$  ist nichtfallend, d.h.

$$R \subset S \subset E \Rightarrow r(R) \leq r(S)$$

und subadditiv

$$R, S \subset E \Rightarrow r(R \cup S) \leq r(R) + r(S).$$

Eine Teilmenge  $S \subset E$  heißt abgeschlossen, wenn gilt

$$r(S \cup \{e\}) > r(S) \quad \forall e \in E - S.$$

Der Abschluß einer Menge  $S \subset E$  ist die Menge

$$\text{cl}(S) := \{e \in E \mid r(S) = r(S \cup \{e\})\}.$$

Für jede Basis  $B$  einer Menge  $S \subset E$  gilt damit  $\text{cl}(B) = S$ .

Eine Teilmenge  $S \subset E$  heißt separabel, falls es eine Partition  $S_1, S_2$  von  $S$  gibt (d.h.  $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$ ,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ,  $S_1 \cup S_2 = S$ ) mit  $r(S) = r(S_1) + r(S_2)$ , andernfalls heißt  $S$  inseparabel; ist  $E$  inseparabel, so heißt  $M = (E, \mathcal{A})$  inseparabel.

Eine Teilmenge  $S \subset E$  heißt trennend, wenn für alle Zirkuits  $Z$  in  $E$  gilt: entweder  $Z \subset S$  oder  $Z \subset E - S$ . Sind die einzigen trennenden Mengen von  $(E, \mathcal{A})$  die leere Menge und  $E$ , so nennen wir  $(E, \mathcal{A})$  zusammenhängend.

Ein Unabhängigkeitssystem  $M = (E, \mathcal{A})$  heißt ein Matroid, wenn für alle  $S \subset E$  und alle Basen  $B_1, B_2$  von  $S$  gilt:  $|B_1| = |B_2|$ .

Satz 7.1.

Sei  $M = (E, \mathcal{A})$  ein Matroid, dann gilt

(1) Die Rangfunktion  $r$  ist submodular, d.h.

$$r(S \cup T) + r(S \cap T) \leq r(S) + r(T) \quad \text{für alle } S, T \subset E.$$

(1') Sei  $I \subset F \subset E$  und  $I \in \mathcal{A}$ , dann gibt es ein  $I' \in \mathcal{A}$ , so daß  $I \cup I'$  Basis von  $F$  ist.

(2) Für alle Basen  $B, B'$  von  $F \subset E$  gilt:

Für alle  $e \in B$  existiert  $e' \in B'$ , so daß  $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$  Basis von  $F$  ist.

(3) Für alle Basen  $B, B'$  von  $F \subset E$  gilt:

Für alle  $S \subset B$  existiert  $S' \subset B'$ , so daß  $(B - S) \cup S'$  und  $(B' - S') \cup S$  Basen von  $F$  sind.

(4)  $S \subset E$  ist Zirkuit  $\iff r(S - \{e\}) = r(S) = |S| - 1$  für alle  $e \in S$ .

(5) Sind  $Z$  und  $Z'$  Zirkuits und  $e, e' \in E$ , dann gilt:

$(e \in Z \cap Z' \text{ und } e' \in Z - Z') \implies$  Es gibt einen Zirkuit  $Z''$  mit  $e' \in Z'' \subset (Z \cup Z') - \{e\}$ .

(6) Ist  $S \subset E$  und  $e \in E - S$ , dann gilt:

$e \in cl(S) \iff$  Es gibt einen Zirkuit  $Z$  mit  $e \in Z \subset S \cup \{e\}$ .

$$\iff r(S) = r(S \cup \{e\}). \quad \square$$

Ist  $M = (E, \mathcal{A})$  ein Matroid und  $F \subset E$ , so ist  $M_F = (F, \mathcal{A}_F)$  mit  $\mathcal{A}_F := \{I \subset F \mid I \in \mathcal{A}\}$  ein Matroid, das durch  $M$  auf  $F$  induzierte Matroid oder Reduktionsmatroid.

Die Konzepte des Zusammenhangs und der Inseparabilität sind bezüglich Matroiden äquivalent; der Beweis dieses Resultats basiert auf [Whitney, 1935].

Satz 7.2.

Sei  $M = (E, \mathcal{A})$  ein Matroid, dann sind äquivalent:

(a)  $M$  ist zusammenhängend.

(b)  $M$  ist inseparabel.

(c) Je zwei Elemente von  $E$  liegen auf einem gemeinsamen Zirkuit.

Beweis:

Teil 1.

(a)  $\implies$  (b):

M ist zusammenhängend heißt, daß für alle Partitionen  $E_1, E_2$  von E ein Zirkuit Z existiert mit  $Z \cap E_1 \neq \emptyset, Z \cap E_2 \neq \emptyset$ , daraus folgt für  $i = 1, 2$  nach Satz 7.1

(1) und (4)

$$r(E_i) + |Z| - 1 = r(E_i) + r(Z) \geq r(E_i \cup Z) + r(E_i \cap Z) = r(E_i \cup Z) + |E_i \cap Z|$$

und somit

$$r(E_1) + r(E_2) + 2|Z| - 2 \geq r(E_1 \cup Z) + r(E_2 \cup Z) + |Z| \geq r(E) + |Z| - 1 + |Z|,$$

daraus folgt

$r(E_1) + r(E_2) \geq r(E) + 1 > r(E)$  für alle Partitionen  $E_1, E_2$  von E, d.h. M ist inseparabel.

(b)  $\implies$  (a):

Sei  $E_1, E_2$  eine Partition von E. Angenommen, es gibt keinen Zirkuit Z mit  $E_1 \cap Z \neq \emptyset$  und  $E_2 \cap Z \neq \emptyset$ . Sei  $E_2 = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ , dann gilt für  $i = 1, \dots, s$  (wobei  $\{e_0\} := \emptyset$  gelten soll):

$$r(E_1 \cup \{e_1, \dots, e_i\}) = r(E_1 \cup \{e_1, \dots, e_{i-1}\}) \iff$$

$$e_i \in \text{cl}(E_1 \cup \{e_1, \dots, e_{i-1}\}) \iff$$

$$\text{Es gibt einen Zirkuit Z mit } e_i \in Z \subset E_1 \cup \{e_1, \dots, e_{i-1}\} \cup \{e_i\} \iff$$

$$\text{Es gibt einen Zirkuit Z mit } e_i \in Z \subset \{e_1, \dots, e_i\} \text{ (nach Annahme)} \iff$$

$$e_i \in \text{cl}(\{e_1, \dots, e_{i-1}\}) \iff$$

$$r(\{e_1, \dots, e_i\}) = r(\{e_1, \dots, e_{i-1}\})$$

und damit

$$0 = \sum_{i=1}^s (r(E_1 \cup \{e_1, \dots, e_i\}) - r(E_1 \cup \{e_1, \dots, e_{i-1}\}))$$

$$= \sum_{i=1}^s (r(\{e_1, \dots, e_i\}) - r(\{e_1, \dots, e_{i-1}\})).$$

Das bedeutet:

$$0 = r(E) - r(E_1) - r(E_2) + 0.$$

Daraus folgt, daß M separabel ist. Widerspruch!

Teil 2.

(c)  $\implies$  (b):

Da (c)  $\implies$  (a) trivialerweise richtig ist, ergibt sich (c)  $\implies$  (b) aus Teil 1.

(b)  $\implies$  (c):

Sei  $e \in E$  beliebig, und sei

$$F := \{f \in E \mid \exists \text{ Zirkuit } Z \text{ mit } e, f \in Z\} \cup \{e\}.$$

Wenn wir zeigen können, daß  $F = E$  gilt, sind wir fertig.

Angenommen  $F \not\subseteq E$ . Nach Voraussetzung ist  $E$  inseparabel, also gibt es nach Teil 1 einen Zirkuit  $Z_0$  mit  $F \cap Z_0 \neq \emptyset$ ,  $Z_0 - F \neq \emptyset$ . Nach Definition von  $F$  gilt  $e \notin Z_0$ . Sei  $e_0 \in Z_0 - F$  beliebig, und sei

$$\mathcal{K} := \{K \subset E \mid K \text{ ist Vereinigung zweier Zirkuits } Z', Z'' \text{ mit } e \in Z', e_0 \in Z'' \text{ und } Z' \cap Z'' \neq \emptyset\}.$$

$\mathcal{K}$  ist nicht leer, denn es existiert  $g \in Z_0 \cap F \neq \emptyset$ , und nach Definition von  $F$  gibt es einen Zirkuit  $Z'$  mit  $e, g \in Z'$ . Folglich ist  $Z' \cup Z_0 \in \mathcal{K}$ . Sei  $K$  ein Element von  $\mathcal{K}$  mit kleinster Kardinalität.

Sei o.B.d.A.  $K = Z_1 \cup Z_2$ , und sei  $e \in Z_1$ ,  $e_0 \in Z_2$ , desweiteren sei  $d \in Z_1 \cap Z_2$ . Natürlich sind  $Z_1$  und  $Z_2$  voneinander verschieden, da nach Annahme  $e \notin Z_2$  und  $e_0 \notin Z_1$ . Nach Satz 7.1 (5) gibt es Zirkuits  $Z_3$  bzw.  $Z_4$  mit der Eigenschaft  $e \in Z_3 \subset (Z_1 \cup Z_2 - \{d\})$  bzw.  $e_0 \in Z_4 \subset (Z_1 \cup Z_2 - \{d\})$ .  $K' := Z_3 \cup Z_4$  hat die Eigenschaften  $e \in Z_3$ ,  $e_0 \in Z_4$ . Wäre  $Z_3 \cap Z_4 \neq \emptyset$ , so wäre  $K' \in \mathcal{K}$ ; wegen  $|K'| < |K|$  ergäbe das aber einen Widerspruch zur Minimalität von  $K$ , also  $Z_3 \cap Z_4 = \emptyset$ .

Nun ist aber nach Satz 7.1 (4)  $Z_1 - \{d\}$  unabhängig, also kein Zirkuit, folglich gilt  $Z_3 \not\subset Z_1$ , d.h. es existiert ein  $e_3 \in Z_3 - Z_1 \subset Z_2$ . Analog gilt  $Z_4 \not\subset Z_2$ , also existiert  $e_4 \in Z_4 - Z_2 \subset Z_1$ . Wir wissen damit

$$e \in Z_1, e_0 \in Z_4, e_4 \in Z_1 \cap Z_4 \neq \emptyset,$$

das heißt  $K'' := Z_1 \cup Z_4 \in \mathcal{K}$ . Weiter gilt wegen  $e_3 \notin Z_1 \cup Z_4$

$$K'' = Z_1 \cup Z_4 \subset (Z_1 \cup Z_2 - \{e_3\}) = K - \{e_3\}.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von  $K \in \mathcal{K}$ .  $\square$

Nennen wir eine Teilmenge  $F \subset E$  zusammenhängend, wenn der Reduktionsmatroid  $M_F$  zusammenhängend ist, dann ergibt Satz 7.2 unmittelbar

### Folgerung 7.3.

Sei  $M = (E, \mathcal{A})$  ein normales Matroid und  $F \subset E$ , dann sind äquivalent

(a)  $F$  ist zusammenhängend.

(b)  $F$  ist inseparabel.

(c) Je zwei Elemente von  $F$  liegen auf einem gemeinsamen Zirkuit  $Z \subset F$ .  $\square$

Eine inseparable Teilmenge  $F \subset E$  heißt maximal inseparabel, wenn  $F$  inseparabel ist und keine echte Obermenge von  $F$  inseparabel ist. Eine trennende Teilmenge  $F \subset E$  heißt minimal trennend, wenn sie nicht leer ist und die einzige echte Teilmenge von  $F$ , die trennend ist, die leere Menge ist. Mit diesen Begriffsbildungen können wir zeigen

### Satz 7.4.

Sei  $M = (E, \mathcal{A})$  ein normales Matroid und  $\emptyset \neq F \subset E$ . Dann gilt:

$F$  ist maximal inseparabel  $\Leftrightarrow F$  ist minimal trennend.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Sei  $F$  maximal inseparabel.

a) Wir zeigen zunächst, daß  $F$  trennend ist. Angenommen,  $F$  ist nicht trennend, dann gibt es nach Definition einen Zirkuit  $Z$  in  $M$  mit  $Z \cap F \neq \emptyset$ ,  $Z - F \neq \emptyset$ . Wir wollen zeigen, daß  $F \cup Z$  inseparabel ist, womit ein Widerspruch zur Maximalität von  $F$  gefunden wäre. Dazu zeigen wir, daß  $F \cup Z$  keine trennende Menge enthält, also zusammenhängend und somit nach Folgerung 7.3 inseparabel ist.

Sei also  $T \subsetneq F \cup Z$ ,  $T \neq \emptyset$  beliebig; es ist zu zeigen, daß  $T$  nicht trennend ist, das heißt, daß es einen Zirkuit  $C \subset F \cup Z$  gibt mit  $C \cap T \neq \emptyset$ ,  $C - T \neq \emptyset$ .

$a_1$ ) Sei  $T \cap F \neq \emptyset$  und  $F - T \neq \emptyset$ . Nach Voraussetzung (Inseparabilität von  $F$ ) und Folgerung 7.3 gibt es zu  $e \in T \cap F$  und  $f \in F - T$  einen Zirkuit, der  $e$  und  $f$  enthält, folglich kann  $T$  nicht trennend sein.

$a_2$ ) Sei  $T \subset Z - F$ . Dann gibt es Elemente  $e \in Z - T$  und  $f \in Z \cap T$ ; diese liegen auf dem Zirkuit  $Z$ , d.h.  $T$  ist nicht trennend.

$a_3$ ) Sei  $F \subset T$ . Dann gibt es Elemente  $e \in Z - T$  und  $f \in Z \cap F \subset T$ , die auf dem Zirkuit  $Z$  liegen;  $T$  ist also nicht trennend.

Damit sind alle Fälle erledigt und die Behauptung ist bewiesen.

b) Es bleibt zu zeigen, daß  $F$  minimal ist. Angenommen,  $F$  ist nicht minimal trennend, dann gibt es eine trennende Teilmenge  $S \neq \emptyset$  von  $F$ , das heißt, daß alle Zirkuits von  $M$  in  $S$  oder  $E - S$  liegen. Sei  $B_1$  eine Basis von  $S$  und  $B_2$  eine Basis von  $F - S$ , dann ist  $B_1 \cup B_2$  eine unabhängige Menge in  $F$ , da es keinen Zirkuit gibt, der Elemente aus  $B_1 \subset S$  und  $B_2 \subset E - S$  enthält. Folglich gilt

$$r(F) \leq r(S) + r(F-S) = |B_1| + |B_2| \leq r(F).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Inseparabilität von  $F$ .

" $\Leftarrow$ " Sei  $F$  minimal trennend.

c) Da nach Annahme die einzigen trennenden Teilmengen von  $F$  in  $M_F$  die leere Menge und  $F$  selbst sind, ist  $F$  nach Definition zusammenhängend und damit nach Folgerung 7.3 inseparabel.

d) Es bleibt zu zeigen, daß  $F$  maximal ist. Sei  $G$  eine Obermenge von  $F$ , d.h.  $G = F \cup F'$ ,  $F' \neq \emptyset$ . Ist  $B_1$  eine Basis von  $F$  und  $B_2$  eine Basis von  $F'$ , dann ist, da  $F$  trennend ist (siehe b)),  $B_1 \cup B_2$  unabhängig in  $G$ . Daraus folgt

$$r(G) \geq |B_1| + |B_2| = r(F) + r(F') \geq r(G).$$

Das aber bedeutet, daß jede Obermenge von  $F$  separabel,  $F$  also maximal inseparabel ist.  $\square$

Die für die Optimierung wichtigste Eigenschaft von Matroiden ist die Existenz eines besonders einfachen Algorithmus - des sogenannten Greedy-Algorithmus - zur Lösung von Optimierungsproblemen über Matroiden.

Ist  $M = (E, \mathcal{A})$  ein Unabhängigkeitssystem und  $c: E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Gewichtsfunktion, dann arbeitet der Greedy-Algorithmus wie folgt

- (1)  $F := \emptyset$ ;
- (2) Ist  $E = \emptyset$ , dann STOP;  
Wähle  $f \in E$ , so daß  $c(f) = \max \{c(e) \mid e \in E\}$ ;  
Entferne  $f$  aus  $E$ ;
- (3) Ist  $c(f) \leq 0$ , dann STOP;  
Ist  $F \cup \{f\} \in \mathcal{A}$ , dann füge  $f$  zu  $F$  hinzu;  
Gehe zu (2).

Falls es möglich ist, in Schritt (3) die Unabhängigkeit von  $F \cup \{f\}$  in einer Rechenzeit zu überprüfen, die polynomial in  $|E|$  ist, arbeitet der Greedy-Algorithmus in polynomialer Zeit abhängig von  $|E|$ . Es gibt Unabhängigkeitssysteme, für die der Test auf Unabhängigkeit NP-hart ist, jedoch sind diese sehr artifiziell. Für fast alle "natürlichen" kombinatorischen Optimierungsprobleme ist der Greedy-Algorithmus ein guter Algorithmus.

#### Satz 7.5.

Sei  $M = (E, \mathcal{A})$  ein Unabhängigkeitssystem, dann gilt:

Der Greedy-Algorithmus liefert für alle Funktionen  $c: E \rightarrow \mathbb{R}$  ein Optimum des Problems  $\max \sum_{e \in I} c(e)$  genau dann, wenn  $M$  ein Matroid ist.  $\square$

### § 8. Matroid Polytope

Jedem Unabhängigkeitssystem  $M = (E, \mathcal{A})$  kann man auf natürliche Weise einen Polytopen zuordnen:

Ist  $|E| = m$ , dann ordnen wir jedem  $e \in E$  eine Komponente  $x_e$  eines  $m$ -Tupels zu. Für jede Teilmenge  $S \subseteq E$  definieren wir den

Inzidenzvektor  $x^S \in \mathbb{R}^m$  durch

$$x_e^S := \begin{cases} 1, & \text{falls } e \in S \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren aller unabhängigen Mengen ist dann der Polytop

$$P_M := \text{conv} \{x^S \mid S \in \mathcal{A}\}.$$

$P_M$  ist aufgrund der Struktur von Unabhängigkeitssystemen stets ein monotoner Polytop. Ist  $M$  ein Matroid, so heißt  $P_M$  Matroid Polytop.

Da - wie wir noch sehen werden - etliche der wohlbekanntesten kombinatorischen Optimierungsprobleme Matroidprobleme sind, ist die Tatsache von Bedeutung, daß für Matroid Polytope eine explizite, vollständige lineare Charakterisierung bekannt ist und somit auch für die zu diesen Optimierungsproblemen gehörigen Polytope. Für Polytope von beliebigen Unabhängigkeitssystemen ist das nicht der Fall. Die lineare Darstellung der Matroid Polytope ist zwar im allgemeinen enorm umfangreich, jedoch durchweg kombinatorisch sehr einfach zu handhaben.

Satz 8.1. [Edmonds, 1971]

Sei  $M = (E, \mathcal{I})$  ein Matroid und  $P_M$  der zugehörige Matroid Polytop, dann gilt

$$P_M = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid (1) x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ (2) \sum_{e \in S} x_e \leq r(S) \quad \forall S \subseteq E\}. \quad \square$$

Edmonds hat Satz 8.1 zusammen mit Satz 7.5 dadurch bewiesen, daß er den Greedy-Algorithmus als ein spezielles Verfahren der linearen Programmierung über dem Polyeder  $\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \sum_{e \in S} x_e \leq r(S) \quad \forall S \subseteq E\}$  interpretierte und den schwachen Dualitätssatz ausnutzte.

Darüber hinaus konnte Edmonds [1970] auch die Facetten von  $P_M$  charakterisieren. Einen Beweis dieser Charakterisierung wollen wir im folgenden angeben, da ein solcher in der Literatur noch nicht erschienen ist. Zunächst gilt offensichtlich

Satz 8.2.

Sei  $M$  ein Matroid und  $k = |\{e \in E \mid r(e) = 0\}|$ , dann gilt

$$\dim P_M = |E| - k. \quad \square$$

Speziell bedeutet das, daß die Komponenten der abhängigen Elemente  $e \in E$  nie von Null verschieden sein können. Wir können sie also ohne weiteres von vornherein streichen.

O.B.d.A. betrachten wir also im weiteren nur noch normale Matroide, d.h. volldimensionale Matroid Polytope.

Satz 8.3.

Sei  $M = (E, \mathcal{I})$  ein Matroid, dann gilt

(\*)  $\sum_{e \in E} x_e \leq r(E)$  ist Facette von  $P_M \iff E$  ist inseparabel.

Beweis:

" $\Rightarrow$ ":

Ist E separabel, so ist (\*) die Summe von gültigen Ungleichungen, nach Satz 4.5 (a) also keine Facette.

" $\Leftarrow$ ":

Wir nehmen an, daß (\*) keine Facette ist, und zeigen, daß dann E separabel sein muß. Widerspruch!

Wir fassen die Inzidenzvektoren der Basen von E zu einer Matrix A zusammen, so daß jeder Zeile von A eine Basis entspricht. Die Zeilenvektoren von A sind nach Definition genau die Ecken von  $P_M$ , die (\*) mit Gleichheit erfüllen. Ist (\*) keine Facette von  $P_M$ , so ist der Rang von A kleiner als  $|E|$  und damit existiert ein Vektor  $\lambda \in \mathbb{R}^{|E|} - \{0\}$  mit

$$A\lambda = 0.$$

Seien

$$E_1 := \{e \in E \mid \lambda_e < 0\},$$

$$E_2 := \{e \in E \mid \lambda_e \geq 0\}.$$

Da A nur Elemente aus  $\{0,1\}$  enthält und M normal ist, gilt  $E_1 \neq \emptyset$ ,  $E_2 \neq \emptyset$ , ebenso  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ,  $E_1 \cup E_2 = E$ . Also ist  $E_1, E_2$  eine Partition von E.

Sei  $B_i$  Basis von E, so daß  $S_i = E_i \cap B_i$  Basis von  $E_i$ ,  $i = 1,2$ , ist. Sei  $T_1 = B_1 \cap E_2$ ,  $T_2 = B_2 \cap E_1$ , also  $B_1 = S_1 \cup T_1$ ,  $B_2 = S_2 \cup T_2$ .

Nach Satz 7.1 (3) gibt es zu  $T_2 \subset B_2$  eine Menge  $T'' \subset B_1$ , so daß

$I = (B_2 - T_2) \cup T'' = S_2 \cup T''$  Basis von E ist. Es ist  $r(E_2) = r(S_2) = r(E_2 \cap S_2) \leq r(E_2 \cap (S_2 \cup T'')) = r(E_2 \cap I) \leq r(E_2)$ .

Es folgt:  $E_2 \cap T'' = \emptyset$  und somit  $T'' \subset S_1$ . Da  $x^{B_2}$  und  $x^I$  Zeilen von A sind, gilt:

$$\sum_{i \in S_2} \lambda_i + \sum_{i \in T_2} \lambda_i = x^{B_2} \lambda = 0 = x^I \lambda = \sum_{i \in S_2} \lambda_i + \sum_{i \in T''} \lambda_i$$

und somit

$$\sum_{i \in T_2} \lambda_i = \sum_{i \in T''} \lambda_i.$$

Analog gibt es zu  $T_1 \subset B_1$  eine Teilmenge  $T' \subset S_2$ , so daß

$$\sum_{i \in T_1} \lambda_i = \sum_{i \in T'} \lambda_i.$$

Es folgt

$$\sum_{i \in T_2} \lambda_i = - \sum_{i \in S_2} \lambda_i \leq - \sum_{i \in T'} \lambda_i = - \sum_{i \in T_1} \lambda_i = \sum_{i \in S_1} \lambda_i \leq \sum_{i \in T''} \lambda_i = \sum_{i \in T_2} \lambda_i,$$

das heißt  $\sum_{i \in S_1} \lambda_i = \sum_{i \in T''} \lambda_i$ . Aus  $\lambda_i < 0$   $i \in E_1$  und  $T'' \subset S_1$  folgt:  $T'' = S_1$ .

Daher gilt  $I = S_1 \cup S_2$  und  $r(E) = |I| = |S_1| + |S_2| = r(E_1) + r(E_2)$ , also ist E separabel.  $\square$

Satz 8.4.

Sei  $M = (E, \mathcal{A})$  ein normales Matroid und  $\emptyset \neq S \subset E$ , dann gilt

(\*)  $\sum_{e \in S} x_e \leq r(S)$  ist Facette von  $P_M \Leftrightarrow S$  ist abgeschlossen und inseparabel.

Beweis:

" $\Rightarrow$ ":

Ist  $S$  nicht abgeschlossen, dann existiert  $e \in E-S$  mit  $\sum_{j \in S} x_j + x_e \leq r(S)$ , also ist (\*) nach Satz 4.5(b) redundant. Ist  $S$  separabel, dann ist (\*) Summe zweier verschiedener gültiger Ungleichungen, mithin nach Satz 4.5(a) keine Facette.

" $\Leftarrow$ ":

Ist  $S$  inseparabel, dann ist (\*) nach Satz 8.3 eine Facette von  $P_{M_S}$ , wobei  $M_S$  der durch  $M$  auf  $S$  induzierte Matroid ist. Es gibt somit  $|S|$  Basen von  $S$ , deren Inzidenzvektoren affin (in diesem Falle sogar linear) unabhängig sind.

Da  $S$  abgeschlossen ist, gilt nach Definition für jedes  $e \in E-S$  :

$r(S \cup \{e\}) = r(S) + 1$ , also gibt es zu jedem  $e \in E-S$  eine Basis  $B$  von  $S$ , so daß  $I_e = B \cup \{e\} \in \mathcal{A}$ .  $x^{I_e}$  erfüllt (\*) nach Definition mit Gleichheit. Auf diese Weise erhalten wir  $|E-S| + |S| = |E|$  Elemente von  $\mathcal{A}$ . Fassen wir die Inzidenzvektoren dieser unabhängigen Mengen als Zeilenvektoren einer Matrix auf, so hat diese bei geeigneter Anordnung die folgende Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ A' & I \end{pmatrix},$$

wobei  $A$  die Matrix der Inzidenzvektoren der Basen von  $S$ , also regulär ist, und  $I$  die  $|E-S| \times |E-S|$  Einheitsmatrix ist. Mithin ist die gesamte Matrix regulär, d.h. es gibt  $|E|$  Elemente von  $\mathcal{A}$ , die (\*) mit Gleichheit erfüllen und deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind, folglich definiert (\*) nach Satz 4.4 eine Facette von  $P_M$ .  $\square$

Satz 8.5. [Edmonds, 1970]

Sei  $M = (E, \mathcal{A})$  ein normales Matroid, dann ist eine vollständige nicht redundante lineare Beschreibung des Matroid Polytopen  $P_M$  gegeben durch das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x_e &\geq 0 && \forall e \in E, \\ \sum_{e \in S} x_e &\leq r(S) && \forall S \subset E, S \text{ abgeschlossen und inseparabel.} \end{aligned}$$

Beweis:

Folgt aus Satz 6.2 (a), Satz 8.4 und Satz 8.1.  $\square$

Sind zwei Matroide  $M_1 = (E, \mathcal{A}_1)$  und  $M_2 = (E, \mathcal{A}_2)$  auf derselben Grundmenge  $E$  gegeben, so ist im allgemeinen  $M_1 \cap M_2 := (E, \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$  kein Matroid, sondern lediglich ein Unabhängigkeitssystem, und zwar ein normales, wenn  $M_1$  und  $M_2$  normal sind. Erstaunlicherweise kann man jedoch auch  $P_{M_1 \cap M_2}$  durch ein Ungleichungssystem vollständig beschreiben.

Satz 8.6. [Edmonds, 1970]

$$P_{M_1 \cap M_2} = P_{M_1} \cap P_{M_2}. \quad \square$$

Darüberhinaus lassen sich sogar die Facetten von  $P_{M_1 \cap M_2}$  angeben.

Satz 8.7. [Giles, 1975]

Seien  $M_1$  und  $M_2$  normale Matroide, und sei  $r$  die Rangfunktion von  $M_1 \cap M_2$ , dann ist eine vollständige, nicht redundante lineare Charakterisierung von  $P_{M_1 \cap M_2}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} x_e &\geq 0 \quad \forall e \in E, \\ \sum_{e \in S} x_e &\leq r(S) \quad \forall S \subseteq E, S \text{ abgeschlossen und inseparabel bezüglich } M_1 \cap M_2. \quad \square \end{aligned}$$

Zusammen mit diesem Satz hat R. Giles auch einen von unserem verschiedenen Beweis von Satz 8.5 gegeben.

Diese Verallgemeinerung der Charakterisierung von Matroid Polytopen läßt sich nun leider nicht auf den Durchschnitt von mehr als zwei Matroiden fortsetzen. Jedes Unabhängigkeitssystem ist zwar als Durchschnitt von Matroiden darstellbar, und damit ist der Polytop des Unabhängigkeitssystems im Durchschnitt von Matroid Polytopen enthalten, doch hat der Polytop des Unabhängigkeitssystems i.a. wesentlich mehr Facetten als durch die Matroid Polytope geliefert werden. Der Sprung von 2 auf 3 gibt hier gerade den Übergang von "einfachen" zu "schwierigen" Problemen wieder. Diese Tatsache deckt sich (wohl keineswegs zufällig) mit den Ergebnissen der Komplexitätstheorie, die besagen, daß für Probleme, die sich als Durchschnitt von höchstens zwei Matroiden darstellen lassen, ein polynomialer Algorithmus zur Verfügung steht ([Lawler, 1975]), während dies für Probleme, die Durchschnitt von mindestens drei Matroiden sind, nicht der Fall ist.

§ 9. Der Polytop der Basen

Der Polytop der Basen  $P_E$  eines Matroiden  $M = (E, \mathcal{I})$  ist definiert als die konvexe Hülle aller Inzidenzvektoren von Basen des zugrundeliegenden Matroiden, d.h.

$$P_E := \text{conv} \{x^B \in \mathbb{R}^{|E|} \mid B \text{ Basis von } E\}.$$

Offensichtlich gilt

$$P_E = P_M \cap \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \sum_{e \in E} x_e = r(E)\},$$

woraus folgt, daß  $P_E$  eine Seitenfläche von  $P_M$  ist. Mit einer vollständigen linearen Charakterisierung von  $P_M$  ist damit automatisch eine vollständige Beschreibung von  $P_E$  gegeben. Jedoch ist es nicht so, daß eine nicht-redundante lineare Charakterisierung von  $P_M$  auch eine nicht-redundante Beschreibung von  $P_E$  impliziert. Es kann durchaus geschehen, daß einige Facetten von  $P_M$  keine Facetten von  $P_E$  sind bzw. daß mehrere Ungleichungen, die verschiedene Facetten von  $P_M$  definieren, bezüglich  $P_E$  äquivalent sind.

Wir wollen in diesem Paragraphen untersuchen, wie aus einer minimalen Beschreibung von  $P_M$  eine minimale Beschreibung von  $P_E$  gewonnen werden kann.

Sind  $F, F_1, \dots, F_s$  nicht leere Teilmengen von  $E$  mit  $F = \bigcup_{i=1}^s F_i$  und  $r(F) = \sum_{i=1}^s r(F_i)$ , dann heißt  $F_1, \dots, F_s$  eine Separation von  $F$ . Eine Separation heißt minimal, wenn jedes der  $F_i$  inseparabel ist. Daß jedes  $F \subset E$  eine minimale Separation besitzt, ist klar, es gilt aber sogar

Satz 9.1.

*Ist  $M = (E, \mathcal{I})$  ein Matroid, dann hat jedes  $F \subset E$  eine eindeutig bestimmte minimale Separation.*

Beweis:

O.B.d.A zeigen wir, daß  $E$  eine eindeutig bestimmte minimale Separation besitzt.

Angenommen, es gibt zwei verschiedene minimale Separationen  $F_1, \dots, F_s$  und  $G_1, \dots, G_t$ , dann muß für mindestens ein Paar  $F_i, G_j$  gelten  $F_i \cap G_j \neq \emptyset$ ,  $F_i \not\subset G_j$ .

O.B.d.A. sei  $G_j \not\subset F_i$ . Dann ist  $G_j \cap (E - F_i) \neq \emptyset$ . Nach Annahme gilt

$$r(E) = \sum_{k=1}^s r(F_k) = r(F_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s r(F_k) = r(F_i) + r(E - F_i).$$

Wir zeigen nun, daß  $G_j$  separabel ist, was unserer Annahme widerspricht.

Sei  $\bar{F}_i = E - F_i$ , dann erhalten wir aus der Subadditivität und der Submodularität von  $r$  (siehe Satz 7.1 (1)):

$$\begin{aligned}
 r(G_j) &\leq r(G_j \cap F_i) + r(G_j \cap \bar{F}_i) \\
 &\leq r(G_j) + r(F_i) - r(G_j \cup F_i) + r(G_j) + r(\bar{F}_i) - r(G_j \cup \bar{F}_i) \\
 &\leq 2r(G_j) + r(E) - r(G_j \cup F_i \cup G_j \cup \bar{F}_i) - r((G_j \cup F_i) \cap (G_j \cup \bar{F}_i)) \\
 &= r(G_j).
 \end{aligned}$$

Es folgt  $r(G_j) = r(G_j \cap F_i) + r(G_j \cap \bar{F}_i)$ . Widerspruch.  $\square$

Offensichtlich sind die Elemente der minimalen Separation von  $F$  gerade die maximal inseparablen bzw. minimal trennenden Teilmengen von  $F$  (vgl. Satz 7.4). Die Anzahl der Elemente der eindeutig bestimmten minimalen Separation von  $F \subset E$  bezeichnen wir mit  $\beta(F)$ . Satz 9.1 ergibt unmittelbar:

Folgerung 9.2.

(a) Sei  $F \subset E$ .  $G_1, \dots, G_t$  sei eine Separation,  $F_1, \dots, F_{\beta(F)}$  die minimale Separation von  $F$ . Dann gibt es zu jedem  $i \in \{1, \dots, t\}$  eine Teilmenge  $I_i \subset \{1, \dots, \beta(F)\}$ , so daß gilt

$$G_i = \bigcup_{j \in I_i} F_j \quad \text{und} \quad r(G_i) = \sum_{j \in I_i} r(F_j).$$

Darüberhinaus ist  $I_i \cap I_j = \emptyset$ , falls  $i \neq j$ , und es ist  $\beta(F) > t$ , falls  $G_1, \dots, G_t$  nicht die minimale Separation ist.

(b) Ist  $E_1, \dots, E_{\beta(E)}$  die minimale Separation von  $E$  und  $F \subset E$  inseparabel, dann gibt es genau ein  $i \in \{1, \dots, \beta(E)\}$  mit  $F \subset E_i$ .

(c) Sei  $E_1, \dots, E_s$  eine Separation von  $E$ , dann gilt:

$B$  ist Basis von  $E$  genau dann, wenn  $E_i \cap B$  Basis von  $E_i$  ist für alle  $i \in \{1, \dots, s\}$ .  $\square$

Mit Hilfe dieser Resultate können wir nun die Dimension der Seitenflächen

$$P_F := \{x \in P_M \mid \sum_{e \in F} x_e = r(F)\} \text{ von } P_M \text{ berechnen.}$$

Satz 9.3.

Sei  $M = (E, \mathcal{I})$  ein normales Matroid, und sei  $\emptyset \neq F \subset E$ . Dann gilt:

Eine Separation  $F_1, \dots, F_s$  von  $F$  ist minimal  $\iff \dim P_F = |E| - s - |\text{cl}(F) - F|$ .

Beweis:

Für jede Basis  $B$  von  $F$  ist  $B \cup \{e\}$  abhängig, wenn  $e \in \text{cl}(F) - F$ ; das bedeutet  $x \in P_F \implies x_e = 0 \quad \forall e \in \text{cl}(F) - F$ . Sei  $F_1, \dots, F_s$  eine Separation von  $F$ , dann ist nach Satz 9.2 (c)  $B$  Basis von  $F$  genau dann, wenn  $B \cap F_i$  Basis von  $F_i$  für  $i = 1, \dots, s$  ist.  $x \in P_F$  impliziert also  $x \in P_{F_i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ .  $P_F$  ist damit enthalten in der Lösungsmenge eines Systems von  $|\text{cl}(F) - F| + s$  Gleichungen, das offensichtlich vollen Rang hat. Es folgt:  $\dim P_F \leq |E| - s - |\text{cl}(F) - F|$ .

" $\Leftarrow$ " : Folgt unmittelbar aus Folgerung 9.2 (a), da die Dimension eine Invariante ist.

" $\Rightarrow$ " : Wir wollen zeigen: Ist  $bx = b_0$  eine Hyperebene mit  $P_F \subset \{x \mid bx = b_0\} \cap P_M$ , dann gilt

$$\begin{aligned} b_e &= \alpha_{F_i} & \forall e \in F_i, i = 1, \dots, s, \\ b_e &= 0 & \forall e \in E - \text{cl}(F). \end{aligned}$$

Ist das der Fall, so gilt für  $\lambda_i := \alpha_{F_i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , und  $\lambda_f := b_f$ ,  $f \in \text{cl}(F) - F$ ,

$$\begin{aligned} b &= \sum_{i=1}^s \lambda_i \left( \sum_{e \in F_i} x_e \right) + \sum_{f \in \text{cl}(F) - F} \lambda_f x_f, \\ b_0 &= \sum_{i=1}^s \lambda_i r(F_i), \end{aligned}$$

woraus folgt, daß  $\dim P_F \geq |E| - s - |\text{cl}(F) - F|$ .

a) Seien  $i \in \{1, \dots, s\}$  und  $e \in F_i$  beliebig, sei  $\alpha_{F_i} := b_e$ . Ist  $f \in F_i - \{e\}$  beliebig, so gibt es nach Folgerung 7.3, da  $F_i$  inseparabel ist, einen Zirkuit  $Z \subset F_i$ , der  $e$  und  $f$  enthält.  $Z - \{e\}$  können wir nach Satz 7.1 (1') zu einer Basis  $I$  von  $F_i$  und  $I$  zu einer Basis  $B$  von  $F$  erweitern,  $B' = (B - \{f\}) \cup \{e\}$  ist ebenfalls Basis von  $F$  und  $I' = (I - \{f\}) \cup \{e\}$  Basis von  $F_i$ . Es folgt  $x^B, x^{B'} \in P_F$  und damit  $0 = b_0 - b_0 = bx^B - bx^{B'} = b_f - b_e$ . Daraus ergibt sich

$$b_e = \alpha_{F_i} \quad \forall e \in F_i, i = 1, \dots, s.$$

b) Sei  $e \in E - \text{cl}(F)$ . Sei  $B$  eine Basis von  $F$ , dann ist  $B' = B \cup \{e\}$  unabhängig. Es gilt  $x^B, x^{B'} \in P_F$  und  $0 = bx^{B'} - bx^B = b_e$ . Daraus folgt  $b_e = 0$  für alle  $e \in E - \text{cl}(F)$ .  $\square$

Folgerung 9.4.

(a) [Giles, 1975]

Ist  $F \subset E$ , dann gilt

$$\dim P_F = |E| - \beta(F) - |\text{cl}(F) - F|.$$

(b)  $F \subset E$  ist abgeschlossen  $\iff \dim P_F = |E| - \beta(F)$ .

(c)  $\dim P_E = |E| - \beta(E)$ .  $\square$

Satz 9.3 und Folgerung 9.4 (b) stellen interessante und nicht unbedingt offensichtliche Beziehungen zwischen den matroidalen Begriffen "minimale Separation", "abgeschlossen" und der geometrischen Invariante "Dimension" her.

Sei  $M = (E, \mathcal{I})$  ein Matroid und  $S \subset E$ . Ist  $B$  eine Basis von  $\bar{S} = E - S$ , dann ist  $\mathcal{J} = \{I \subset S \mid I \cup B \in \mathcal{I}\}$  das Unabhängigkeitssystem eines Matroids  $M \cdot S$  auf  $S$ .  $M \cdot S$  heißt Kontraktionsmatroid. Man überlegt sich leicht, daß  $M \cdot S$  unabhängig von der Wahl der Basis  $B \subset \bar{S}$  ist und daß für die Rangfunktion  $r^S$  auf  $M \cdot S$  gilt:

$r^S(F) = r(F \cup \bar{S}) - r(\bar{S})$  für alle  $F \subset S$ .  $Z \subset S$  ist ein Zirkuit in  $M \cdot S$  genau dann, wenn  $Z$  minimal ist in der Menge  $A = \{Z' \subset S \mid Z' \neq \emptyset \text{ und } \exists \text{ Zirkuit } C \text{ in } M \text{ mit } Z' = S \cap C\}$ .

Satz 9.5.

Sei  $M = (E, \mathcal{I})$  ein Matroid und  $E_1, \dots, E_\beta$  die minimale Separation von  $E$ . Sei  $F \subset E_1$  und  $S = E - F$ . Dann gilt:

- (a) Die minimale Separation von  $S$  in  $M \cdot S$  enthält  $E_2, \dots, E_\beta$ .
- (b) Ist  $F = E_1$ , dann ist  $E_2, \dots, E_\beta$  die minimale Separation von  $S$  in  $M \cdot S$ .
- (c) Ist  $F \neq E_1$ , dann ist  $E_1 - F, E_2, \dots, E_\beta$  eine Separation von  $S$  in  $M \cdot S$ .

Beweis:

Wegen  $E_i \cap F = \emptyset$ ,  $i = 2, \dots, s$ , und wegen Folgerung 9.2 (c) gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^s r^S(E_i) + r^S(E_1 - F) &= \sum_{i=2}^s (r(E_i \cup F) - r(F)) + r((E_1 - F) \cup F) - r(F) \\ &= \sum_{i=2}^s r(E_i) + r(E_1) - r(F) \\ &= r(S \cup F) - r(F) \\ &= r^S(S) . \end{aligned}$$

Alles übrige ist damit klar.  $\square$

Die vorhergehenden Betrachtungen geben uns nun die Möglichkeit, die Facetten von  $P_E := \{x \in P_M \mid \sum_{e \in E} x_e = r(E)\}$  der konvexen Hülle der Inzidenzvektoren der Basen von  $E$  zu berechnen.

Satz 9.6.

Sei  $M = (E, \mathcal{I})$  ein normales Matroid und  $E_1, \dots, E_\beta$  die minimale Separation von  $E$ . Sei  $F \subset E$  inseparabel und  $S := E - F$ . Dann gilt

$\sum_{e \in F} x_e \leq r(F)$  ist Facette von  $P_E \iff E_1 - F, E_2 - F, \dots, E_\beta - F$  ist die minimale Separation von  $S$  in  $M \cdot S$ .

Beweis:

Ist  $F$  inseparabel, dann ist  $F$  nach Folgerung 9.2 (b) in genau einer der Mengen  $E_i$  enthalten, sagen wir  $F \subset E_1$ .

Folgerung 9.4 (c) impliziert  $P_E = \bigcap_{i=1}^{\beta} P_{E_i}$ . Ist  $F = E_1$ , so ist daher

$\sum_{e \in F} x_e \leq r(F)$  keine Facette von  $P_E$ ; aber wegen  $E_1 - F = \emptyset$  ist  $E_1 - F, \dots, E_\beta - F$  auch keine Separation von  $S$  in  $M \cdot S$ .

Wir können also annehmen, daß  $F \subsetneq E_1$  gilt.

" $\Leftarrow$ " :

Wir zeigen: Ist  $bx = b_0$  eine Hyperebene mit  $P_E \cap P_F \subset \{x \in P_M \mid bx = b_0\}$ , dann gibt es  $\pi, \lambda_1, \dots, \lambda_\beta \in \mathbb{R}$ , so daß

$$\pi \sum_{e \in F} x_e + \sum_{i=1}^{\beta} (\lambda_i \sum_{e \in E_i} x_e) = \sum_{e \in E} b_e x_e = bx$$

$$\pi r(F) + \sum_{i=1}^{\beta} \lambda_i r(E_i) = b_0.$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$b_e = \alpha_F \quad \text{für alle } e \in F,$$

$$b_e = \alpha_{E_1} \quad \text{für alle } e \in E_1 - F,$$

$$b_e = \alpha_{E_i} \quad \text{für alle } e \in E_i, i = 2, \dots, \beta.$$

a) Sei  $e \in F$  beliebig,  $\alpha_F := b_e$ . Da  $F$  nach Voraussetzung inseparabel ist, gibt es zu jedem  $f \in F$  nach Folgerung 7.3 einen Zirkuit  $Z$  in  $F$ , so daß  $e, f \in Z$ . Sei  $I$  eine Basis von  $F$ , die  $Z - \{e\}$  enthält und  $B$  eine Basis von  $E$ , die  $I$  enthält (Existenz nach Satz 7.1 (1') gesichert). Dann ist  $B' = (B - \{f\}) \cup \{e\}$  ebenfalls eine Basis von  $E$  und  $I' = (I - \{f\}) \cup \{e\}$  eine Basis von  $F$ , somit gilt für die Inzidenzvektoren  $x^B, x^{B'}$  nach Konstruktion  $x^B, x^{B'} \in P_F \cap P_E$  und daher  $0 = b_0 - b_0 = bx^B - bx^{B'} = b_f - b_e$ .

Es folgt

$$b_e = \alpha_F \quad \text{für alle } e \in F.$$

b) Seien  $i \in \{2, \dots, \beta\}$  und  $e \in E_i$  beliebig,  $\alpha_{E_i} := b_e$ . Nach Satz 9.5 (a) ist  $E_i$  inseparabel in  $M \cdot S$ , d.h. zu jedem  $f \in E_i$  gibt es nach Folgerung 7.3 bezüglich  $M \cdot S$  einen Zirkuit  $Z$  in  $E_i$ , der  $e$  und  $f$  enthält.  $Z$  ist offensichtlich auch Zirkuit in  $M$ . Analog zu a) konstruieren wir Basen  $I$  von  $E_i$  und  $B$  von  $E$  und folgern

$$b_e = \alpha_{E_i} \quad \text{für alle } e \in E_i, i = 2, \dots, \beta.$$

c) Nach Voraussetzung ist  $E_1 - F, E_2, \dots, E_\beta$  die minimale Separation von  $S$  in  $M \cdot S$ , d.h.  $E_1 - F$  ist inseparabel in  $M \cdot S$ . Sei  $e \in E_1 - F$  beliebig und  $\alpha_{E_1} := b_e$ . Nach Folgerung 7.3 existiert zu jedem  $f \in E_1 - F$  ein Zirkuit  $Z \subset E_1 - F$  in  $M \cdot S$ , der  $e$  und  $f$  enthält. Zu diesem Zirkuit  $Z$  gibt es nach Definition einen Zirkuit  $C$  in  $M$ , der  $Z$  enthält. Da  $E_1$  eine maximale inseparable Teilmenge von  $E$  ist, ist  $E_1$  nach Satz 7.4 trennend, also gilt  $C \subset E_1$ . Analog zu a) folgern wir:

$$b_e = \alpha_{E_1} \quad \text{für alle } e \in E_1 - F.$$

Damit ist der erste Beweisteil erledigt.

" $\Rightarrow$ " :

Angenommen  $F_1, \dots, F_t, E_2, \dots, E_\beta$ ,  $t \geq 2$ , ist die minimale Separation von  $S$  in  $M \cdot S$ . Ist  $I$  irgendeine Basis von  $F$ , dann enthält jede Basis  $B$  von  $E$ , die  $I$  enthält, genau  $r^S(F_i)$  Elemente von  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ , und  $r^S(E_i) = r(E_i)$  Elemente von  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, \beta$ . Es folgt

$$P_E \cap P_F \subset \left( \bigcap_{i=1}^{\beta} P_{E_i} \right) \cap \bigcap_{i=1}^t \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \sum_{e \in F_i} x_e = r^S(F_i)\}.$$

Offensichtlich hat das Gleichungssystem  $\sum_{e \in E_i} x_e = r(E_i)$ ,  $i = 1, \dots, \beta$ ,

$\sum_{e \in F_i} x_e = r^S(F_i)$ ,  $i = 1, \dots, t$ , vollen Rang. Daraus ergibt sich

$$\dim(P_E \cap P_F) \leq |E| - \beta - t \leq |E| - \beta - 2.$$

Das aber heißt,  $\sum_{e \in F} x_e \leq r(F)$  ist keine Facette von  $P_E$ .  $\square$

Folgerung 9.7.

Sei  $F \subset E$  inseparabel,  $\bar{F} := E - F$ , dann gilt:

$$\sum_{e \in F} x_e \leq r(F) \text{ ist Facette von } P_E \iff \beta_M(E) = \beta_{M \cdot \bar{F}}(\bar{F}). \quad \square$$

Ein etwas allgemeineres Resultat als das unsrige hat unabhängig R. Giles [1975] erzielt, indem er eine Formel für die Dimension von  $P_E \cap P_F$  für alle  $F \subset E$  angeben konnte.

Satz 9.8.

Sei  $M = (E, \mathfrak{A})$  ein normales Matroid und  $e \in E$ , dann gilt

$$x_e \geq 0 \text{ ist Facette von } P_E \iff \beta(E) = \beta(E - \{e\}).$$

Beweis:

Sei  $e \in E$  beliebig und  $E' := E - \{e\}$ . Da  $M$  normal ist, gibt es mindestens eine Basis von  $E$ , die  $e$  enthält. Es können die folgenden Fälle eintreten:

a)  $\text{cl}(E') = E'$ . Das bedeutet, jede Basis von  $E$  hat die Form  $B' \cup \{e\}$ , wobei  $B'$  Basis von  $E'$  ist. Einerseits folgt daraus, daß  $x_e \geq 0$  nicht einmal echte Seitenfläche von  $P_E$  ist, andererseits folgt  $\dim P_E < \dim P_{E'}$ . Mit Folgerung 9.4 ergibt das

$$\begin{aligned} \beta(E) &= |E| - \dim P_E > |E| - \dim P_{E'} = |E| - |E| + \beta(E') + |\text{cl}(E') - E'| \\ &= \beta(E'). \end{aligned}$$

Im Falle  $\text{cl}(E') = E'$  ist damit die behauptete Äquivalenz bewiesen.

b)  $\text{cl}(E') = E$ . Jede Basis von  $E'$  ist mithin Basis von  $E$ , das heißt  $P_{E'} \subset P_E$ . In diesem Fall ist  $x_e \geq 0$  genau dann Facette von  $P_E$ , wenn es  $|E| - \beta(E)$  Basen von  $E'$  gibt, deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} \dim(P_E \cap P_{E'}) &= \dim P_{E'} = |E| - \beta(E') - |\text{cl}(E') - E| \\ &= |E| - \beta(E') - 1 \\ &= \dim P_E - 1 \\ &= |E| - \beta(E) - 1. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann richtig, wenn  $\beta(E) = \beta(E')$ .  $\square$

Fassen wir die vorherigen Sätze zusammen, so ergibt sich

Satz 9.9.

Sei  $M = (E, \mathcal{M})$  ein normales Matroid,  $E_1, \dots, E_\beta$  die minimale Separation von  $E$ . Dann ist das folgende System von Gleichungen und Ungleichungen eine vollständige nicht redundante lineare Charakterisierung von  $P_E$ , der konvexen Hülle der Inzidenzvektoren aller Basen von  $E$ :

- (1)  $\sum_{e \in E_i} x_e = r(E_i) \quad i = 1, \dots, \beta.$
- (2)  $\sum_{e \in F} x_e \leq r(F) \quad \text{für alle } F \subset E \text{ mit } F \text{ abgeschlossen und inseparabel und}$   
 $\beta_M(E) = \beta_{M, \overline{F}}(\overline{F}).$
- (3)  $x_e \geq 0 \quad \text{für alle } e \in E \text{ mit } \beta(E) = \beta(E - \{e\}).$

Beweis:

Zu zeigen bleibt, daß zwei verschiedene Ungleichungen der Typen (2), (3) nicht dieselbe Facette von  $P_E$  definieren.

Für die Ungleichungen  $x_e \geq 0$ ,  $x_f \geq 0$ ,  $e \neq f$  ist das trivial; desgleichen definieren  $x_e \geq 0$  und  $\sum_{f \in F} x_f \leq r(F)$  offensichtlich, wenn  $F$  abgeschlossen ist, niemals dieselbe Facette.

Seien  $\sum_{e \in F} x_e \leq r(F)$  und  $\sum_{e \in F'} x_e \leq r(F')$  zwei verschiedene Ungleichungen des Typs (2) und  $H = \{x \in P_E \mid \sum_{e \in F} x_e = r(F)\}$ ,  $H' = \{x \in P_E \mid \sum_{e \in F'} x_e = r(F')\}$ , o.B.d.A. sei  $F - F' \neq \emptyset$ . Wir zeigen, daß es eine Basis  $B$  von  $E$  gibt mit  $x^B \in H$ ,  $x^B \notin H'$ , und sind damit fertig.

Sei  $I$  Basis von  $F - F'$ ,  $J$  Basis von  $F$  mit  $I \subset J$ ,  $K$  Basis von  $E - (F' - F)$  mit  $J \subset K$  und  $B$  Basis von  $E$  mit  $K \subset B$ . Die Konstruktion ist nach Satz 7.1 (1') möglich. Nach Definition gilt  $x^B \in H$ .

- a) Ist  $F' \subset F$ , so ist  $F' \cap B$  keine Basis von  $F'$ , denn sonst wäre  $I \cup (F' \cap B)$  Basis von  $F$  und somit  $F', F - F'$  eine Separation von  $F$ ; also  $x^B \not\perp H'$ .
- b) Sei  $F \cap F' = \emptyset$ . Angenommen  $B \cap F'$  ist Basis von  $F'$ , dann ist  $F', E - F'$  eine Separation von  $E$ , da  $K$  Basis von  $E - F'$  ist. Also folgt nach Satz 9.2 (a)  $\exists E_i$  mit  $E_i \subset F'$ , wegen  $E_i \not\perp F'$  ist dann  $F'$  aber nicht inseparabel.
- c) Sei  $F \cap F' \neq \emptyset, F' - F \neq \emptyset$ . Angenommen  $B \cap F'$  ist Basis von  $F'$ , d.h.  $r(F') = |B - K| + |J - I|$ . Da  $F$  inseparabel, ist  $J - I$  keine Basis von  $F \cap F'$ , also  $r(F \cap F') > |J - I|$ .  $J \cup (B - K)$  ist unabhängig in  $F \cup F'$ . Es folgt  $r(F \cup F') + r(F \cap F') > |J \cup (B - K)| + |J - I| = |J| + |B - K| + |J - I| = r(F) + r(F')$ .

Widerspruch zur Submodularität von  $r$  (siehe 7.1 (1)).  $\square$

## TEIL 2. DAS SYMMETRISCHE TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

Das symmetrische Travelling Salesman Problem (kurz STSP) hat seinen Ursprung in der folgenden Problemstellung:

Gegeben seien  $n$  Städte und Entfernungen  $c_{ij}$  zwischen diesen, sei weiterhin  $c_{ij} = c_{ji}$  für  $1 \leq i < j \leq n$  (Symmetrie). Gesucht ist eine Rundreise durch alle  $n$  Städte mit kürzestem Reiseweg.

Das STSP scheint eines der anwendungsreichsten kombinatorischen Optimierungsprobleme zu sein (siehe z.B. [Lenstra, Rinnooy Kan, 1976]) und hat daher, wie man anhand der zahlreichen Aufsätze, die zu diesem Problem erschienen sind (siehe [Kastning, 1976]), ersehen kann, unter Wissenschaftlern und Praktikern viel Interesse gefunden.

Formal kann man das STSP auf verschiedene Arten beschreiben.

- (1) Man finde unter allen zyklischen Permutationen von  $n$  Ziffern, wobei inverse Permutationen identifiziert werden, eine Permutation  $\phi$ , so daß 
$$\sum_{i=1}^n c_{i\phi(i)} \text{ minimal ist.}$$
- (2) In einem vollständigen Graphen  $K_n = [V, E]$  mit Kantenbewertungen  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  für alle  $\{i, j\} \in E$  finde man einen Hamilton-Zyklus  $T$ , so daß 
$$\sum_{\{i, j\} \in T} c_{ij} \text{ minimal ist.}$$

Und man kann, was uns besonders interessieren wird, das STSP als lineares Programm über einem speziellen Polyeder darstellen.

- (3) Sei  $K_n = [V, E]$  der vollständige Graph auf  $n$  Knoten mit Kantenbewertungen  $c_{ij}$  für alle  $\{i, j\} \in E$ .  $T_n \in \mathcal{P}(E)$  sei die Menge aller Hamilton-Zyklen (Touren) in  $K_n$ . Jeder Tour  $T \in T_n$  ordnen wir einen Inzidenzvektor 
$$x^T = (x_{12}^T, x_{13}^T, \dots, x_{1n}^T, x_{23}^T, \dots, x_{n-1, n}^T) \in \mathbb{R}^m,$$
 
$$m = |E| = \frac{1}{2} n(n-1),$$

wie folgt zu:

$$x_{ij}^T = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i, j\} \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei

$$Q_T^n := \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^m \mid T \in T_n\},$$

dann entspricht jeder Ecke von  $Q_T^n$  eine Tour  $T \in T_n$  und umgekehrt.

Mit Hilfe des linearen Programms

$$(P) \quad \begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} x_{ij} &= \min! \\ x &\in Q_T^n \end{aligned}$$

können wir also (zumindest theoretisch) das STSP lösen. Den Polytopen  $Q_T^n$  wollen wir im weiteren symmetrischen Travelling Salesman Polytopen nennen.

Sei  $\tilde{T}_n$  die Monotonisierung von  $T_n$ , d.h.  $\tilde{T}_n := \{S \subseteq E \mid \exists T \in T_n \text{ mit } S \subseteq T\}$ , und sei

$$\tilde{Q}_T^n := \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^m \mid T \in \tilde{T}_n\},$$

so können wir nach Satz 6.6 (d) einen Vektor  $c'$  finden, so daß das lineare Programm

$$(\tilde{P}) \quad \begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} c'_{ij} &= \max! \\ x &\in \tilde{Q}_T^n \end{aligned}$$

dieselben Optimallösungen wie das Programm (P) hat. Das bedeutet, daß wir das STSP auch als lineares Programm ( $\tilde{P}$ ) über dem Polytopen  $\tilde{Q}_T^n$  lösen können.  $\tilde{Q}_T^n$  wollen wir monotonen symmetrischen Travelling Salesman Polytopen nennen. Allgemeine Beziehungen zwischen einem Polytopen (wie etwa  $Q_T^n$ ) und seiner Monotonisierung ( $\tilde{Q}_T^n$ ) sind bereits in § 6, speziell Satz 6.6, untersucht worden.

Wie aus dem vorhergehenden ersichtlich ist, stehen die Polytope  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  in einer besonderen Beziehung zum STSP, da symmetrische Travelling Salesman Probleme als lineare Programme über ihnen gelöst werden können. Da wir anstreben, das STSP mit Verfahren der linearen Programmierung anzugehen, ist die Kenntnis von vollständigen oder "möglichst guten" nicht redundanten Systemen von Gleichungen und Ungleichungen notwendig, die  $Q_T^n$  bzw.  $\tilde{Q}_T^n$  beschreiben. Die Bestimmung einer "guten" linearen Charakterisierung von  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  ist das Ziel des zweiten Teils dieser Arbeit.

Zunächst wollen wir uns jedoch Problemen zuwenden, die mit dem STSP "verwandt" sind und den Vorzug haben, daß für sie polynombeschränkte Algorithmen zur Verfügung stehen und daß eine vollständige nicht redundante lineare Beschreibung der zugehörigen Polytope bekannt ist; später werden wir dann untersuchen, welche Eigenschaften dieser Polytope sich auf die Travelling Salesman Polytope  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  "vererben".

Kapitel 5. Das Spanning Tree Problem

Sei  $G = [V, E]$  ein Graph, und für jede Kante  $e \in E$  sei ein Gewicht  $c_e$  gegeben. Das (Optimum) Spanning Tree Problem ist die Aufgabe, einen spannenden Baum  $[V, T]$ ,  $T \subset E$ , zu finden, so daß die Summe der Kantengewichte  $\sum_{e \in T} c_e$  maximal oder minimal ist. Ist nur nach einem Wald  $[V, T]$  mit dieser Eigenschaft gefragt, so heißt das Problem (Optimum) Forest Problem. Ist der zugrunde liegende Graph  $G$  nicht zusammenhängend, so besitzt er natürlich keinen spannenden Baum. Nennen wir jedoch auch solche (maximalen) Wälder, die in jeder Zusammenhangskomponente von  $G$  einen spannenden Baum definieren, spannende Bäume, so ist mit dieser Erweiterung des Begriffes das Spanning Tree Problem auch auf nicht zusammenhängenden Graphen wohldefiniert. Aus naheliegenden Gründen wollen wir annehmen, daß  $E \neq \emptyset$  gilt.

Bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}^F$  die Menge aller Wälder in  $G = [V, E]$ , d.h.

$$\mathcal{T}^F := \{F \subset E \mid [V, F] \text{ ist Wald in } G\},$$

so ist  $\mathcal{T}^F$ , da jeder Untergraph eines Waldes wiederum ein Wald ist, ein Unabhängigkeitssystem. Ist  $[V, E']$  ein Untergraph von  $G$ , und sind  $[V_i, E_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$ , die Komponenten von  $[V, E']$ , so enthalten bekanntlich je zwei spannende Bäume  $[V_i, T_i]$  einer der Komponenten die gleiche Anzahl von Kanten, daraus folgt sofort, daß  $M^F = (E, \mathcal{T}^F)$  ein Matroid, der sogenannte Forest Matroid oder graphische Matroid, ist. Die Basen von  $E$  in  $M^F$  sind gerade die spannenden Bäume (im erweiterten Sinne) von  $G$ . Die Zirkuits von  $M^F$  entsprechen offensichtlich den Zyklen in  $G$ .

Ist  $F \subset E$  und sind  $[V_i, F_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$ , die Komponenten von  $[V(F), F]$ , so ist unmittelbar einsichtig, daß die Rangfunktion  $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$  von  $M^F$  gegeben ist durch

$$r(F) = \sum_{i=1}^k (|V_i| - 1).$$

Da wir keine einelementigen Kanten (Schlingen) zulassen, gilt  $r(\{e\}) = 1$  für jede Kante  $e \in E$ , d.h.  $M^F$  ist normal.

Wie üblich können wir jedem Wald  $F \in \mathcal{T}^F$  einen Inzidenzvektor  $x^F \in \mathbb{R}^{|E|}$  zuordnen. Für einen Graphen  $G = [V, E]$ ,  $|V| = n$ , heißen dann die Polytope

$$\begin{aligned} Q_{ST}^n &:= \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^{|E|} \mid [V, T] \text{ spannender Baum von } G\} \\ &= \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^{|E|} \mid T \text{ Basis von } E \text{ in } \mathcal{T}^F\}, \\ \tilde{Q}_{ST}^n &:= \text{conv} \{x^F \in \mathbb{R}^{|E|} \mid [V, F] \text{ Wald von } G\} \\ &= \text{conv} \{x^F \in \mathbb{R}^{|E|} \mid F \in \mathcal{T}^F\} \end{aligned}$$

Spanning Tree Polytop bzw. Forest Polytop. Eine vollständige und nicht redundante lineare Charakterisierung von  $\tilde{Q}_{ST}^n$  und  $Q_{ST}^n$  erfolgt in den nächsten beiden Paragraphen.

§ 10. Der Forest Polytop

Da der Forest Polytop  $\tilde{Q}_{ST}^n$  ein Matroid Polytop ist, ist mit Satz 8.5 eine vollständige und nicht redundante lineare Beschreibung von  $\tilde{Q}_{ST}^n$  bekannt. Es gilt

$$\tilde{Q}_{ST}^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \quad \sum_{e \in F} x_e \leq r(F) \quad \forall F \subset E, F \text{ abgeschlossen und inseparabel bezüglich } (E, \mathcal{A}^F)\}.$$

Wir wollen nun die abgeschlossenen und inseparablen Elemente des graphischen Matroiden bestimmen.

Satz 10.1.

Sei  $G = [V, E]$  ein Graph und  $M^F = (E, \mathcal{A}^F)$  der zugehörige graphische Matroid.

Dann gilt:

$F \subset E$  ist inseparabel bezüglich  $M^F \iff$  Der Untergraph  $[V(F), F]$  ist zweifach zusammenhängend.

Beweis:

Nach Folgerung 7.3 ist  $F \subset E$  genau dann inseparabel, wenn je zwei Elemente von  $F$  auf einem gemeinsamen Zirkuit  $Z \subset F$  liegen. In der Sprache der Graphen heißt das, daß je zwei Kanten von  $F$  auf einem gemeinsamen Zyklus  $Z \subset F$  liegen, was bekanntlich äquivalent dazu ist, daß  $[V(F), F]$  zweifach zusammenhängend ist.  $\square$

Satz 10.2.

Sei  $G = [V, E]$  ein Graph,  $M^F = (E, \mathcal{A}^F)$  der zugehörige graphische Matroid. Sei  $F \subset E$ , und  $G_i = [V_i, F_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$ , seien die Zusammenhangskomponenten von  $[V(F), F]$ . Dann gilt:

$F$  ist abgeschlossen bezüglich  $M^F \iff F_i = E(V_i)$  für  $i = 1, \dots, k$ .

Beweis:

Definitionsgemäß ist  $r(F)$  gleich der Anzahl der Knoten von  $V(F)$  minus der Anzahl der Komponenten  $k$  von  $[V(F), F]$ , d.h.  $r(F) = |V(F)| - k = \sum_{i=1}^k (|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^k r(F_i)$ .

Sei  $e \in E - F$  und  $K = \{1, \dots, k\}$ .

Ist  $|e \cap V_i| = 2$  für ein  $i \in K$ , dann ist  $V(F_i \cup \{e\}) = V_i$ , d.h.  $r(F_i) = r(F_i \cup \{e\})$ , also gilt  $e \in \text{cl}(F)$ .

Gibt es  $i, j \in K$ ,  $i \neq j$ , mit  $|e \cap V_i| = 1$ ,  $|e \cap V_j| = 1$ , dann ist  $[V_i \cup V_j, F_i \cup F_j \cup \{e\}]$  eine Komponente von  $[V(F), F \cup \{e\}]$ , d.h.  $r(F) < r(F \cup \{e\})$ .

Ist  $|e \cap V_i| = 1$  für genau ein  $i \in K$ , so ist  $r(F_i \cup \{e\}) = |V_i \cup e| = |V_i| + 1$ , also  $r(F) < r(F \cup \{e\})$ .

Ist  $|e \cap V_i| = 0$  für alle  $i \in K$ , so ist offensichtlich  $e \notin \text{cl}(F)$ .

$F$  ist mithin genau dann abgeschlossen, wenn  $F_i = E(V_i) \quad \forall i \in K$  gilt, d.h. wenn jede Komponente ein knoteninduzierter Untergraph ist.  $\square$

Satz 10.3.

Sei  $G = [V, E]$  ein Graph und  $M^F = (E, \mathcal{F}^F)$  der Forest Matroid auf  $G$ . Sei  $\mathcal{L}$  die Menge der zweifach zusammenhängenden knoteninduzierten Untergraphen von  $G$ , dann gilt für den Forest Polytopen

$$\tilde{Q}_{ST}^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \quad \sum_{e \in F} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall [W, F] \in \mathcal{L}\}.$$

Diese Darstellung ist vollständig und nicht redundant.

Beweis:

Folgt aus Satz 8.5 und den beiden vorhergehenden Sätzen.  $\square$

Folgerung 10.4.

Ist  $G = [V, E]$  vollständig, dann gilt

$$\tilde{Q}_{ST}^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \quad \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \subset V, 2 \leq |W| \leq |V|\}.$$

Diese lineare Charakterisierung ist vollständig und nicht redundant.  $\square$

§ 11. Der Spanning Tree Polytop

Mit Hilfe von Folgerung 9.4 (c) können wir die Dimension des Spanning Tree Polytopen berechnen. Es gilt

Satz 11.1.

Sei  $G = [V, E]$  ein Graph und  $\beta$  die Anzahl der Blöcke von  $G$ . Dann gilt

$$\dim Q_{ST}^n = |E| - \beta.$$

1. Beweis:

Die Blöcke, das sind die zweifach zusammenhängenden Komponenten eines Graphen, entsprechen gerade den Elementen der minimalen Separation der Grundmenge  $E$  des graphischen Matroiden.  $\square$

Der Beweis von Satz 9.3 ist eine Verallgemeinerung eines früheren Beweises für den obigen Satz und konnte fast "wörtlich" auf Matroid Polytope übertragen werden.

Ein anderer Beweis, der nur graphentheoretisch und linear algebraisch argumentiert, kann folgendermaßen geführt werden.

## 2. Beweis:

Wir beweisen durch Induktion über  $|E|$ .

Für  $|E| = 1$  ist der Satz trivial.

Ist der Satz für  $|E| = m$  bewiesen, so ist zu zeigen, daß er auch für  $|E| = m + 1$  gilt.

1. Fall: Es gibt eine Kante  $e \in E$ , so daß  $G-e$  dieselbe Anzahl von Blöcken wie  $G$  hat. Zu den linear unabhängigen spannenden Bäumen von  $G-e$  (im erweiterten Sinne) kann man dann einen spannenden Baum von  $G$  hinzufügen, der  $e$  enthält, und erhält  $|E| - \beta + 1$  linear unabhängige spannende Bäume.

2. Fall: Ein Endblock von  $G$ , das ist ein Block, der mit genau einem anderen Block einen gemeinsamen Knoten hat, enthalte nur zwei Knoten; analog zu Fall 1.

3. Fall: Alle Blöcke von  $G$  sind minimal und haben mindestens 3 Knoten. Dabei heißt ein Block minimal, wenn die Entfernung irgendeiner Kante aus dem Block den zweifachen Zusammenhang zerstört. Nach einem Satz von Plummer [1968] enthalten solche Blöcke mindestens zwei Knoten mit dem Grad 2. Sei  $v$  ein solcher Knoten, und seien  $\{u,v\}$ ,  $\{v,w\}$  die Kanten, die  $v$  enthalten, dann ersetze man diese Kanten durch die Kante  $\{u,w\}$ . Der neue Graph  $G'$  hat dieselbe Anzahl von Blöcken und eine Kante weniger. Wir benutzen die Induktionsvoraussetzung, erweitern die  $m$  spannenden Bäume von  $G'$  zu spannenden Bäumen von  $G$ , definieren einen neuen linear unabhängigen spannenden Baum und erhalten die Behauptung.  $\square$

Ein ähnlicher Beweis wird später ausführlicher für die Facetten des Branching Polytopen gegeben (siehe Satz 29.3).

Desgleichen lassen sich nun durch Anwendung der Ergebnisse der Matroid Theorie die Facetten von  $Q_{ST}^n$  bestimmen. Ist  $G = [V,E]$  ein Graph, dann sei  $\mathcal{L}$  die Menge der knoteninduzierten zweifach-zusammenhängenden Untergraphen von  $G$ , die keine Blöcke sind.  $B_1, \dots, B_\beta$  seien die Blöcke von  $G$ . Ist  $F \subset E$ ,  $\bar{F} = E - F$ , dann entsteht der Kontraktionsgraph  $G \cdot \bar{F}$  aus  $G$  dadurch, daß man die Knoten aus  $V(F)$  miteinander identifiziert und die Kantenmenge  $F$  aus  $E$  entfernt. Dabei treten, falls  $F \neq E(V(F))$  ist, Schlingen auf. Es gilt nun

Satz 11.2.

Sei  $G = [V, E]$  ein Graph. Dann ist eine vollständige nicht redundante lineare Beschreibung des Spanning Tree Polytopen  $Q_{ST}^n$  gegeben durch

- (1)  $\sum_{e \in E_i} x_e = |V_i| - 1$  für alle Blöcke  $B_i = [V_i, E_i]$ ,  $i = 1, \dots, \beta$ .
- (2)  $\sum_{e \in F} x_e \leq |W| - 1$  für alle  $[W, F] \in \mathcal{L}$ , so daß  $G \cdot \bar{F}$  genau  $\beta$  Blöcke besitzt.
- (3)  $x_e \geq 0$  für alle  $e \in E$  mit:  $G \cdot e$  enthält genau  $\beta$  Blöcke.

Beweis:

Da die Kantenmengen  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, \beta$ , der Blöcke von  $G$  gerade die minimale Separation von  $E$  im graphischen Matroiden definieren und die Wälder des Kontraktionsgraphen  $G \cdot \bar{F}$  das Unabhängigkeitssystem des Kontraktionsmatroiden  $M \cdot \bar{F}$  des graphischen Matroiden bilden, folgt die Behauptung aus Satz 9.9.  $\square$

Folgerung 11.3.

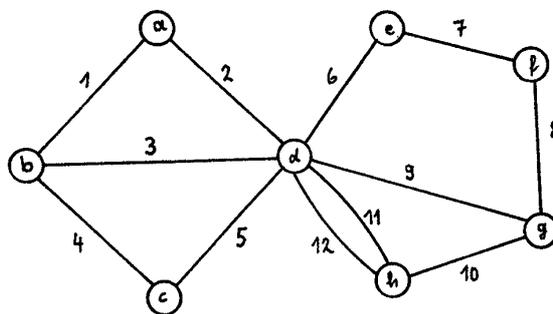
Ist  $G = [V, E]$  vollständig, dann gilt

- $$Q_{ST}^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \begin{array}{l} (1) \sum_{e \in E} x_e = n - 1, \\ (2) \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \subset V, 2 \leq |W| < |V|, \\ (3) x_e \geq 0 \quad \forall e \in E. \end{array} \right.$$

Diese lineare Charakterisierung ist vollständig und nicht redundant.  $\square$

Beispiel 11.4.

Gegeben sei folgender Graph  $G = [V, E]$



Die folgenden Kantenmengen sind die Kantenmengen der knoteninduzierten zweifach zusammenhängenden Untergraphen von  $G$ .

- $\{i\}, i = 1, \dots, 10, \{11, 12\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\},$   
 $\{9, 10, 11, 12\}, \{6, 7, 8, 9\}, \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$

Daraus ergibt sich folgende nicht redundante Beschreibung des Forest Polytopen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
(1)	1												< 1
(2)		1											.
(3)			1										.
(4)				1									.
(5)					1								
(6)						1							
(7)							1						
(8)								1					
(9)									1				
(10)										1			
(11)											1	1	< 1
(12)	1	1	1										< 2
(13)			1	1	1								< 2
(14)									1	1	1	1	< 2
(15)	1	1	1	1	1								< 3
(16)						1	1	1	1				< 3
(17)						1	1	1	1	1	1	1	< 4

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 12.$$

Eine nicht redundante vollständige Beschreibung des Spanning Tree Polytopen erhält man wie folgt:

Wir fordern Gleichheit in den Ungleichungen (15) und (17) (diese werden von den Blöcken von G induziert) und entfernen die Ungleichungen (3), (9). Desgleichen streichen wir die Ungleichungen  $x_i \geq 0$  für  $i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10$ .  $\square$

### Kapitel 6. Das 2-Matching Problem

Eine Kantenmenge  $M$  in einem Graphen  $G = [V, E]$  heißt 1-Matching oder kurz Matching, wenn jeder Knoten  $v \in V$  auf höchstens einer Kante aus  $M$  liegt. Ein Matching  $M$  heißt perfekt, wenn jeder Knoten von  $G$  auf genau einer Kante aus  $M$  liegt. Geben wir zu jedem Knoten  $v \in V$  eine nicht-negative ganze Zahl  $b_v$ ,  $b = (b_1, \dots, b_{|V|})$ , vor, so heißt  $M \subseteq E$  ein b-Matching (bzw. perfektes b-Matching), wenn jeder Knoten  $v \in V$  auf höchstens (bzw. genau)  $b_v$  Kanten aus  $M$  liegt. Speziell interessiert uns das gewichtete 2-Matching Problem, bei dem ein Graph  $G = [V, E]$  mit Kantengewichten  $c_e, e \in E$ , gegeben ist und wo nach einer optimalen Kantenmenge gefragt ist, die die Eigenschaft hat, daß jeder Knoten auf höchstens zwei Kanten liegt.

## § 12. Verschiedene Matching Polytope

In der Literatur führen verschiedene Polytope den Namen Matching bzw. b-Matching Polytop. Eine (unseres Wissens) vollständige Liste ist die folgende, wobei  $G = [V, E]$  ein vorgegebener Graph und  $x^M$  der Kanten-Inzidenzvektor des Untergraphen  $M$  von  $G$  sei.

$$Q_1 = \text{conv} \{x^M \in \mathbb{R}^{|E|} \mid M \text{ Matching in } G\},$$

$$Q_2 = \text{conv} \{x^M \in \mathbb{R}^{|E|} \mid M \text{ perfektes Matching in } G\},$$

$$Q_3 = \text{conv} \{x^M \in \mathbb{R}^{|E|} \mid M \text{ b-Matching in } G\},$$

$$Q_4 = \text{conv} \{x^M \in \mathbb{R}^{|E|} \mid M \text{ perfektes b-Matching in } G\},$$

$$Q_5 = \text{conv} \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ \sum_{e \in \omega(i)} x_e \leq b_i \quad \forall i \in V, \\ x_e \in \mathbb{N} \quad \forall e \in E\},$$

$$Q_6 = \text{conv} \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid 0 \leq x_e \leq a_e \quad \forall e \in E, \\ \sum_{e \in \omega(i)} x_e = b_i \quad \forall i \in V, \\ x_e \in \mathbb{N} \quad \forall e \in E\}.$$

Vollständige Beschreibungen von  $Q_1$  und  $Q_3$  finden sich in [Edmonds, 1965] und damit natürlich auch vollständige Charakterisierungen von  $Q_2$  und  $Q_4$ . Eine vollständige Charakterisierung von  $Q_6$  ist in [Edmonds, Johnson, 1970] angegeben. Der Polytop  $Q_5$  wird in [Edmonds, 1967] vollständig beschrieben. In [Pulleyblank, 1973] sind alle Facetten von  $Q_5$  bestimmt worden und damit eine nicht redundante Beschreibung von  $Q_5$ .

Mit Hilfe eines hübschen Tricks (a well-known secret of Jack Edmonds (persönliches Gespräch)) kann man erzwingen, daß die Komponenten aller Lösungsvektoren eines Optimierungsproblems über  $Q_5$  nur Werte aus  $\{0, 1\}$  annehmen, also Inzidenzvektoren von b-Matchings werden. Man ersetzt jede Kante  $\{i, j\}$  durch drei neue Kanten  $\{i, v_i\}$ ,  $\{v_i, v_j\}$ ,  $\{v_j, j\}$  mit 2 neuen Knoten  $v_i, v_j$  und definiert  $b_{v_i} := b_{v_j} := 1$ ,  $c'_{iv_i} := c_{ij}$ ,  $c'_{v_i v_j} := c'_{v_j j} := 0$ . Alle Lösungen dieses neuen Problems liegen dann im Einheitswürfel.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit für drei spezielle Polytope, die im weiteren von Bedeutung sind, und verzichten auf eine Charakterisierung der Facetten für den Fall eines beliebigen Graphen, da das zu viel Aufwand erfordern

würde. Sei  $K_n = [V, E]$  der vollständige Graph mit  $n$  Knoten, dann definieren wir

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{2M}^n &:= \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid (1) x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ &\quad (2) x_e \leq 1 \quad \forall e \in E, \\ &\quad (3) \sum_{e \in \omega(i)} x_e = 2 \quad \forall i \in V\}, \end{aligned}$$

für die Bedingungen (3) schreiben wir kurz  $Ax = 2$ ,

$$Q_{2M}^n := \text{conv} \{x^M \in \mathbb{R}^{|E|} \mid M \text{ ist perfektes 2-Matching in } K_n\},$$

$$\tilde{Q}_{2M}^n := \text{conv} \{x^M \in \mathbb{R}^{|E|} \mid M \text{ ist 2-Matching in } K_n\}.$$

$Q_{2M}^n$  heißt 2-Matching Polytop,  $\tilde{Q}_{2M}^n$  monotoner 2-Matching Polytop.

Offensichtlich ist  $\tilde{Q}_{2M}^n$  die Monotonisierung von  $Q_{2M}^n$ , was allerdings nur in diesem speziellen Falle eines vollständigen Graphen richtig ist. Außerdem ist  $Q_{2M}^n \subset \tilde{Q}_{2M}^n$ , und in gewissem Sinne ist  $\tilde{Q}_{2M}^n$  die größte "vernünftige" Relaxation von  $Q_{2M}^n$ .

### § 13. Die gebrochenen Ecken von $\tilde{Q}_{2M}^n$

Läßt man im Restriktionensystem von  $\tilde{Q}_{2M}^n$  die Bedingung (2)  $x_e \leq 1 \quad \forall e \in E$  fallen, so entnimmt man den Resultaten von Edmonds und Johnson [1970] leicht, daß der daraus resultierende Polytop nur ganzzahlige Ecken hat. Schneidet man den so definierten Polytopen jedoch mit dem Einheitswürfel, d.h. fügt man die Ungleichungen (2) hinzu, so entstehen "gebrochene" Ecken. Diese wollen wir im folgenden charakterisieren. Dazu definieren wir zu jeder Ecke  $x$  von  $\tilde{Q}_{2M}^n$  die Kantenmenge  $F_x := \{e \in E \mid 0 < x_e < 1\}$ , also die zu nicht-ganzzahligen (und damit gebrochenen) Komponenten von  $x$  gehörigen Kanten.

#### Satz 13.1.

Sei  $x$  Ecke von  $\tilde{Q}_{2M}^n$ , dann gilt:

$x$  enthält nicht-ganzzahlige Komponenten  $\iff F_x$  besteht aus knotendisjunkten Zyklen ungerader Länge.

#### Beweis:

Es ist  $\tilde{Q}_{2M}^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid 0 \leq x_e \leq 1, Ax = 2\}$ .

" $\implies$ ": Sei  $A'$  die Untermatrix von  $A$ , die von den Spalten gebildet wird, die zu gebrochenen Komponenten von  $x$  gehören und aus der alle Null-Zeilen entfernt worden sind.  $A'$  möge  $q$  Zeilen und  $p$  Spalten enthalten.

Da  $x$  Ecke ist, sind die Spalten von  $A'$  linear unabhängig, also  $q \geq p$ . Jede Spalte von  $A'$  enthält nach Definition genau zwei Einsen und sonst Nullen. Es folgt daraus, daß  $A'$  genau  $2p$  Einselemente enthält. Andererseits muß jede der  $q$  Zeilen von  $A'$  mindestens 2 Einsen enthalten, da die Summe der gebrochenen Komponenten, um die Gleichheitsrestriktionen zu erfüllen, 1 oder 2 sein muß. Also ist  $2p \geq 2q$ , und wegen  $q \geq p$  gilt damit  $p = q$ .

Mithin ist  $A'$  eine quadratische reguläre Matrix, die in jeder Zeile und Spalte genau zwei Einsen enthält. Eine solche Matrix ist die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix von Zyklen ungerader Länge (die Inzidenzmatrizen von Zyklen gerader Länge sind nicht regulär). Es ist also (nach geeigneter Umordnung):

$$A' = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_k \end{pmatrix},$$

wobei jede Matrix  $C_i$  die Inzidenzmatrix eines Zyklus ungerader Länge ist. Da die beiden Einselemente jeder Zeile zu genau einer Matrix  $C_i$  gehören, kann kein Knoten in zwei verschiedenen Zyklen enthalten sein.

" $\Leftarrow$ ": Trivial.  $\square$

Bemerkung 13.2.

(a) Jede ganzzahlige Ecke von  $\bar{Q}_{2M}^n$  ist Inzidenzvektor eines perfekten 2-Matchings in  $K_n$ .

(b) Ist  $x$  gebrochene Ecke von  $\bar{Q}_{2M}^n$ , dann gilt für die Komponenten von  $x$ :

$$x_e \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \quad \forall e \in E.$$

Beweis:

(a) Offensichtlich.

(b) Da nach Satz 13.1 jeder Knoten auf höchstens einem "gebrochenen Zyklus" liegt, muß es wegen der Bedingungen  $Ax = 2$  zu jedem Knoten  $v \in V$  mindestens eine Kante  $e_v \in \omega(v)$  geben mit  $x_{e_v} = 1$ . Ist  $e_1, \dots, e_{2k+1}$  die Kantenmenge eines Zyklus in  $F_x$ , so folgt daraus, daß  $x_{e_i} + x_{e_{i+1}} = 1$ ,  $i = 1, \dots, 2k$  und  $x_{e_1} + x_{e_{2k+1}} = 1$  gelten muß. Die eindeutig bestimmte Lösung dieses Gleichungssystems ist  $x_{e_i} = \frac{1}{2}$ ,  $i = 1, \dots, 2k+1$ .  $\square$

§ 14. Die Facettialstruktur des monotonen 2-Matching Polytopen

Nach [Edmonds, 1965] gilt für den monotonen 2-Matching Polytopen bezüglich eines beliebigen Graphen  $G = [V, E]$ :

$$\tilde{Q}_{2M}^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \begin{aligned} (1) & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ (2) & x_e \leq 1 \quad \forall e \in E, \\ (3) & \sum_{e \in \omega(v)} x_e \leq 2 \quad \forall v \in V, \\ (4) & \sum_{e \in C} x_e \leq s(C) \quad \forall C \subset E, \end{aligned}$$

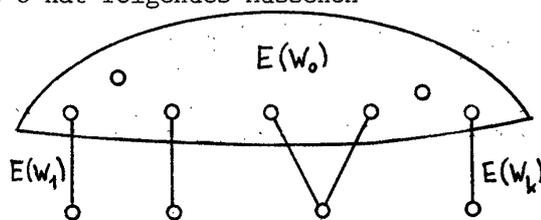
wobei die sogenannten 2-Matching Ungleichungen (4) - bei etwas anderer Notationsweise als der Edmonds'schen - wie folgt definiert sind:

Seien  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$  und gelte

- (a)  $|W_0 \cap W_i| = 1, \quad i = 1, \dots, k,$
- (b)  $|W_i| = 2, \quad i = 1, \dots, k,$
- (d)  $k \geq 1$  und ungerade,

dann ist  $C := \bigcup_{i=0}^k E(W_i)$  und  $s(C) := |W_0| + \frac{k-1}{2}$ .

Die Kantenmenge  $C$  hat folgendes Aussehen



Im Falle eines beliebigen Graphen sind einige der Restriktionen (2), (3) und "sehr viele" der 2-Matching Ungleichungen redundant bezüglich  $\tilde{Q}_{2M}^n$ . Wie wir sehen werden, sind im Falle des hier behandelten vollständigen Graphen  $K_n$  alle Ungleichungen (2), (3) und "fast alle" 2-Matching Ungleichungen (4) Facetten von  $\tilde{Q}_{2M}^n$ .

Satz 14.1.

Die Ungleichungen

- (1)  $x_e \geq 0,$
- (2)  $x_e \leq 1$

definieren für alle  $e \in E$  Facetten von  $\tilde{Q}_{2M}^n$ , falls  $n \geq 2$ .

Beweis:

Da  $\tilde{Q}_{2M}^n$  monoton ist, folgt (1) aus Satz 6.2 (a).

Die Inzidenzvektoren von  $\{e\}$  und  $\{e,f\}$  für alle  $f \in E - \{e\}$  erfüllen  $x_e \leq 1$  mit Gleichheit und sind linear unabhängig, somit definiert  $x_e \leq 1$  eine Facette von  $\tilde{Q}_{2M}^n$ .  $\square$

Satz 14.2.

Sei  $n \geq 4$ . Dann definiert für jeden Knoten  $i \in V$  die Ungleichung

$$\sum_{e \in \omega(i)} x_e \leq 2$$

eine Facette von  $\tilde{Q}_{2M}^n$ .

Beweis:

Seien  $e_1, e_2, e_3 \in \omega(i)$ , dann sind die Inzidenzvektoren des 2-Matchings  $\{e_1, e_2\}$ ,  $\{e_1, e_3\}$ ,  $\{e_2, e_3\}$  linear unabhängig. Davon unabhängig sind die Inzidenzvektoren der 2-Matchings  $\{e_1, f\}$ , falls  $f \in \omega(i) - \{e_1, e_2, e_3\}$ , bzw.  $\{e_1, e_2, f\}$ , falls  $f \notin \omega(i)$ . Damit sind  $|E|$  linear unabhängige Vektoren aus  $\tilde{Q}_{2M}^n$  gefunden, die

$\sum_{e \in \omega(i)} x_e \leq 2$  mit Gleichheit erfüllen.  $\square$

Mit Hilfe von Satz 4.5 - siehe auch die anschließenden Bemerkungen - wollen wir nun untersuchen, welche der 2-Matching Ungleichungen bezüglich  $\tilde{Q}_{2M}^n$  redundant sind.

Satz 14.3.

In jedem der folgenden Fälle sind die 2-Matching Ungleichungen redundant:

(a)  $|W_0| \leq 2$ ,

(b)  $\exists i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$  mit  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ ,

(c)  $|W_0| = 3$  und  $k = 1$ .

Beweis:

(a)  $a_1$ )  $W_0 = \{w\}$ . Falls  $k = 1$ , dann hat die 2-Matching Ungleichung die Form  $x_e \leq 1$ , ist also eine triviale Ungleichung, falls  $k \geq 3$ , dann wird sie dominiert von  $\sum_{e \in \omega(w)} x_e \leq 2$ .

$a_2$ )  $|W_0| = 2$ . Falls  $k = 1$ , dann hat die 2-Matching Ungleichung die Form  $x_e + x_f \leq 2$ , ist also dominiert.

Falls  $k = 3$ , dann gibt es einen Knoten  $w \in W_0$ , der in mindestens zwei der Mengen  $W_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , enthalten ist. Seien  $w \in W_1 \cap W_2 \cap W_0$ ,

$W_3 = \{u, v\}$ ,  $v \in W_0$ , dann gilt

$$\sum_{e \in C} x_e \leq \sum_{e \in \omega(w)} x_e + x_{uv} \leq 3 = s(C).$$

Falls  $k \geq 5$  und  $W_0 = \{v, w\}$ , dann gilt offensichtlich

$$\sum_{e \in C} x_e \leq \sum_{e \in \omega(w)} x_e + \sum_{e \in \omega(v)} x_e \leq 4 \leq s(C).$$

In jedem Fall ist also die 2-Matching Ungleichung redundant.

(b) Sei o.B.d.A.  $W_k \cap W_{k-1} \neq \emptyset$ , und sei  $v \in W_k \cap W_{k-1}$ .

Sei  $v \notin W_0$ . Wir definieren  $W'_0 := W_0 \cup W_k \cup W_{k-1}$  und  $C' := \bigcup_{i=1}^{k-2} E(W_i) \cup E(W'_0)$ , dann gilt

$$\sum_{e \in C} x_e \leq \sum_{e \in C'} x_e \leq |W_0| + 1 + \frac{k-3}{2} = s(C') = s(C).$$

Sei  $v \in W_k \cap W_{k-1} \cap W_0$ . Definieren wir  $W'_0 := W_0 - \{v\}$ , dann gilt für

$$C' := \bigcup_{i=1}^{k-2} E(W_i) \cup E(W'_0):$$

$$\sum_{e \in C} x_e \leq \sum_{e \in C'} x_e + \sum_{e \in \omega(v)} x_e \leq |W_0| - 1 + \frac{k-3}{2} + 2 = s(C).$$

Also wird die 2-Matching Ungleichung in beiden Fällen dominiert.

(c) Sei o.B.d.A.  $W_0 = \{1, 2, 3\}$ ,  $W_1 = \{1, 4\}$ , dann gilt

$$\sum_{e \in C} x_e \leq \sum_{e \in \omega(1)} x_e + x_{23} \leq 2 + 1 = s(C).$$

Die 2-Matching Ungleichung wird dominiert von der Summe zweier gültiger Ungleichungen des Typs (1) und (2), ist also nach Satz 4.5 redundant.  $\square$

Die in Satz 14.3 angegebenen 2-Matching Ungleichungen definieren also entweder keine Facetten von  $\tilde{Q}_{2M}^n$  oder sind Ungleichungen des Typs (2) bzw. (3). Entfernen wir aus der Menge der 2-Matching Ungleichungen alle diejenigen Ungleichungen, die auch Ungleichungen des Typs (2) und (3) sind - diese haben wir ja bereits untersucht -, dann können wir zeigen:

Satz 14.4.

Sei  $n \geq 4$ .

Eine 2-Matching Ungleichung  $\sum_{e \in C} x_e \leq s(C)$  definiert eine Facette von  $\tilde{Q}_{2M}^n$  genau dann, wenn für  $W_0, \dots, W_k \subset V$  mit  $C = \bigcup_{i=0}^k E(W_i)$  gilt

- (a)  $|W_0 \cap W_i| = 1$  ,  $i = 1, \dots, k$ ,
- (b)  $|W_i| = 2$  ,  $i = 1, \dots, k$ ,
- (c)  $W_i \cap W_j = \emptyset$  ,  $1 \leq i < j \leq k$
- (d)  $(d_1)$   $k \geq 3$  und ungerade  
oder  
 $(d_2)$   $k = 1$  und  $|W_0| \geq 4$ .

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Erfüllt C nicht die Bedingungen (a) bis (d), so kann die 2-Matching Ungleichung nach Satz 14.3 keine Facette sein.

" $\Leftarrow$ ": Sei  $ax := \sum_{e \in C} x_e \leq s(C) =: a_0$  eine 2-Matching Ungleichung, für die die Bedingungen (a) bis (d) erfüllt sind. Sei  $H_a := \{x \in \tilde{Q}_{2M}^n \mid ax = a_0\}$  und  $bx = b_0$  eine beliebige Hyperebene mit  $H_a \subset \{x \mid bx = b_0\}$ .

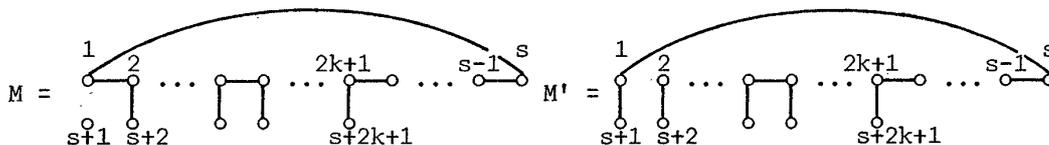
Wir zeigen  $b = \alpha a$ , woraus mit Satz 4.4 die Behauptung folgt.

Sei o.B.d.A.  $W_0 = \{1, \dots, s\}$ ,  $Z := \bigcup_{i=1}^k E(W_i) = \{\{1, s+1\}, \{2, s+2\}, \dots, \{2k+1, s+2k+1\}\}$ , wobei  $2k+1 \leq s$  gilt. Sei

$$\alpha := b_{1, s+1}.$$

a) Sei  $k \geq 3$ .

Der Inzidenzvektor  $x^M$  des folgenden 2-Matchings M ist in der Seitenfläche  $H_a$  enthalten. M besteht aus den Kanten der Kette  $[2k+1, 2k+2, \dots, s, 1, 2]$ , den Kanten  $\{2i-1, 2i\}$ ,  $i = 2, \dots, k-1$ , und den Kanten  $Z - \{\{1, s+1\}\}$ , desgleichen gilt  $ax^{M'} = a_0$  für  $M' := (M - \{\{1, 2\}\}) \cup \{\{1, s+1\}\}$ .



Aus  $x^M, x^{M'} \in H_a$  folgt wegen  $H_a \subset \{x \mid bx = b_0\}$

$$0 = b_0 - b_0 = bx^M - bx^{M'} = b_{12} - b_{1, s+1} \text{ und somit } b_{12} = \alpha.$$

Da wir diese Konstruktion für jede Permutation der Knoten  $\{1, \dots, 2k+1\}$  durchführen können, erhalten wir analog

$$b_{1i} = \alpha \quad \forall i \in \{2, \dots, 2k+1\}.$$

Aus dieser Information schließen wir mit dem gleichen Verfahren

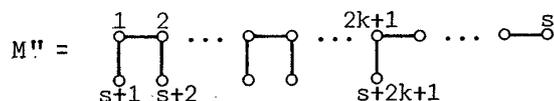
$$b_{i, s+i} = \alpha \quad \forall i \in \{1, \dots, 2k+1\}$$

und erhalten daraus wiederum

$$b_{ij} = \alpha \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 2k+1\}, i < j.$$

Ist  $s > 2k+1$ , so konstruieren wir aus  $M'$  ein 2-Matching  $M''$  wie folgt:

$$M'' := (M' - \{\{1, s\}\}) \cup \{\{1, 2\}\},$$



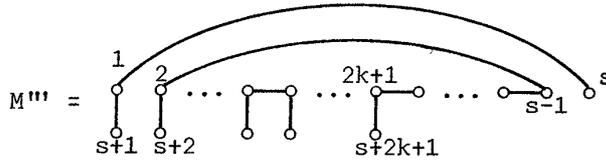
Offensichtlich gilt  $x^{M''} \in H_a$ , und wir erhalten wie oben  
 $0 = bx^{M''} - bx^{M'} = b_{12} - b_{1s}$ , d.h.  $b_{1s} = \alpha$ .

Durch Wiederholung dieser Konstruktion für jedes  $j \in \{2k+2, \dots, s\}$  und jedes  $i \in \{1, \dots, 2k+1\}$  ergibt sich

$$b_{ij} = \alpha \quad \forall i \in \{1, \dots, 2k+1\}, \forall j \in \{2k+2, \dots, s\}.$$

Ist  $s > 2k+2$ , dann sei  $M'''$  wie folgt definiert:

$$M''' := (M'' - \{\{s-1, s\}, \{1, 2\}\}) \cup \{\{1, s\}, \{2, s-1\}\}.$$



Offensichtlich ist  $x^{M'''} \in H_a$ , daher gilt

$$0 = bx^{M'''} - bx^{M''} = b_{1s} + b_{2, s-1} - b_{12} - b_{s-1, s} = \alpha + \alpha - \alpha - b_{s-1, s}.$$

Daraus folgt  $b_{s-1, s} = \alpha$ . Analog erhalten wir ebenso

$$b_{ij} = \alpha \quad \forall i, j \in \{2k+2, \dots, s\}, i < j.$$

Damit haben wir gezeigt:

$$b_e = \alpha = \alpha a_e \quad \forall e \in C.$$

Ist  $e \notin C$ , so sieht man ohne Schwierigkeiten, daß es ein 2-Matching  $M$  gibt mit  $x^M \in H_a$ , so daß  $M' := M \cup \{e\}$  ebenfalls ein 2-Matching ist; wegen  $e \notin C$  gilt  $x^{M'} \in H_a$ . Folglich ist  $0 = bx^{M'} - bx^M = b_e$  und damit

$$b_e = 0 = \alpha a_e \quad \forall e \notin C,$$

woraus  $b = \alpha a$  folgt, was zu zeigen war.

b)  $k = |Z| = 1, |W_0| \geq 4$ .

Sei wiederum  $W_0 = \{1, \dots, s\}, Z = E(W_1) = \{\{1, s+1\}\}, \alpha := b_{1, s+1}$ .

Jeder Hamilton-Zyklus  $\langle 1, i_2, i_3, \dots, i_s \rangle$  in  $[W_0, E(W_0)]$  erfüllt die 2-Matching Ungleichung mit Gleichheit, desgleichen die Kette

$$[s+1, 1, i_2, \dots, i_s].$$

Wie unter a) folgt

$$b_{1i} = \alpha, \quad \forall i = 2, \dots, s+1.$$

Sei  $\langle i_2, i_3, \dots, i_s \rangle$  ein Hamilton-Zyklus in  $[W_0 - \{1\}, E(W_0 - \{1\})]$  (ein solcher existiert nur, falls  $|W_0| \geq 4$ ); dieser Zyklus vereinigt mit der Kante  $\{1, s+1\}$  ist ein 2-Matching  $M$  und erfüllt  $ax^M = a_0$ . Sei  $M' := (M - \{\{i_2, i_3\}\}) \cup \{\{1, i_2\}\}$ , so gilt ebenfalls  $ax^{M'} = a_0$ , wie gehabt folgt  $b_{i_2 i_3} = \alpha$  und damit analog

$$b_{ij} = \alpha \quad \forall i, j \in \{2, \dots, s\}, i < j.$$

Es ergibt sich:  $b_e = \alpha \quad \forall e \in C$ .

Wie unter a) zeigen wir  $b_e = 0 \quad \forall e \notin C$ , und haben den Beweis erledigt.  $\square$

Bemerkung 14.5.

Für spätere Verwendung wollen wir festhalten, daß die in Teil a) des Beweises von Satz 14.4 konstruierten 2-Matchings keine Zyklen enthalten, folglich durch Hinzunahme geeigneter Kanten zu Hamilton-Zyklen von  $K_n$  ergänzt werden können, das heißt, jedes dieser 2-Matchings ist ein Element von  $\tilde{T}_n$ .  $\square$

Aus der vollständigen Beschreibung von  $\tilde{Q}_{2M}^n$  [Edmonds, 1965] und den Resultaten dieses Paragraphen folgt damit:

Satz 14.6.

Sei  $K_n = [V, E]$  der vollständige Graph auf  $n$  Knoten,  $n \geq 4$ , und  $\tilde{Q}_{2M}^n = \text{conv} \{x^M \in \mathbb{R}^{|E|} \mid M \text{ 2-Matching in } K_n\}$  der monotone 2-Matching Polytop auf  $K_n$ . Dann ist das folgende System von Ungleichungen eine vollständige und nicht redundante lineare Charakterisierung von  $\tilde{Q}_{2M}^n$ :

$$(1) \quad x_e \geq 0 \quad \forall e \in E,$$

$$(2) \quad x_e \leq 1 \quad \forall e \in E,$$

$$(3) \quad \sum_{e \in \omega(v)} x_e \leq 2 \quad \forall v \in V,$$

$$(4) \quad \sum_{e \in C} x_e = \sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \frac{k-1}{2} = s(C)$$

$$\forall W_0, W_1, \dots, W_k \subset V \text{ mit } C = \bigcup_{i=0}^k E(W_i), \text{ die}$$

$$(a) \quad |W_0 \cap W_i| = 1, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$(b) \quad |W_i| = 2, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$(c) \quad W_i \cap W_j = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq k,$$

$$(d) \quad (d_1) \quad k \geq 3 \text{ und ungerade}$$

oder

$$(d_2) \quad k = 1 \text{ und } |W_0| \geq 4$$

erfüllen.  $\square$

§ 15. Der 2-Matching Polytop

Da die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der perfekten 2-Matchings  $Q_{2M}^n$  eine Seitenfläche von  $\tilde{Q}_{2M}^n$  ist, ist mit einer Charakterisierung von  $\tilde{Q}_{2M}^n$  auch eine vollständige Beschreibung von  $Q_{2M}^n$  vorhanden. Mit Satz 14.6 gilt dann

$$Q_{2M}^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \begin{array}{l} (1) x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ (2) x_e \leq 1 \quad \forall e \in E, \\ (3') \sum_{e \in \omega(v)} x_e = 2 \quad \forall v \in V, \\ (4) \sum_{e \in C} x_e \leq s(C) \quad \text{für gewisse } C \in \mathcal{E} \}. \end{array}$$

Bezeichnen wir das Gleichungssystem (3') mit  $Ax = 2$ , so gilt

Lemma 15.1.

Ist  $A'$  die quadratische Untermatrix von  $A$ , die aus den Spalten  $e \in \omega(v)$  für ein  $v \in V$  und aus einer beliebigen weiteren Spalte  $f \in E - \omega(v)$  gebildet wird, dann ist  $A'$  regulär.

Beweis:

Nach geeigneter Umordnung hat  $A'$  die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & & & 0 \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die erste Spalte zu  $f$  und die erste Zeile zu  $v$  gehören.

Diese Matrix ist offensichtlich regulär.  $\square$

Lemma 15.1 besagt, daß die  $(|V|, |E|)$ -Matrix  $A$  sehr viele reguläre  $(|V|, |V|)$ -Untermatrizen enthält. In späteren Konstruktionen wird für uns die folgende Umformulierung von Lemma 15.1, die eine Aussage über die Lösbarkeit des Gleichungssystems  $\lambda A = b$  macht, von besonderer Bedeutung sein:

Folgerung 15.2.

Seien  $v \in V$  und  $f \in E - \omega(v)$  beliebig, sei  $F = \omega(v) \cup \{f\}$ , und sei  $\alpha_e \in \mathbb{R}$  für alle  $e \in F$  vorgegeben. Dann gibt es ein (eindeutig bestimmtes)  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , so daß für  $b := \lambda A$  gilt

$$b_e = \alpha_e \quad \forall e \in F. \quad \square$$

Darüberhinaus impliziert Lemma 15.1, daß  $Q_{2M}^n$  im Durchschnitt von  $n$  linear unabhängigen Hyperebenen enthalten ist, mithin gilt

Folgerung 15.3.

$$\dim Q_{2M}^n \leq |E| - |V|. \quad \square$$

Jede weitere Hyperebene, die  $Q_{2M}^n$  enthält, läßt sich als Linearkombination der  $n$  Hyperebenen  $\sum_{e \in \omega(v)} x_e = 2$  darstellen, das heißt daß in obiger Ungleichung sogar Gleichheit gilt.

Satz 15.4.

Sei  $n \geq 3$ , dann gilt

$$\dim Q_{2M}^n = |E| - |V|.$$

Beweis:

In Satz 17.3 werden wir zeigen, daß für  $Q_T^n := \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^{|E|} \mid T \text{ Hamilton-Zyklus}\}$  gilt:  $\dim Q_T^n = |E| - |V|$ . Aus  $Q_T^n \subset Q_{2M}^n$  und Folgerung 15.3 folgt die Behauptung.  $\square$

Lemma 15.5.

Seien durch  $W_0, W_1, \dots, W_k$  und  $W'_0, W'_1, \dots, W'_l$  zwei verschiedene 2-Matching Ungleichungen  $\sum_{e \in C} x_e \leq s(C)$  und  $\sum_{e \in C'} x_e \leq s(C')$  gegeben. Dann gilt:

Die beiden 2-Matching Ungleichungen sind äquivalent bezüglich  $Q_{2M}^n$  genau dann, wenn  $k = l$ ,  $W_i = W'_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , und  $W_0 = V - W'_0$  gilt.

Beweis:

" $\Leftarrow$ ":

$$2 \sum_{e \in C} x_e \leq 2(|W_0| + \frac{k-1}{2}) \iff$$

$$2 \sum_{e \in C} x_e + \sum_{v \in W'_0} \sum_{e \in \omega(v)} x_e \leq 2(|W_0| + \frac{k-1}{2} + |W'_0|) \iff$$

$$\sum_{v \in W_0} \sum_{e \in \omega(v)} x_e + 2 \sum_{e \in C'} x_e \leq 2(|W'_0| + \frac{k-1}{2} + |W_0|) \iff$$

$$2 \sum_{e \in C'} x_e \leq 2(|W'_0| + \frac{k-1}{2}).$$

" $\Rightarrow$ ":

Folgt aus der Beziehung  $\sum_{e \in C} x_e = \sum_{e \in C'} x_e + \lambda A$  durch Untersuchung verschiedener Fälle und einfaches Ausrechnen.  $\square$

Lemma 15.6.

2-Matching Ungleichungen  $\sum_{e \in C} x_e \leq s(C)$  mit  $|W_0| = n-3$  und  $k = 1$  sind bezüglich  $Q_{2M}^n$  redundant.

Beweis:

Sei  $W_0 = \{1, \dots, n-3\}$ ,  $W_1 = \{n-3, n-2\}$  und  $W'_0 := \{n-2, n-1, n\}$ ,  $C' := E(W'_0) \cup E(W_1)$ .

Nach Lemma 15.5 gilt  $\sum_{e \in C} x_e \leq s(C) = n-3 \iff \sum_{e \in C'} x_e \leq 3$ . Aus

$$\sum_{e \in C'} x_e \leq \sum_{e \in \omega(n-2)} x_e + x_{n-1, n} \leq 2 + 1 = 3 = s(C')$$

folgt mit Satz 4.5 die Behauptung.  $\square$

Satz 15.7.

Die Ungleichungen

$$(1) x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \text{ falls } n \geq 5,$$

$$(2) x_e \leq 1 \quad \forall e \in E, \text{ falls } n \geq 4,$$

definieren Facetten von  $Q_{2M}^n$ .

Beweis:

Folgt aus Satz 18.6 und Satz 18.5, da in den Beweisen dieser Sätze jeweils  $|E| - |V|$  Hamilton-Zyklen, also 2-Matchings, konstruiert werden, deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind und die Ungleichungen (1) bzw. (2) mit Gleichheit erfüllen.  $\square$

Lemma 15.8.

Sei  $n \geq 5$ , dann wird keine der 2-Matching Ungleichungen  $\sum_{e \in C} x_e \leq s(C)$  mit  $k = 1$  und  $|W_0| \leq 3$  bzw.  $|W_0| \geq n-3$  zu einer vollständigen Beschreibung von  $Q_{2M}^n$  benötigt.

Beweis:

Für  $|W_0| \leq 3$  folgt das aus Satz 14.3 (a) und (c), für  $|W_0| = n-3$  aus Lemma 15.6.

Ist  $|W_0| = n-2$ , so ist die 2-Matching Ungleichung nach Lemma 15.5 äquivalent zu einer 2-Matching Ungleichung mit  $|W'_0| = 2$ , also nach Satz 14.3 (a) redundant.

Falls  $|W_0| = n-1$ , so ist die 2-Matching Ungleichung äquivalent zu

$$\sum_{e \in E(W_1)} x_e = x_e \leq 1, \text{ braucht also wegen Satz 15.7 nicht berücksichtigt zu werden. } \square$$

Aufgrund der vorhergehenden Untersuchungen und Satz 14.6 wissen wir, daß die restlichen Facetten von  $Q_{2M}^n$  höchstens von den 2-Matching Ungleichungen definiert werden können, die durch folgende Kantenmengen induziert werden:

$$\mathcal{C} := \{C \subset E \mid C = \bigcup_{i=0}^k E(W_i) \text{ mit } W_0, W_1, \dots, W_k \subset V, \text{ so da\ss}\}$$

$$(a) |W_0 \cap W_i| = 1, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$(b) |W_i| = 2, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$(c) W_i \cap W_j = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq k,$$

$$(d) (d_1) k \geq 3 \text{ und ungerade}$$

oder

$$(d_2) k = 1 \text{ und } 4 \leq |W_0| \leq n-4.$$

Satz 15.9.

Jede 2-Matching Ungleichung  $\sum_{e \in C} x_e \leq s(C)$  mit  $C \in \mathcal{C}$  definiert eine Facette von  $Q_{2M}^n$ .

Beweis:

1) Im Falle  $k \geq 3$  zeigen wir in Satz 23.7, da\ss es  $|E| - |V|$  Hamilton-Zyklen in  $K_n$  gibt, deren Inzidenzvektoren linear unabh\u00e4ngig sind und die gegebene 2-Matching Ungleichung mit Gleichheit erf\u00fcllen. Da Hamilton-Zyklen 2-Matchings sind, folgt die Behauptung somit aus Satz 23.7.

2) Sei  $k = 1$  und  $4 \leq |W_0| \leq n-4$ . O.B.d.A. sei  $W_0 = \{1, 2, \dots, s\}$  und  $W_1 = \{1, s+1\}$ . Seien

$$ax := \sum_{e \in C} x_e \leq s(C) =: a_0$$

und  $H_a := \{x \in Q_{2M}^n \mid ax = a_0\}$ . Sei  $bx = b_0$  eine beliebige Hyperebene mit  $H_a \subset \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid bx = b_0\}$ .

Nach Satz 4.4 (d) ist zu zeigen:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^n, \pi \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{mit} \quad \lambda A + \pi a = b.$$

Nach Folgerung 15.2 existiert ein Vektor  $\mu \in \mathbb{R}^n$ , so da\ss f\u00fcr  $b' = \mu A$  gilt

$$b'_{2s} = b_{2s} - 1,$$

$$b'_{1i} = b_{1i} - 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, s+1\},$$

$$b'_{1i} = b_{1i} \quad \forall i \in \{s+2, \dots, n\}.$$

Sei  $c_0 := b_0 - 2 \sum_{i=1}^n \mu_i$  und  $c := b - b'$ , d.h.

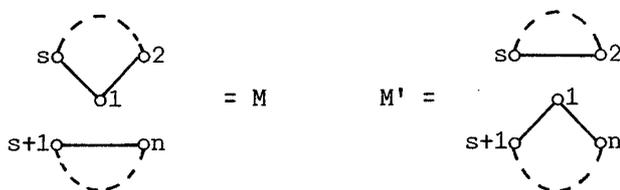
$$c_{2s} = 1,$$

$$c_{1i} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, s+1\},$$

$$c_{1i} = 0 \quad \forall i \in \{s+2, \dots, n\},$$

dann gilt  $H_a \subset \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid cx = c_0\}$ . Es gen\u00fcgt also zu zeigen, da\ss es  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  gibt mit  $c = \lambda A + \pi a$ .

- a) Das 2-Matching  $M$ , das aus der Vereinigung der zwei Zyklen  $\langle 1, \dots, s \rangle$ ,  $\langle s+1, \dots, n \rangle$  besteht, ist perfekt, und nach Definition gilt  $x^M \in H_a$ . Das gleiche gilt für das perfekte 2-Matching  $M' := \langle 2, 3, \dots, s \rangle \cup \langle 1, s+1, \dots, n \rangle$ .



Es folgt:

$$0 = c_o - c_o = cx^M - cx^{M'} = c_{12} + c_{1s} + c_{s+1,n} - c_{2s} - c_{1,s+1} - c_{1n} \\ = c_{s+1,n}.$$

Analog folgt  $c_{s+1,j} = 0 \quad \forall j \in \{s+2, \dots, n\}$ .

- b) Sei  $M := \langle 1, 2, \dots, s \rangle \cup \langle s+1, \dots, n \rangle$ ,  $M' := \langle 1, s+1, \dots, n, s, s-1, \dots, 2 \rangle$ .

Nach Konstruktion gilt  $x^M, x^{M'} \in H_a$ , daraus folgt

$$0 = cx^M - cx^{M'} = c_{1s} + c_{s+1,n} - c_{1,s+1} - c_{sn} = -c_{sn}.$$

Durch Permutation der Knoten folgt analog

$$c_{ij} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}, \quad \forall j \in \{s+2, \dots, n\}.$$

- c) Sei  $M := \langle 1, 2, 3, \dots, s \rangle \cup \langle s+1, \dots, n \rangle$ ,  $M' := \langle 1, 3, 4, \dots, s, 2 \rangle \cup \langle s+1, \dots, n \rangle$ ;

wie üblich gilt  $x^M, x^{M'} \in H_a$  und damit

$$0 = cx^M - cx^{M'} = c_{23} + c_{1s} - c_{13} - c_{2s} = c_{23} - 1.$$

Durch mehrfaches Wiederholen dieses Verfahrens ergibt sich

$$c_{ij} = 1 \quad 1 \leq i < j \leq s.$$

- d) Sei  $\beta := c_{s,s+1}$ , und sei  $M := \langle 2, 3, \dots, s, s+1, 1 \rangle \cup \langle s+2, \dots, n \rangle$  und

$M' := \langle 2, 3, \dots, s, 1, s+1 \rangle \cup \langle s+2, \dots, n \rangle$ , dann gilt  $x^M, x^{M'} \in H_a$  und

$$0 = cx^M - cx^{M'} = c_{s,s+1} + c_{12} - c_{1s} - c_{2,s+1} = \beta - c_{2,s+1}.$$

Analog folgt

$$c_{i,s+1} = \beta \quad \forall i \in \{2, \dots, s\}.$$

- e) Sei  $M := \langle 1, 2, \dots, s, n, n-1, \dots, s+1 \rangle$ ,  $M' := \langle 1, 2, \dots, s, s+1 \rangle \cup \langle s+2, \dots, n \rangle$ .

Offensichtlich gilt  $x^M, x^{M'} \in H_a$  und

$$0 = cx^M - cx^{M'} = c_{s+1,s+2} + c_{sn} - c_{s,s+1} - c_{s+2,n} = -\beta - c_{s+2,n}.$$

Analog folgt

$$c_{ij} = -\beta \quad s+2 \leq i < j \leq n.$$

- f) Aus a) - e) folgt damit

$$c_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, s\},$$

$$c_{1,s+1} = 1,$$

$$c_{i,s+1} = \beta \quad \forall i \in \{2, \dots, s\},$$

$$c_{s+1,i} = 0 \quad \forall i \in \{s+2, \dots, n\},$$

$$c_{ij} = -\beta \quad \forall i, j \in \{s+2, \dots, n\}.$$

Definieren wir nun  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  durch

$$\lambda_i := \frac{\beta}{2} \quad \forall i \in \{1, \dots, s+1\},$$

$$\lambda_i := -\frac{\beta}{2} \quad \forall i \in \{s+2, \dots, n\}$$

und  $\pi := 1 - \beta$ ,

so gilt  $c = \lambda A + \pi a$ ,

und wir sind fertig.  $\square$

Fassen wir die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen, so haben wir gezeigt:

Satz 15.10.

Sei  $K_n = [V, E]$  der vollständige Graph auf  $n$  Knoten,  $n \geq 5$ , und  $Q_{2M}^n = \text{conv} \{x^M \in \mathbb{R}^{|E|} \mid M \text{ perfektes 2-Matching in } K_n\}$ . Dann ist für jede Teilmenge  $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}(V)$  mit  $W \in \mathcal{W} : \iff V-W \notin \mathcal{W}$  das folgende System von Gleichungen und Ungleichungen eine vollständige und nicht redundante lineare Charakterisierung von  $Q_{2M}^n$ :

- (1)  $x_e \geq 0 \quad \forall e \in E,$
- (2)  $x_e \leq 1 \quad \forall e \in E,$
- (3')  $\sum_{e \in \omega(v)} x_e = 2 \quad \forall v \in V,$
- (4)  $\sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \frac{k-1}{2}$  für alle  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$  mit
  - (a)  $|W_0 \cap W_i| = 1 \quad i = 1, \dots, k,$
  - (b)  $|W_i| = 2 \quad i = 1, \dots, k,$
  - (c)  $W_i \cap W_j = \emptyset \quad 1 \leq i < j \leq k,$
  - (d) (d<sub>1</sub>)  $k \geq 3$  und ungerade  
oder  
(d<sub>2</sub>)  $k = 1$  und  $4 \leq |W_0| \leq n-4,$
  - (e)  $W_0 \in \mathcal{W}.$

Beweis:

Folgt aus Satz 14.6, Satz 15.7, Lemma 15.8, Satz 15.9 und Lemma 15.5.  $\square$

Bemerkung 15.11.

- a) Von den 2-Matching Ungleichungen  $\sum_{e \in C} x_e \leq s(C)$ , die Facetten von  $Q_{2M}^n$  sind, werden zur Beschreibung von  $Q_{2M}^n$  diejenigen mit  $k = 1$  und  $|W_0| \geq n-3$  nicht benötigt, von den restlichen genau die Hälfte.
- b) Alle gebrochenen Ecken von  $\bar{Q}_{2M}^n$  werden von den Ungleichungen (4) abgeschnitten, und es werden durch diese Ungleichungen keine neuen Ecken erzeugt.  $\square$

Kapitel 7. Erste Resultate über die Struktur der symmetrischen Travelling Salesman Polytope

§ 16. Zusammenhang mit verwandten Problemen

Auf verschiedene Arten kann man das STSP mit anderen Optimierungsproblemen, für die "gute" Algorithmen bekannt sind, in Verbindung bringen.

Nach Definition ist jede Tour ein perfektes 2-Matching und damit jede Teilmenge einer Tour ein 2-Matching. Daraus folgt unmittelbar, daß für die symmetrischen Travelling Salesman Polytope  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  gilt:

$$Q_T^n \subset Q_{2M}^n \quad \text{und} \quad \tilde{Q}_T^n \subset \tilde{Q}_{2M}^n .$$

Eine interessante Frage ist daher, welche der Facetten von  $Q_{2M}^n$  bzw.  $\tilde{Q}_{2M}^n$ , die wir bereits in § 14 bzw. § 15 vollständig charakterisiert haben (siehe 14.6, 15.10), Facetten von  $Q_T^n$  bzw.  $\tilde{Q}_T^n$  bleiben und welche nicht.

Nicht ganz so natürlich ist die Verwandtschaft des STSP mit dem Spanning Tree Problem. Nach Definition enthält ein Baum bzw. Wald keinen Zyklus, während eine Tour keine Zyklen der Länge kleiner als  $n$  enthält; jede Tour enthält  $n$  Kanten, während jeder spannende Baum genau  $n-1$  Kanten enthält. Eine Möglichkeit, über diese Ähnlichkeiten einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Problemen herzustellen, ist die folgende:

Ist  $T \subset E$  ein Baum und  $e \in E-T$ , so heißt  $T \cup \{e\}$  ein Eins-Baum (One-Tree). Da alle hamiltonschen Ketten Bäume sind, sind alle Touren Eins-Bäume. Bezüglich einer Kantengewichtung minimale Eins-Bäume kann man algorithmisch einfach berechnen, und es hat sich - beginnend mit den Arbeiten von Held und Karp [1970,1971] - gezeigt, daß sich über diese Relaxation des STSP recht effiziente Algorithmen für das Travelling Salesman Problem entwickeln lassen.

Ein anderer "Trick", das Spanning Tree Problem mit dem STSP in Beziehung zu bringen, ist der folgende:

Wir "verdoppeln" den Knoten  $1 \in V$ , nennen das Doppel  $n+1$ , fügen die Kanten  $\{i, n+1\}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , zu unserem vollständigen Graphen  $K_n$  hinzu und bezeichnen diesen neuen Graphen mit  $K'_{n+1} = [V', E']$ . Außerdem definieren wir eine Gewichtung  $c'$  auf  $K'_{n+1}$  durch

$$\begin{aligned} c'_{ij} &:= c_{ij} & , 1 \leq i < j \leq n, \\ c'_{i, n+1} &:= c_{1, i} & , i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Jeder hamiltonschen Kette von 1 nach  $n+1$  in  $K'_{n+1}$ , die ja ein Baum in  $K'_{n+1}$  ist, entspricht eine Tour mit gleicher Länge im ursprünglichen Graphen  $K_n$  und umgekehrt.

Definieren wir nun ein spezielles b-Matching Problem auf  $K'_{n+1}$  durch  $b_1 := b_{n+1} := 1$ ,  $b_i := 2$ ,  $i = 2, \dots, n$ , so entspricht offensichtlich auch jede Tour in  $K_n$  einem solchen perfekten b-Matching mit gleicher Länge und umgekehrt, das heißt, der Durchschnitt der Menge der spannenden Bäume und der Menge der perfekten b-Matchings in  $K'_{n+1}$  steht in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu der Menge der Touren in  $K_n$ . Definieren wir

$$\begin{aligned} Q_K^{n'} &:= \text{conv} \{x^T \mid T \text{ ist Hamiltonsche Kette von } 1 \text{ nach } n+1 \text{ in } K'_{n+1}\}, \\ Q_{BM}^{n'} &:= \text{conv} \{x^M \mid M \text{ ist b-Matching in } K'_{n+1}, b = (1, 2, \dots, 2, 1)\}, \end{aligned}$$

dann gilt

$$Q_K^{n'} \subset Q_{BM}^{n'} \cap Q_{ST}^{n'}.$$

Formal haben wir also das STSP in den Durchschnitt eines b-Matching und eines Spanning Tree Problems eingebettet.

Zur Darstellung polyedrischer Beziehungen ist es allerdings vernünftiger, das Spanning Tree Problem etwas zu relaxieren, indem wir genau eine der definierenden Gleichungen bzw. Ungleichungen von  $Q_{ST}^n$  bzw.  $\tilde{Q}_{ST}^n$  weglassen.

Definition 16.1.

Sei  $K_n = [V, E]$  der vollständige Graph auf  $n$  Knoten, dann sei

$$Q_S^n := \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \quad \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall \emptyset \neq W \subsetneq V\}. \quad \square$$

Mit der so getroffenen Definition gilt offenbar:

$$Q_{ST}^n \subset \tilde{Q}_{ST}^n \subset Q_S^n$$

und

$$\tilde{Q}_T^n \subset Q_T^n \subset Q_S^n.$$

Damit erhalten wir

$$Q_T^n \subset Q_{2M}^n \cap Q_S^n ,$$

$$\tilde{Q}_T^n \subset \tilde{Q}_{2M}^n \cap Q_S^n .$$

Somit ist der (monotone) Travelling Salesman Polytop im Durchschnitt des (monotonen) 2-Matching Polytopen mit einem leicht modifizierten Spanning Tree Polytopen enthalten.

Da uns die Facetten von  $Q_{ST}^n$  und  $\tilde{Q}_{ST}^n$  bekannt sind (siehe 11.3,10.4), sind uns natürlich auch die von  $Q_S^n$  vollständig bekannt. Wir wollen wiederum nachprüfen, welche dieser Facetten auch Facetten von  $Q_T^n$  bzw.  $\tilde{Q}_T^n$  bleiben.

Wenn wir im weiteren Verlauf der Arbeit von speziellen Untergraphen von  $K_n$ , wie etwa Touren, Zyklen, Ketten, Matchings, sprechen, so werden wir immer die zu diesen Untergraphen gehörigen Kantenmengen meinen.

### § 17. Die Dimensionen von $Q_T^n$ und $\tilde{Q}_T^n$

Um überhaupt die Facettialstruktur eines Polytopen bestimmen zu können, ist die Kenntnis seiner Dimension unabdingliche Voraussetzung.

Da jeder Einheitsvektor und der Nullvektor in  $\tilde{Q}_T^n$  enthalten sind, gilt

Satz 17.1.

$$\dim \tilde{Q}_T^n = |E| = \frac{n(n-1)}{2} =: m, \quad n \geq 2. \quad \square$$

Nicht so offensichtlich ist die Dimension von  $Q_T^n$  zu bestimmen. Da nach Folgerung 15.3  $\dim Q_{2M}^n \leq m-n = |E| - |V|$  und da  $Q_T^n \subset Q_{2M}^n$  gilt, ist  $\dim Q_T^n \leq m-n$ . Wir werden zeigen, daß in dieser Ungleichung sogar Gleichheit gilt.

Man kann diese Tatsache natürlich auf verschiedene Arten beweisen. In diesem Falle ziehen wir eine konstruktive Methode vor, die nach einer gewissen Vorschrift genau  $m-n+1$  linear unabhängige Inzidenzvektoren von Touren angibt und zeigt, wie man auf recht hübsche Art bekannte Sätze aus der Graphentheorie zur Erzielung von Resultaten über Polyeder einsetzen kann.

Der für uns interessante Sachverhalt, der z.B. in [Harary,1972,S.89] nachgelesen werden kann und nach Aussage von C. Berge (persönliches Gespräch) auf Lucas zurückgeht, ist der folgende:

Satz 17.2.

Sei  $K_n = [V, E]$  ein vollständiger Graph.

(a) Ist  $|V| = 2k+1$ , dann gibt es  $k$  kantendisjunkte Touren  $T_i$ , so daß  $E = \bigcup_{i=1}^k T_i$  gilt.

(b) Ist  $|V| = 2k$ , dann gibt es  $k-1$  Touren  $T_i$  und ein perfektes Matching  $M$ , so daß je zwei dieser Kantenmengen disjunkt sind und

$$E = \bigcup_{i=1}^{k-1} T_i \cup M \text{ gilt. } \square$$

Satz 17.3.

Sei  $n \geq 3$ , dann gilt

$$\dim Q_T^n = \frac{1}{2}(n-3)n = |E| - |V|.$$

Beweis:

Wir zeigen, daß  $Q_T^n$   $|E| - |V| + 1$  linear unabhängige Inzidenzvektoren von Touren enthält. Für  $n = 3$  ist das trivial. Sei also  $n \geq 4$  und  $V = \{1, \dots, n\}$ ,  $V' = \{1, \dots, n-1\}$ ;  $K_n, K_{n-1}$  seien die vollständigen Graphen mit  $n$  bzw.  $n-1$  Knoten.

a) Sei  $n = 2k+2$ .

Nach Satz 17.2 (a) ist der vollständige Graph  $K_{n-1} = [V', E']$  die kantendisjunkte Vereinigung von  $k$   $(n-1)$ -Touren. Ist  $T$  eine dieser Touren, so ersetzen wir nacheinander jede der Kanten  $\{i, j\} \in T$  durch die Kette  $[i, n, j]$ . Aus jeder  $(n-1)$ -Tour erhalten wir so  $(n-1)$  verschiedene  $n$ -Touren. Insgesamt konstruieren wir auf diese Weise  $k(n-1) = \frac{n-2}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n-3)n+1$  Touren in  $K_n$ .

Zu zeigen bleibt, daß die Inzidenzvektoren dieser Touren linear unabhängig sind.

Fassen wir diese Inzidenzvektoren zu einer Matrix  $M'$  zusammen und streichen wir in dieser die zu den Kanten  $\{i, n\}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , gehörigen Spalten, so ist die daraus resultierende Matrix  $M$  eine quadratische  $(m-n+1, m-n+1)$ -Matrix. Da die  $k$  Touren in  $K_{n-1}$  kantendisjunkt waren, können wir nach geeigneter Zeilen- und Spaltenvertauschung  $M$  als eine Matrix mit  $k$  Blöcken  $N$  auf der Hauptdiagonalen und Nullelementen sonst darstellen. Dabei haben nach Konstruktion die  $(n-1, n-1)$ -Matrizen  $N$  bis auf Zeilen- und Spaltenvertauschung die folgende Gestalt

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Offensichtlich ist  $N$  regulär und somit auch  $M$ .

b) Sei  $n = 2k+1$

Nach Satz 17.2 (b) ist  $K_{n-1} = [V', E']$  kantendisjunkte Vereinigung von  $k-1$  Touren  $T_i$  und einem perfekten Matching  $M$ . Aus den  $(n-1)$ -Touren machen wir wie unter a)  $n$ -Touren. Das Matching  $M$  vervollständigen wir zu einer  $(n-1)$ -Tour  $T$  und ersetzen nacheinander jede der Kanten  $\{i, j\} \in M \subset T$  durch die Kette  $[i, n, j]$ . Damit haben wir  $m+n+1$   $n$ -Touren erhalten. Wie unter a) folgt, daß die Inzidenzvektoren der aus den Touren  $T_i$  konstruierten  $n$ -Touren linear unabhängig sind. Analog überlegt man sich, daß die Inzidenzvektoren der aus dem Matching  $M$  konstruierten  $n$ -Touren untereinander und von den Inzidenzvektoren der vorher konstruierten  $n$ -Touren linear unabhängig sind.  $\square$

Folgerung 17.4.

$$\dim Q_{2M}^n = |E| - |V| \quad \text{für } n \geq 3.$$

Beweis:

Siehe Satz 15.4.  $\square$

Folgerung 17.5.

*In einem vollständigen Graphen bilden die hamiltonschen Zyklen eine Zyklen-Basis (cycle-basis, siehe [Berge, 1975, S. 15]).  $\square$*

Für beliebige Graphen ist Folgerung 17.5 nicht richtig.

Es sei hier angemerkt, daß Satz 17.3 zum ersten Mal von R.Z. Norman [1955] in einem kurzen Abstract formuliert worden ist, der jedoch keine Beweise enthält (siehe auch Bemerkung 23.11). Ein von dem unsrigen verschiedener Beweis wurde von J.F. Maurras [1975] gegeben.

### § 18. Primimplikanten - triviale Facetten

Sei  $T_n$  die Menge aller Touren in einem vollständigen Graphen  $K_n = [V, E]$ ,  $|V| = n$  und  $\tilde{T}_n$  die Menge aller Teilmengen von Touren. Seien  $\tilde{\rho}: \mathbb{B}^{|E|} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $\rho: \mathbb{B}^{|E|} \rightarrow \mathbb{B}$  die Resolventen von  $\tilde{T}_n$  bzw.  $T_n$ , d.h.

$$\tilde{\rho}(x) = 0 \iff \exists T \in \tilde{T}_n \text{ mit } x^T = x,$$

$$\rho(x) = 0 \iff \exists T \in T_n \text{ mit } x^T = x.$$

Da kein Element von  $\tilde{T}_n$  bzw.  $T_n$  einen Zyklus der Länge  $k < n$  enthält, aber jede Teilmenge eines Zyklus ein Element von  $\tilde{T}_n$  ist, sieht man sofort, daß jede der Konjunktionen

$$x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_3} \cdots x_{i_{k-1} i_k} x_{i_k i_1},$$

wenn  $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$  ein Zyklus der Länge  $3 \leq k < n$  ist, ein Primimplikant von  $\tilde{\rho}$  bzw.  $\rho$  ist.

Darüber hinaus liegt jeder Knoten  $i \in V$  höchstens auf zwei Kanten der Elemente aus  $\tilde{T}_n$  bzw.  $T_n$ , das bedeutet, daß jede der Konjunktionen

$$x_{ij_1} x_{ij_2} x_{ij_3},$$

$i, j_1, j_2, j_3 \in V$ , gleichfalls ein Primimplikant von  $\tilde{\rho}$  bzw.  $\rho$  ist.

Man überlegt sich leicht, daß die Vereinigung dieser Primimplikanten dieselbe Lösungsmenge wie  $\tilde{\rho}$  hat und damit, da  $\tilde{\rho}$  monoton ist, alle Primimplikanten von  $\tilde{\rho}$  gefunden sind, d.h. es gilt

$$\tilde{\rho} = \bigvee_{k=3}^{n-1} \left( \bigvee_{\langle i_1, \dots, i_k \rangle \text{ Zyklus}} x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_3} \dots x_{i_k i_1} \right) \vee \bigvee_{i, j_1, j_2, j_3 \in V} x_{ij_1} x_{ij_2} x_{ij_3},$$

und dies ist die eindeutige irredundante Darstellung von  $\tilde{\rho}$ .

Da in jeder Tour  $T \in T_n$  jeder Knoten  $i \in V$  auf genau zwei Kanten liegen muß, bedeutet das, daß für jedes  $i \in V$  und für je  $n-2$  Knoten  $j_1, j_2, \dots, j_{n-2} \in V - \{i\}$  die Konjunktion

$$\bar{x}_{ij_1} \bar{x}_{ij_2} \dots \bar{x}_{ij_{n-2}}$$

ein Primimplikant von  $\rho$  ist. Wiederum überlegt man sich sofort, daß dadurch die Resolvente  $\rho$  von  $T_n$  bestimmt ist, d.h. es gilt

$$\rho = \tilde{\rho} \vee \bigvee_{i, j_1, \dots, j_{n-2} \in V} \bar{x}_{ij_1} \bar{x}_{ij_2} \dots \bar{x}_{ij_{n-2}}.$$

Allerdings kennen wir damit noch nicht alle Primimplikanten von  $\rho$  wie im Falle von  $\tilde{\rho}$ ; diese müssen mit Hilfe der Consensus-Methode berechnet werden. Für  $n = 5$  hat U. Peled [1975b] diese Berechnung (per Hand) durchgeführt. Mit Hilfe eines Computer-Programms haben wir versucht, ausgehend von obigen Primimplikanten alle übrigen Primimplikanten zu berechnen. Jedoch ist die Consensus-Methode derartig ineffektiv, daß dies innerhalb akzeptabler CPU-Zeiten selbst für  $n = 6$  unmöglich war.

Die Kenntnis der Primimplikanten von  $\tilde{\rho}$  und die Ergebnisse der Paragraphen fünf und sechs wollen wir nun dazu einsetzen, erste Informationen über die Struktur des monotonen Travelling Salesman Polytopen  $\tilde{Q}_T^n$  zu gewinnen.

Da  $\tilde{T}_n$  monoton ist und da  $\tilde{\rho}$  keine Primimplikanten der Länge 2 besitzt, folgt mit Satz 6.2

Satz 18.1.

Sei  $n \geq 3$ , dann sind für alle  $\{i,j\} \in E$  die Ungleichungen

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$x_{ij} \leq 1$$

Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$ .  $\square$

Ist  $P = \prod_{\{i,j\} \in I} x_{ij}$  ein Primimplikant von  $\tilde{\rho}$ , so ist die Primimplikanten-Ungleichung

$$\sum_{\{i,j\} \in I} x_{ij} \leq |I| - 1$$

nach Satz 6.5 eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_{ij} = 0 \ \forall \{i,j\} \in E-I\}$ .

Mit Hilfe des Padbergschen Liftungsverfahrens (siehe Satz 6.4) lassen sich diese zu Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  fortsetzen.

Beginnen wir mit den Primimplikanten-Ungleichungen

$$x_{ii_1} + x_{ii_2} + x_{ii_3} \leq 2 \quad , \quad i, i_1, i_2, i_3 \in V.$$

Ist  $\{p,q\} \in E$ ,  $p \neq i \neq q$ , so gibt es offensichtlich eine Tour  $T$ , die  $\{p,q\}$  und zwei der Kanten  $\{i,i_1\}$ ,  $\{i,i_2\}$ ,  $\{i,i_3\}$  enthält, folglich ist der Liftungskoeffizient  $a_{pq} = 0 \ \forall \{p,q\} \in E - \omega(i)$ . Ist  $j \in V - \{i, i_1, i_2, i_3\}$ , so kann eine Tour  $T$ , die  $\{i,j\}$  enthält, genau eine der Kanten  $\{i,i_1\}$ ,  $\{i,i_2\}$ ,  $\{i,i_3\}$  enthalten. Enthält sie zwei dieser Kanten, so nicht  $\{i,j\}$ . Folglich gilt  $a_{ij} = 1$ . Diese Überlegung kann man sequentiell fortsetzen für jedes  $j \in V - \{i, i_1, \dots, i_k\}$ . Es ergibt sich

Satz 18.2.

Sei  $n \geq 4$ , dann ist für jedes  $i \in V$  die Ungleichung

$$\sum_{e \in \omega(i)} x_e = \sum_{j < i} x_{ji} + \sum_{i < j} x_{ij} \leq 2$$

Facette von  $\tilde{Q}_T^n$ .  $\square$

Dabei ist zu bemerken, daß für alle  $n \geq 5$  jeweils  $\binom{n-1}{3}$  verschiedene dieser Primimplikanten dieselbe Facette von  $\tilde{Q}_T^n$  liefern.

Wir nennen die Ungleichungen  $\sum_{e \in \omega(i)} x_e \leq 2$  Gradbeschränkungen, da diese bewirken, daß jeder Knoten  $i \in V$  höchstens auf zwei Kanten liegt, also höchstens den Grad 2 hat.

Analog überlegt man sich, daß man durch sequentielles Liften einer Primimplikanten-Ungleichung des Typs

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_3} + \dots + x_{i_{k-1} i_k} + x_{i_k i_1} \leq k-1$$

die Ungleichung

$$\sum_{\{i,j\} \in E(\{i_1, \dots, i_k\})} x_{ij} \leq k-1$$

erhält.

Daraus folgt

Satz 18.3.

Sei  $n \geq 4$ , dann gilt: Für jede Knotenmenge  $W \subset V$ ,  $3 \leq |W| < |V|$ , ist die Ungleichung

$$\sum_{\{i,j\} \in E(W)} x_{ij} \leq |W| - 1$$

eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$ .  $\square$

Folgerung 18.4.

Alle Facetten von  $Q_S^n$ , d.h. alle Facetten des Forest Polytopen  $\tilde{Q}_{ST}^n$ , bis auf die von  $W = V$  induzierte, sind Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$ .

Beweis:

Siehe Folgerung 10.4, Definition 16.1, Satz 18.1 und Satz 18.3.  $\square$

Die Ungleichungen des Typs  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$ , die ja gerade garantieren, daß Zyklen der Länge  $< n$  nicht auftreten können, nennt man in der Literatur Kurzzyklusbedingungen (Subtour-Elimination-Constraints).

Die Werkzeuge der Booleschen Algebra können wir leider nicht auf  $Q_T^n$  anwenden; Eigenschaften von  $Q_T^n$  müssen wir deshalb direkt nachweisen.

Satz 18.5.

Sei  $n \geq 4$ , dann definieren alle Ungleichungen

$$x_{ij} \leq 1, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

Facetten von  $Q_T^n$ .

Beweis:

O.B.d.A. zeigen wir, daß  $x_{n-1,n} \leq 1$  eine Facette von  $Q_T^n$  ist, und zwar durch Angabe von  $\frac{1}{2}n(n-3)$  Touren, deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind und die Kante  $\{n-1,n\}$  enthalten.

a)  $n = 4$ ,  $\dim Q_T^n = 2$ . Zwei der drei Touren enthalten die Kante  $\{3,4\}$ , und ihre Inzidenzvektoren sind linear unabhängig.

b)  $n = 5$ ,  $\dim Q_T^n = 5$ . Die folgenden Touren enthalten  $\{4,5\}$ , und ihre Inzidenzvektoren sind linear unabhängig:

$\langle 4,5,1,2,3 \rangle, \langle 4,5,1,3,2 \rangle, \langle 4,5,2,1,3 \rangle, \langle 4,5,2,3,1 \rangle, \langle 4,5,3,2,1 \rangle$ .

c)  $n \geq 6$  und gerade.

Der vollständige Graph mit Knoten  $\{1, \dots, n-2\}$  ist nach Satz 17.2 (b) kantendisjunkte Vereinigung von  $\frac{n-4}{2}$  Touren der Länge  $n-2$  und einem perfekten 1-Matching.

Ähnlich wie im Beweis von Satz 17.3 konstruieren wir aus den  $(n-2)$ -Touren und dem zu einer  $(n-2)$ -Tour ergänzten 1-Matching  $\dim Q_T^n$  verschiedene  $n$ -Touren.

$c_1$ ) Wir wählen irgendeine der  $(n-2)$ -Touren, sagen wir  $\langle i_1, \dots, i_{n-2} \rangle$  und konstruieren  $n-3$   $n$ -Touren dadurch, daß wir jeweils eine Kante  $\{i_j, i_{j+1}\}$  entfernen und durch die Kette  $[i_j, n, n-1, i_{j+1}]$  oder  $[i_j, n-1, n, i_{j+1}]$  ersetzen. Zu jeder so erzeugten  $n$ -Tour merken wir uns eine Kante, die uns später (als Spaltenindex) zur Konstruktion einer regulären  $(\dim Q_T^n, \dim Q_T^n)$ -Matrix dienen wird. Dies geschieht wie folgt:

Tour	Kante
$\langle i_1, n, n-1, i_2, \dots, i_{n-2} \rangle$	$\{i_2, n-1\}$
$\langle i_1, i_2, n-1, n, i_3, \dots, i_{n-2} \rangle$	$\{i_3, n\}$
$\langle i_1, i_2, i_3, n, n-1, i_4, \dots, i_{n-2} \rangle$	$\{i_4, n-1\}$
.	$\{i_5, n\}$
.	.
.	.
.	.
$\langle i_1, i_2, \dots, i_{n-3}, n, n-1, i_{n-2} \rangle$	$\{i_{n-2}, n-1\}$ .

$c_2$ ) Aus derselben  $(n-2)$ -Tour erhalten wir weitere  $n-3$   $n$ -Touren wie in  $c_1$ ), indem wir die Anordnung von  $n-1$  und  $n$  jeweils vertauschen. Weiter fügen wir die Tour  $\langle i_1, i_2, \dots, i_{n-2}, n, n-1 \rangle$  hinzu.

$c_3$ ) Aus den restlichen  $\frac{n-4}{2} - 1$   $(n-2)$ -Touren und dem zu einer Tour ergänzten 1-Matching konstruieren wir  $n$ -Touren, indem wir jeweils eine Kante  $\{i, j\}$  entfernen und diese durch die Kette  $[i, n-1, n, j]$  ersetzen (bei der aus dem 1-Matching gewonnenen Tour tauschen wir natürlich nur die Kanten des 1-Matching aus).

Auf diese Weise erhalten wir  $n-3 + n-3 + 1 + (\frac{n-4}{2} - 1)(n-2) + \frac{n-2}{2} = \frac{1}{2}n(n-3)$  Touren in  $K_n$ , die die Kante  $\{n-1, n\}$  enthalten. Sei  $M'$  die Matrix, deren Zeilen die Inzidenzvektoren dieser Touren sind. Wir ordnen die Spalten von  $M'$  wie folgt.

Die ersten  $n-3$  Spalten gehören zu den in  $c_1$ ) angegebenen Kanten. Alle übrigen Spalten werden wie im Beweis von Satz 17.3 geordnet. Die Spalten, die zu den Kanten

$$\{i_k, n\} \quad , \quad k = 1 \text{ und } 2 \leq k \leq n-2 \text{ mit } k \text{ gerade,}$$

sowie zu den Kanten

$\{i_k, n-1\}$  ,  $1 \leq k \leq n-2$  mit  $k$  ungerade ,  
 und  $\{n-1, n\}$   
 gehören, werden gestrichen.

Das Ergebnis ist die folgende quadratische Matrix  $M''$  :

$$M'' = \begin{pmatrix} P & O \\ R & S \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad P = \begin{pmatrix} I' & N' \\ O & N \end{pmatrix} ,$$

wobei

$$I' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{eine } (n-3, n-3)\text{-Matrix,}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eine } (n-2, n-2)\text{-Matrix ist.}$$

Die Matrizen  $O$  sind Nullmatrizen, und  $S$  hat die gleiche Gestalt wie die Matrix  $M$  im Beweis von Satz 17.3. Folglich hat  $M''$  Blöcke regulärer Matrizen auf der Hauptdiagonalen und oberhalb nur Nullelemente. Daher ist  $M''$  regulär.

d)  $n \geq 6$  und ungerade.

Analog zu c) und Teil a) des Beweises von Satz 17.3.  $\square$

#### Satz 18.6.

Sei  $n \geq 5$ , dann definieren alle Ungleichungen

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad 1 \leq i < j \leq n ,$$

Facetten von  $Q_T^n$ .

#### Beweis:

Wir zeigen o.B.d.A., daß  $x_{n-2, n-1} \geq 0$  eine Facette von  $Q_T^n$  für alle  $n \geq 5$  definiert.

a) Nach Satz 18.5 gibt es in  $K_{n-1}$   $k := \frac{1}{2}(n-1)(n-4)$  linear unabhängige  $(n-1)$ -Touren, die die Kante  $\{n-2, n-1\}$  enthalten. In jeder dieser Touren ersetzen wir diese Kante durch die Kette  $[n-2, n, n-1]$  und erhalten auf diese Weise  $k$  linear unabhängige  $n$ -Touren. Aus dem Beweis von Satz 18.5 wissen wir, daß die Spalten  $\{1, n-1\}$ ,  $\{1, n-2\}$  und  $\{2, n-1\}$  nicht zur Konstruktion der regulären Matrix  $M''$  benutzt wurden, wobei wir die in 18.5 mit  $n-1$  bzw.  $n$  bezeichneten Knoten nun mit  $n-2$  bzw.  $n-1$  bezeichnen.

b) Wir nehmen nun irgendeine  $(n-1)$ -Tour, die die Kette  $[n-2,1,n-1,2]$  enthält. Wir ersetzen diese durch

$$\begin{aligned} & [n-2,1,n-1,n,2] \text{ , bzw.} \\ & [n-2,1,n,n-1,2] \text{ , bzw.} \\ & [n-2,n,1,n-1,2] \end{aligned}$$

und erhalten drei  $n$ -Touren. Fügen wir die Spalten, die zu den Kanten  $\{2,n\}$ ,  $\{n-1,n\}$ ,  $\{1,n\}$  gehören sowie die Inzidenzvektoren der drei gerade konstruierten Touren als Zeilen zu  $M''$  hinzu, so erhalten wir folgende  $(k+3,k+3)$ -Matrix

$$N := \begin{pmatrix} & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & M'' & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{---} & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ q & & 1 & 1 & 0 & \\ q & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ q & & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M'' & R \\ Q & P \end{pmatrix} .$$

Nach Konstruktion sind die drei letzten Zeilen unterhalb von  $M''$  identisch. Wir ordnen die Matrix um:

$$N = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & M'' \end{pmatrix} .$$

Da  $P$  regulär ist, gilt bekanntlich

$$|N| = |P| |M'' - RP^{-1}Q| .$$

Es ist

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad RP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

daraus folgt  $RP^{-1}Q = 0$ . Da  $P$  und  $M''$  regulär sind, ist  $N$  regulär.

Weitere  $n-5$  linear unabhängige Touren erhalten wir, indem wir irgendwelche Touren wählen, die genau eine der Kanten  $\{n,i\}$ ,  $3 \leq i \leq n-3$ , aber nicht  $\{n-1,n-2\}$  enthalten. Somit haben wir  $\frac{1}{2}(n-1)(n-4)+3+n-5 = \frac{1}{2}n(n-3)$  linear unabhängige Touren gefunden, die  $\{n-2,n-1\}$  nicht enthalten.  $\square$

Es sei angemerkt, daß keine der Ungleichungen  $x_{ij} \geq 0$  im Falle  $n = 4$  eine Facette definiert, was unmittelbar einleuchtet.

#### Beispiel 18.7.

$Q_T^4$  ist ein zweidimensionaler Polytop in  $\mathbb{R}^6$  mit drei Ecken, also ein Dreieck und kann durch folgendes System vollständig und nicht redundant beschrieben werden

$$\begin{aligned}
 x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 2 \\
 x_{12} + x_{23} + x_{24} &= 2 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{34} &= 2 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 2 \\
 x_{12} &\leq 1 \quad (\text{bzw. } x_{34} \leq 1) \\
 x_{13} &\leq 1 \quad (\text{bzw. } x_{24} \leq 1) \\
 x_{14} &\leq 1 \quad (\text{bzw. } x_{23} \leq 1) . \quad \square
 \end{aligned}$$

Nur im Falle  $n = 4$  sind Ungleichungen des Typs  $x_{ij} \leq 1$  äquivalent, nämlich falls  $\{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset$ . Falls  $n \geq 5$  definieren offensichtlich zwei verschiedene Ungleichungen  $x_{ij} \leq 1$ ,  $x_{pq} \leq 1$  auch verschiedene Facetten von  $Q_T^n$ .

Desgleichen genügen die bereits bekannten Ungleichungen zu einer Beschreibung von  $Q_T^5$ , und zwar gilt

Beispiel 18.8.

Eine vollständige und nicht redundante lineare Beschreibung von  $Q_T^5$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 2 \\
 x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 2 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} &= 2 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} &= 2 \\
 x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 2 \\
 \left. \begin{array}{l} x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \leq 1 \end{array} \right\} & 1 \leq i < j \leq n . \quad \square
 \end{aligned}$$

Beispiel 18.9.

Der Polytop  $\tilde{Q}_T^4$  enthält 3 Touren, 12 Hamilton-Ketten, alle Inzidenzvektoren von zweielementigen Kantenmengen, also 15, alle Einheitsvektoren und den Nullvektor, insgesamt also  $3 + 12 + 15 + 6 + 1 = 37$  Ecken.

Eine vollständige Darstellung von  $\tilde{Q}_T^4$  ist gegeben durch folgende 20 Ungleichungen

Kanten:

	12	13	14	23	24	34	
1	1	1					< 2
1			1	1			< 2
	1		1		1		< 2
		1		1	1		< 2
1	1		1				< 2
1		1		1			< 2
	1	1			1		< 2
			1	1	1		< 2
1							< 1
	1						< 1
		1					< 1
			1				< 1
				1			< 1
					1		< 1
-1							< 0
	-1						< 0
		-1					< 0
			-1				< 0
				-1			< 0
					-1		< 0

□

Die Vollständigkeit der linearen Beschreibungen in den Beispielen 18.7, 18.8, 18.9 kann man durch einige einfache aber längliche Überlegungen nachweisen, desgleichen die Nicht-Redundanz. Zur Arbeitserleichterung haben wir - wie auch bei einigen anderen Beispielen in dieser Arbeit - ein Computer-Programm benutzt, das zu einem gegebenen linearen Restriktionensystem alle Ecken berechnet, und haben überprüft, ob die so gefundenen Ecken die Inzidenzvektoren der untersuchten Kantenmengen (hier Touren, bzw. Teilmengen von Touren) waren. Bei so "kleinen" Beispielen wie hier ist das ohne viel Aufwand durchführbar.

*Kapitel 8. Liftungssätze für die symmetrischen Travelling  
Salesman Polytope*

*§ 19. Einige Lemmata*

In den nächstfolgenden Paragraphen werden wir einige Liftungssätze für  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  beweisen, die folgende Struktur haben:

Wir nehmen an, daß  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $Q_T^n$  ( $\tilde{Q}_T^n$ ) definiert und  $a$  gewisse Bedingungen erfüllt; dann zeigen wir, daß  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $Q_T^{n'}$  ( $\tilde{Q}_T^{n'}$ ) für  $n' > n$  ist, wenn  $(a', a'_0)$  aufgrund der Kenntnis von  $(a, a_0)$  geeignet definiert ist.

Die Beweise dieser Sätze benötigen Strukturaussagen der folgenden Art:

Ist  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $Q_T^n$  ( $\tilde{Q}_T^n$ ) und erfüllt  $(a, a_0)$  gewisse Bedingungen, dann gibt es Touren in  $K_n$ , die bestimmte (im Beweis wichtige) Eigenschaften besitzen, insbesondere gewisse Ketten enthalten.

Mit Hilfe dieser Touren auf  $n$  Städten können wir dann Touren des  $n'$ -Städte-Problems konstruieren, die dazu dienen, die bekannten Eigenschaften von  $(a, a_0)$  auf  $(a', a'_0)$  fortzusetzen. Hilfsaussagen dieser Art sind für eine vollständige Beweisführung unumgänglich. Leider werden recht viele dieser Hilfssätze benötigt; ihre Beweise sind durchaus nicht immer trivial (die entscheidende Arbeit liegt meistens in der Wahl geeigneter Voraussetzungen), verlaufen jedoch häufig sehr ähnlich. Da aber in fast jedem Fall irgendein kleiner Trick benötigt wird und da eine oberflächliche Behandlung dieser Lemmata (der auch der Autor zunächst nachgegangen ist) schnell zu Fehlschlüssen führen kann, haben wir uns der - auch für den Leser - mühevollen Arbeit unterzogen, alle folgenden Lemmata vollständig zu beweisen.

Um häufige Wiederholungen zu vermeiden, legen wir für den ersten Teil des Paragraphen folgendes fest:

Bezeichnungen 19.0.

- a)  $ax \leq a_0$  ist eine Facette von  $Q_T^n$ ,  
 $a_{ij} \geq 0, 1 \leq i < j \leq n$ .
- b)  $[V_a, E_a]$  ist der von  $a$  induzierte Untergraph des vollständigen Graphen  $K_n = [V, E]$ , d.h.  $E_a = \{\{i, j\} \in E \mid a_{ij} \neq 0\}$ ,  $V_a = \bigcup_{e \in E_a} e$ .
- c)  $[W, C]$  und  $[W', C']$  sind zwei verschiedene maximale Cliques in  $[V_a, E_a]$ ,  
 $\overset{0}{W} := \{w \in W \mid \{w, i\} \in E_a \iff i \in W\} = \{w \in W \mid a_{wi} = 0 \ \forall i \in V-W\}$ ,  
 $\overset{1}{W} := (V-W) - \{i \in V \mid \{i, w\} \in E_a \text{ für alle } w \in W-\overset{0}{W}\}$ .
- d)  $T_n := \{T \subseteq E \mid T \text{ Tour in } K_n\}$ .
- e)  $H_a := \{x \in Q_T^n \mid ax = a_0\}$ ,  
 $H := \{T \in T_n \mid ax^T = a_0\}$ .
- f) Das Gleichungssystem  $\sum_{e \in \omega(i)} x_e = 2, i = 1, \dots, n$ , kürzen wir durch  $Ax = 2$  ab.  $\square$

Lemma 19.1.

Sei  $|W| \geq 3$ ,  $|\overset{\circ}{W}| \geq 2$ ,  $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i,j\} \in C$  mit  $\{i,j\} \cap \overset{\circ}{W} \neq \emptyset$ . Dann gibt es zu jedem  $w \in \overset{\circ}{W}$  und jedem  $i \in V - \overset{\circ}{W}$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kante  $\{w,i\}$  enthält.

Beweis:

Es kann nicht mehr als eine Kante  $\{w,i\}$  geben mit  $\{w,i\} \in T \quad \forall T \in H$ , da andernfalls  $H_a \subset \{x \in Q_T^n \mid x_e = 0, x_f = 0\}$ . Das würde bedeuten, daß  $H_a$  im Durchschnitt von zwei verschiedenen Facetten von  $Q_T^n$  (siehe Satz 18.5) liegt; dann kann  $H_a$  aber keine Facette sein. Widerspruch!

Angenommen es gibt Knoten  $w \in \overset{\circ}{W}$ ,  $i_o \in V - \overset{\circ}{W}$  mit  $\{w,i_o\} \notin T \quad \forall T \in H$ . Dann wird die Gleichung

$$bx := x_{wi_o} = 0$$

von allen  $x \in H_a$  erfüllt. Da  $H_a$  Facette von  $Q_T^n$  ist, existieren nach Satz 4.4  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ,  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b = \lambda A + \pi a, \quad 0 = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j + \pi a_o.$$

Aus der Struktur der Matrix  $A$  und den Kenntnissen über  $E_a$  bzw.  $C$  erhalten wir

$$(1) \lambda_w + \lambda_{i_o} = 1, \quad \text{falls } i_o \in V - W,$$

$$(1') \lambda_w + \lambda_{i_o} + \pi \alpha = 1, \quad \text{falls } i_o \in W - \overset{\circ}{W},$$

$$(2) \lambda_i + \lambda_j + \pi a_{ij} = 0, \quad \text{falls } \{i,j\} \in E_a,$$

$$(3) \lambda_i + \lambda_j = 0, \quad \text{falls } \{i,j\} \notin E_a.$$

a) Angenommen  $i_o \in V - W$ .

Nach Voraussetzung gibt es Knoten  $v \in \overset{\circ}{W} - \{w\}$ ,  $u \in W - \{v,w\}$ ; aus (2) folgt dann

$$\lambda_w + \lambda_v + \pi \alpha = 0,$$

$$\lambda_w + \lambda_u + \pi \alpha = 0,$$

$$\lambda_v + \lambda_u + \pi \alpha = 0.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\lambda_w = \lambda_v = \lambda_u = -\frac{\pi \alpha}{2}.$$

Aus (1) folgt

$$\lambda_{i_o} = 1 + \frac{\pi \alpha}{2}.$$

Da  $v \in \overset{\circ}{W}$ , ist  $\{v,i_o\} \notin E_a$ , also folgt aus (3)

$$0 = \lambda_v + \lambda_{i_o} = -\frac{\pi \alpha}{2} + 1 + \frac{\pi \alpha}{2} = 1. \quad \text{Widerspruch!}$$

b) Angenommen  $i_0 \in W-\overset{\circ}{W}$ .

Nach Voraussetzung existiert ein Knoten  $v \in \overset{\circ}{W}-\{w\}$ . Aus (2) und (1') erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_w + \lambda_{i_0} + \pi\alpha &= 1, \\ \lambda_w + \lambda_v + \pi\alpha &= 0, \\ \lambda_{i_0} + \lambda_v + \pi\alpha &= 0 \end{aligned}$$

und daraus

$$\lambda_{i_0} = \lambda_w = \frac{1-\pi\alpha}{2}, \quad \lambda_v = \frac{-1-\pi\alpha}{2}.$$

Da  $W-\overset{\circ}{W} \neq \emptyset$ , ist  $V-W \neq \emptyset$ . Ist  $i \in V-W$ , so gilt  $\{w,i\}, \{v,i\} \notin E_a$ . Aus (3) folgt dann

$$0 = \lambda_i + \lambda_w = \lambda_i + \frac{1-\pi\alpha}{2} \implies \lambda_i = \frac{\pi\alpha-1}{2}$$

und weiter

$$0 = \lambda_i + \lambda_v = \frac{\pi\alpha-1}{2} + \frac{-1-\pi\alpha}{2} = -1. \quad \text{Widerspruch! } \square$$

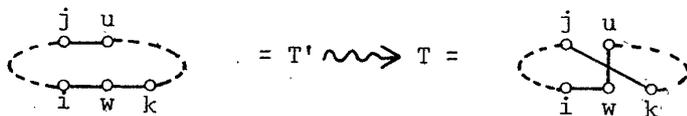
Lemma 19.2.

Sei  $|W| \geq 3$ ,  $|\overset{\circ}{W}| \geq 2$ ,  $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i,j\} \in C \text{ mit } \{i,j\} \cap \overset{\circ}{W} \neq \emptyset$ ,  
 $a_{ij} \geq \alpha \quad \forall i,j \in \overset{\circ}{W}$ .

Dann gibt es zu je zwei Knoten  $v,w \in \overset{\circ}{W}$  und jedem Knoten  $i \in V-\overset{\circ}{W}$  eine Tour  $T \in H$ , die eine Kette  $[v, \dots, w, i]$  enthält, die in  $v$  beginnt, durch alle Knoten von  $\overset{\circ}{W}$  zu  $w$  und dann zu  $i$  führt.

Beweis:

Seien  $v,w \in \overset{\circ}{W}$  und  $i \in V-\overset{\circ}{W}$  beliebig. Nach Lemma 19.1 gibt es eine Tour  $T' \in H$  mit  $\{w,i\} \in T'$ . Sei  $u \in \overset{\circ}{W}-\{v,w\}$  beliebig. Wir konstruieren aus  $T'$  eine Tour  $T$  wie folgt:



Es ist  $a_{uw} = \alpha$ . Falls  $\{w,k\}, \{u,j\} \in E_a$ , d.h. nach Voraussetzung  $a_{uj} = a_{wk} = \alpha$ , dann gilt wegen  $u,w \in \overset{\circ}{W}$ :  $k,j \in \overset{\circ}{W}$  und nach Voraussetzung  $a_{kj} \geq \alpha$ . Folglich:

$$ax^T - ax^{T'} = a_{uw} + a_{kj} - a_{wk} - a_{uj} \geq 0.$$

Daraus folgt wegen der Gültigkeit von  $ax \leq a_0$ , daß  $ax^T = ax^{T'}$  und damit  $T \in H$  ist.

Fügen wir nun auf dieselbe Art hinter  $u$  irgendeinen Knoten aus  $\overset{\circ}{W}-\{v,w,u\}$  ein und wiederholen wir diese Konstruktion für alle weiteren Knoten aus  $\overset{\circ}{W}$  und zuletzt für den Knoten  $v$ , dann erhalten wir das gewünschte Ergebnis.  $\square$

Folgerung 19.3.

Voraussetzungen wie Lemma 19.2.

(a) Zu je drei Knoten  $u, v, w \in \overset{\circ}{W}$  gibt es eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[u, v, w]$  enthält.

(b) Zu je zwei Knoten  $v, w \in \overset{\circ}{W}$  und zu jedem  $i \in V - \overset{\circ}{W}$  gibt es eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält.  $\square$

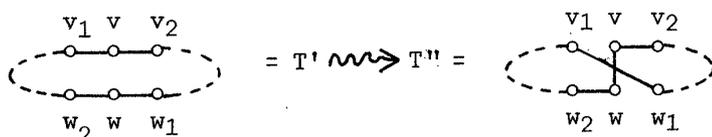
Lemma 19.4.

Sei  $\overset{\circ}{W} = \{v, w\}$ .

Dann gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - \overset{\circ}{W}$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält.

Beweis:

Angenommen es gibt eine Tour  $T' \in H$  mit  $\{v, w\} \notin T'$ . Wir ändern  $T'$  wie folgt:



Es ist nach Voraussetzung  $a_{vv_1} = a_{ww_1} = 0$ , folglich

$$ax^{T''} - ax^{T'} = a_{vw} + a_{v_1 w_1} - a_{vv_1} - a_{ww_1} \geq \alpha.$$

Daraus folgt  $ax^{T''} > a_0$ . Widerspruch!

Also enthält jede Tour  $T \in H$  die Kante  $\{v, w\}$ , d.h.  $H_a \subset \{x \in Q_T^n \mid x_{vw} = 1\}$ . Da  $H_a$  Facette ist, gilt Gleichheit. Für die Facette  $x_{vw} \leq 1$  ist die Behauptung des Lemmas trivialerweise richtig.  $\square$

Lemma 19.5.

Sei  $\overset{\circ}{W} = \{v, w\}$ ,  $\overset{\circ}{W} = \{w\}$ ,  $|\overset{\circ}{W}| \geq 2$  und

$$a_{vj} = \alpha \quad \forall j \in V \text{ mit } \{v, j\} \in E_a.$$

Dann existiert zu jedem  $i \in V - \overset{\circ}{W}$  eine Tour  $T \in H$ , die  $\{w, i\}$  enthält.

Beweis:

Analog zu Lemma 19.1 sehen wir, daß es höchstens ein  $i \in V - \overset{\circ}{W}$  gibt mit  $\{w, i\} \notin T \quad \forall T \in H$ .

Angenommen es gibt einen Knoten  $i_0 \in V - \overset{\circ}{W}$  mit  $\{w, i_0\} \notin T \quad \forall T \in H$ .

Sei  $bx := x_{wi_0}$ , dann ist  $H_a \subset \{x \in Q_T^n \mid bx = 0\}$  und nach Satz 4.4 gibt es

$$\lambda \in \mathbb{R}^n, \pi \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ mit} \\ b = \lambda A + \pi a, \quad 0 = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j + \pi a_0.$$

Die Struktur der Matrix A und die Eigenschaften von  $E_a$  implizieren

$$(1) \lambda_w + \lambda_{i_0} = 1,$$

$$(2) \lambda_i + \lambda_j + \pi a_{ij} = 0, \quad \{i,j\} \in E_a,$$

$$(3) \lambda_i + \lambda_j = 0, \quad \text{sonst.}$$

Da  $|\bar{W}| \geq 2$ , gibt es ein  $j_0 \in \bar{W} - \{i_0\}$  mit  $\{v, j_0\} \notin E_a$ ; da  $w \in \bar{W}$ , gilt desgleichen  $\{w, j_0\} \notin E_a$ . Aus (3) und (2) folgt dann

$$0 = \lambda_v + \lambda_w + \pi a_{vj_0} - \lambda_v - \lambda_{j_0} - \lambda_w - \lambda_{j_0} = \pi a_{vj_0} - 2\lambda_{j_0}$$

und damit  $\lambda_{j_0} = \frac{\pi a}{2}$ , d.h. nach (3)

$$(4) \lambda_v = \lambda_w = -\frac{\pi a}{2}.$$

Da  $\{w, i\} \notin E_a \quad \forall i \in V - W$ , ergibt sich aus (3) und (4)

$$(5) \lambda_i = \frac{\pi a}{2} \quad \forall i \in V - \{v, w, i_0\},$$

und aus (1) und (4)

$$(6) \lambda_{i_0} = 1 + \frac{\pi a}{2}.$$

Da  $v \in W - \bar{W}$ , gibt es nach Definition ein  $j \in V - W$  mit  $\{v, j\} \in E_a$ . Angenommen  $j \neq i_0$ , dann folgt aus (5), (4), (2)

$$0 = \lambda_v + \lambda_j + \pi a_{vj} = -\frac{\pi a}{2} + \frac{\pi a}{2} + \pi a = \pi a.$$

Widerspruch, da  $\pi \neq 0 \neq a$ .

Also gilt  $j = i_0$  und damit  $i_0 \notin \bar{W}$ . Es folgt

$$0 = \lambda_v + \lambda_{i_0} + \pi a_{vi_0} = -\frac{\pi a}{2} + 1 + \frac{\pi a}{2} + \pi a = 1 + \pi a \implies \pi a = -1 \implies \pi = -\frac{1}{a}.$$

Seien nun  $i, j \in \bar{W}$ ; nach (5) und wegen  $i_0, v, w \notin \bar{W}$  gilt

$$\lambda_i = \lambda_j = \frac{\pi a}{2}.$$

Angenommen  $\{i, j\} \notin E_a$ , dann gilt nach (3)

$$0 = \lambda_i + \lambda_j = \pi a = -1. \text{ Widerspruch!}$$

Also folgt  $\{i, j\} \in E_a$  und mit (2), (5)

$$0 = \lambda_i + \lambda_j + \pi a_{ij} = \pi a + \pi a_{ij} = -1 + \pi a_{ij} = -1 - \frac{a_{ij}}{a}.$$

Daraus folgt  $a = -a_{ij}$ . Widerspruch zu  $a_{pq} \geq 0, 1 \leq p < q \leq n, a > 0!$   $\square$

Lemma 19.6.

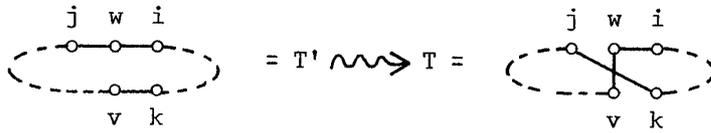
Voraussetzungen wie Lemma 19.5.

Dann gibt es zu jedem  $i \in V - W$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält.

Beweis:

Sei  $i \in V-W$  beliebig. Nach Lemma 19.5 existiert eine Tour  $T' \in H$  mit  $\{w, i\} \in T'$ .

Wir ändern  $T'$  wie folgt, falls  $\{v, w\} \notin T'$ :



Es ist wegen  $a_{vk} \leq \alpha$ ,  $a_{jk} \geq 0$ :

$$ax^T - ax^{T'} = a_{vw} + a_{jk} - a_{wj} - a_{vk} = \alpha + a_{jk} - a_{vk} \geq 0.$$

Mithin gilt  $T \in H$ .  $\square$

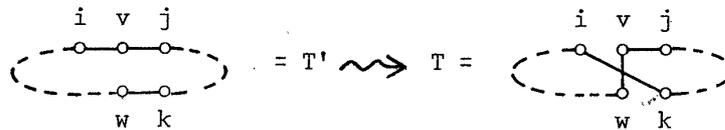
Lemma 19.7.

Voraussetzungen wie Lemma 19.5.

Dann existiert ein  $j \in W$  und eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[w, v, j]$  enthält.

Beweis:

Da  $|W| \geq 2$ , muß es ein  $j \in W$  und eine Tour  $T' \in H$  geben, die  $\{v, j\}$  enthält (siehe Bemerkung am Anfang des Beweises von Lemma 19.1). Enthält  $T'$  nicht die Kante  $\{w, v\}$ , so ändern wir  $T'$  wie folgt



Da  $a_{vi} \leq \alpha$ ,  $a_{ij} \geq 0$ , folgt aus

$$ax^T - ax^{T'} = a_{vw} + a_{ik} - a_{iv} - a_{wk} = \alpha + a_{ik} - a_{vi} \geq 0$$

das Gewünschte.  $\square$

Lemma 19.8.

Sei  $|W| \geq 3$ ,  $W^0 = \{w\}$ ,  $|W^1| \geq 2$  und  $a_{iw} = \alpha \forall i \in W - W^0$ .

Dann gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - \{w\}$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kante  $\{w, i\}$  enthält.

Beweis:

Angenommen es gibt einen Knoten  $i_0 \in V - \{w\}$ , so daß  $\{w, i_0\} \notin T \forall T \in H$ .

Sei  $bx := x_{wi_0}$ . Da  $ax \leq a_0$  Facette von  $Q_T^n$  ist, gibt es wegen

$H_a \subset \{x \in Q_T^n \mid bx = 0\}$  nach Satz 4.4  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ,  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b = \lambda A + \pi a, \quad 0 = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j + \pi a_0.$$

Es folgt

- $$(1) \quad \lambda_w + \lambda_{i_0} = 1 \quad , \text{ falls } i_0 \in V-W,$$
- $$(1') \quad \lambda_w + \lambda_{i_0} + \pi\alpha = 1 \quad , \text{ falls } i_0 \in W-\overset{0}{W},$$
- $$(2) \quad \lambda_i + \lambda_j + \pi a_{ij} = 0 \quad , \text{ falls } \{i,j\} \in E_a,$$
- $$(3) \quad \lambda_i + \lambda_j = 0 \quad , \text{ sonst.}$$

a) Angenommen  $i_0 \in V-W$ .

Seien  $u, v \in W-\overset{0}{W}$  beliebig, und sei  $\beta := a_{uv}$ , dann folgt aus (2)

$$\lambda_w + \lambda_u + \pi\alpha = 0,$$

$$\lambda_w + \lambda_v + \pi\alpha = 0,$$

$$\lambda_u + \lambda_v + \pi\beta = 0.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\lambda_w = -\pi\alpha + \frac{\pi\beta}{2},$$

$$\lambda_u = \lambda_v = -\frac{\pi\beta}{2}.$$

Daraus folgt

$$\lambda_i = -\frac{\pi\beta}{2} \quad \forall i \in W-\overset{0}{W}, \text{ da } a_{iW} = \alpha,$$

$$\lambda_i = \pi\alpha - \frac{\pi\beta}{2} \quad \forall i \in V-(W \cup \{i_0\}), \text{ da } a_{iW} = 0,$$

$$\lambda_{i_0} = 1 + \pi\alpha - \frac{\pi\beta}{2}.$$

Nach Voraussetzung existieren  $v_0 \in W-\overset{0}{W}$ ,  $j_0 \in W-\overset{1}{\{i_0\}}$  mit  $\{v_0, j_0\} \notin E_a$ .

Aus (3) folgt

$$0 = \lambda_{v_0} + \lambda_{j_0} = -\frac{\pi\beta}{2} + \pi\alpha - \frac{\pi\beta}{2} = \pi(\alpha - \beta).$$

Da  $\pi \neq 0$ , folgt  $\alpha = \beta$  und somit

$$(4) \quad \lambda_i = -\frac{\pi\alpha}{2} \quad \forall i \in W,$$

$$(5) \quad \lambda_i = \frac{\pi\alpha}{2} \quad \forall i \in V-(W \cup \{i_0\}),$$

$$(6) \quad \lambda_{i_0} = 1 + \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Gibt es ein  $v \in W-\overset{0}{W}$  mit  $\{v, i_0\} \notin E_a$ , dann folgt aus (3), (4), (6)

$$0 = \lambda_v + \lambda_{i_0} = -\frac{\pi\alpha}{2} + 1 + \frac{\pi\alpha}{2} = 1. \text{ Widerspruch! Also } i_0 \notin W.$$

Seien  $i, j \in W$ . Angenommen  $\{i, j\} \notin E_a$ , dann folgt aus (5), (3)

$$0 = \lambda_i + \lambda_j = \pi\alpha. \text{ Widerspruch, da } \pi \neq 0 \neq \alpha!$$

Angenommen  $\{i, j\} \in E_a$ , dann ergeben (5) und (2):  $0 = \lambda_i + \lambda_j + \pi a_{ij} = \pi(\alpha + a_{ij})$ .

Widerspruch, da dann  $a_{ij} = -\alpha$  und  $a_{ij} \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ! Somit ist dieser Fall erledigt.

b) Angenommen  $i_0 \in W-\overset{\circ}{W}$ .

Sei  $j_0 \in \overset{1}{W}$  und  $v \in W-\overset{\circ}{W}$  mit  $\{v, j_0\} \notin E_a$ , dann gilt

$$\lambda_v + \lambda_{j_0} = 0,$$

$$\lambda_{j_0} + \lambda_w = 0,$$

$$(b_1) \lambda_v + \lambda_w + \pi\alpha = 0, \quad \text{falls } v \neq i_0,$$

$$(b_2) \lambda_v + \lambda_w + \pi\alpha = 1, \quad \text{falls } v = i_0.$$

(b<sub>1</sub>) Angenommen  $v \neq i_0$ .

Es folgt :  $\lambda_{j_0} = \frac{\pi\alpha}{2}$ ,  $\lambda_w = \lambda_v = -\frac{\pi\alpha}{2}$

und damit wegen  $\{w, i\} \in E_a$  für  $i \in W-\overset{\circ}{W}$ ,  $\{w, i\} \notin E_a$  für  $i \in V-W$

$$\lambda_i = \frac{\pi\alpha}{2} \quad \forall i \in V-W,$$

$$\lambda_i = -\frac{\pi\alpha}{2} \quad \forall i \in W-\{i_0\},$$

$$\lambda_{i_0} = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem  $i \in (W-\overset{\circ}{W})-\{i_0\}$  ein  $j \in V-W$  mit  $\{i, j\} \in E_a$ .

Aus (2) folgt

$$0 = \lambda_i + \lambda_j + \pi a_{ij} = \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi\alpha}{2} + \pi a_{ij} = \pi a_{ij}.$$

Widerspruch zu  $\pi \neq 0 \neq a_{ij}$ !

(b<sub>2</sub>) Angenommen  $v = i_0$ .

Durch Lösung des Gleichungssystems folgt

$$\lambda_{j_0} = \frac{-1+\pi\alpha}{2}, \quad \lambda_{i_0} = \lambda_w = \frac{1-\pi\alpha}{2}$$

und damit

$$\lambda_i = \frac{-1+\pi\alpha}{2} \quad \forall i \in V-W, \text{ da } \{w, i\} \notin E_a,$$

$$\lambda_i = \frac{-1-\pi\alpha}{2} \quad \forall i \in (W-\overset{\circ}{W})-\{i_0\}, \text{ da } a_{iw} = \alpha.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu  $i_0 \in W-\overset{\circ}{W}$  ein  $j \in V-W$  mit  $\{i_0, j\} \in E_a$ , d.h.

$$0 = \lambda_{i_0} + \lambda_j + \pi a_{i_0 j} = \frac{1-\pi\alpha}{2} + \frac{-1+\pi\alpha}{2} + \pi a_{i_0 j} = \pi a_{i_0 j}. \quad \text{Widerspruch! } \square$$

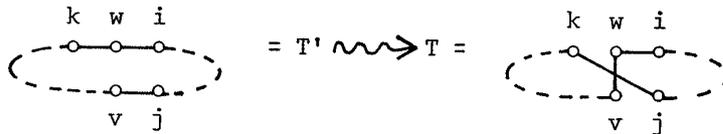
Lemma 19.9.

Sei  $|W| \geq 3$ ,  $\overset{\circ}{W} = \{w\}$ ,  $|\overset{1}{W}| \geq 2$ ,  $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i, j\} \in E_a$  mit  $\{i, j\} \cap W \neq \emptyset$ .

Dann gibt es zu jedem Knoten  $i \in V-\{w\}$  einen Knoten  $v \in W-\overset{\circ}{W}$  und eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält.

Beweis:

Nach Lemma 19.8 gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - \{w\}$  eine Tour  $T' \in H$ , die die Kante  $\{w, i\}$  enthält. Ist der zweite Nachbar von  $w$ , sagen wir  $k$ , in  $T'$  aus  $W - \overset{\circ}{W}$ , sind wir fertig, andernfalls konstruieren wir  $T \in H$  wie folgt, wobei  $v$  ein beliebiger Knoten aus  $W - \overset{\circ}{W}$  ist:



Da  $a_{wv} = \alpha$ ,  $a_{wk} = 0$ ,  $a_{vj} \leq \alpha$ ,  $a_{kj} \geq 0$ , gilt

$$ax^T - ax^{T'} = a_{wv} + a_{kj} - a_{wk} - a_{vj} = \alpha + a_{kj} - a_{vj} \geq 0.$$

Folglich ist  $T \in H$ .  $\square$

Lemma 19.10.

Voraussetzungen wie in Lemma 19.9.

Sei  $v \in W - \overset{\circ}{W}$ , so daß es ein  $i \in V - W$  und eine Tour  $S \in H$  gibt, die die Kette  $[v, w, i]$  enthält. Dann gibt es zu jedem Knoten  $u \in (W - \overset{\circ}{W}) - \{v\}$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, u]$  enthält.

Beweis:

Wir ändern  $S$  wie folgt ab, wobei  $u \in (W - \overset{\circ}{W}) - \{v\}$  beliebig ist.



Wegen  $a_{wi} = 0$ ,  $a_{uj} \leq \alpha$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $a_{wu} = \alpha$  gilt

$$ax^T - ax^S = a_{wu} + a_{ij} - a_{uj} - a_{wi} = \alpha + a_{ij} - a_{uj} \geq 0$$

und somit  $T \in H$ .  $\square$

Mit  $W \Delta W'$  bezeichnen wir die symmetrische Differenz  $(W - W') \cup (W' - W)$ .

Lemma 19.11.

Sei  $w \in V$  in genau zwei maximalen Cliques enthalten,  $w \in W \cap W'$ , und sei

$$a_{iw} = \begin{cases} \alpha & \forall i \in W \Delta W' \\ 0 & \forall i \in V - (W \cup W') \end{cases}.$$

Sei  $|W - W'| \geq 2$ ,  $|V - (W \cup W')| \geq 2$ . Ferner möge es Knoten  $w_1, w_2 \in W - W'$ ,  $w_3 \in W' - W$ ,  $i_1, i_2, i_3 \in V - (W \cup W')$ ,  $w_1 \neq w_2$ ,  $i_1 \neq i_2$  geben mit  $\{w_1, i_1\}, \{w_2, i_2\}, \{w_3, i_3\} \notin E_\alpha$ . Dann gibt es zu jedem  $i \in V - (W \cap W')$  eine Tour  $T \in H$ , die  $\{w, i\}$  enthält.

Beweis:

Angenommen, es gibt einen Knoten  $i_0 \in V-(W \Delta W')$  mit  $\{w, i\} \notin T \quad \forall T \in H$ . Wie üblich gibt es dann zu  $b_x := x_{w, i_0} = 0$  einen Vektor  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b = \lambda A + \pi a.$$

Aus der Struktur von  $A$  und den bekannten Eigenschaften von  $E_a$  schließen wir

- (1)  $\lambda_w + \lambda_{i_0} + \pi a = 1$  , falls  $i_0 \in W \Delta W'$ ,
- (1')  $\lambda_w + \lambda_{i_0} = 1$  , falls  $i_0 \in V-(W \cup W')$ ,
- (2)  $\lambda_i + \lambda_j + \pi a_{ij} = 0$  , falls  $\{i, j\} \in E_a$ ,
- (3)  $\lambda_i + \lambda_j = 0$  , sonst.

Nach Voraussetzung gibt es einen Knoten  $w_1 \in W-(W' \cup \{i_0\})$  und einen Knoten  $i_1 \in V-(W \cup W' \cup \{i_0\})$  mit  $\{w_1, i_1\} \notin E_a$ . Es folgt aus (2) und (3)

$$\begin{aligned} \lambda_w + \lambda_{w_1} + \pi a &= 0, \\ \lambda_w + \lambda_{i_1} &= 0, \\ \lambda_{w_1} + \lambda_{i_1} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $\lambda_w = \lambda_{w_1} = -\frac{\pi a}{2}$  ,  $\lambda_{i_1} = \frac{\pi a}{2}$  .

Aus (2), (3) und den Voraussetzungen über  $w$  folgt

- (4)  $\lambda_i = -\frac{\pi a}{2} \quad \forall i \in W \Delta W' - \{i_0\}$ ,
- (5)  $\lambda_i = \frac{\pi a}{2} \quad \forall i \in V-(W \cup W' \cup \{i_0\})$ .

Da  $W \not\subseteq W'$  gibt es ein  $j_1 \in W-W'$  und ein  $k_1 \in W'-W$  mit  $\{j_1, k_1\} \notin E_a$ .

Angenommen  $j_1 \neq i_0 \neq k_1$ , dann folgt mit (3) und (4)

$$0 = \lambda_{j_1} + \lambda_{k_1} = -\frac{\pi a}{2} - \frac{\pi a}{2} = -\pi a \text{ . Widerspruch zu } \pi \neq 0 \neq a \text{ !}$$

Es ist also  $i_0 = j_1$  oder  $i_0 = k_1$ , d.h.  $i_0 \in W \Delta W'$  und nach (1)

$$(6) \quad \lambda_{i_0} = 1 - \frac{\pi a}{2} .$$

Daraus folgt mit (4)

$$0 = \lambda_{j_1} + \lambda_{k_1} = -\frac{\pi a}{2} + 1 - \frac{\pi a}{2} = 1 - \pi a, \text{ also } \pi a = 1.$$

Angenommen  $i_0 \in W-W'$ , dann existiert aufgrund der Voraussetzung  $|W-W'| \geq 2$  ein weiterer Knoten  $j_2 \in W-W'$ . Aus (2) folgt mit (4) und (6)

$$0 = \lambda_{i_0} + \lambda_{j_2} + \pi a_{i_0 j_2} = 1 - \pi a + \pi a_{i_0 j_2} = \pi a_{i_0 j_2} .$$

Widerspruch zu  $a_{i_0 j_2} \neq 0 \neq \pi$ !

Angenommen es ist  $i_0 \in W'-W$ . Gibt es einen weiteren Knoten  $k_2 \in W'-W$ , dann folgt aus (2) wie vorher ein Widerspruch.

Also muß  $\{i_0\} = W'-W$  gelten. Nach Voraussetzung gibt es dann einen Knoten  $i_3 \in V-(W \cup W')$  mit  $\{i_0, i_3\} \notin E_a$ . Aus (3) folgt mit (5) und (6)

$$0 = \lambda_{i_0} + \lambda_{i_3} = 1 - \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi\alpha}{2} = 1. \text{ Widerspruch!}$$

Damit ist der Beweis erledigt.  $\square$

Lemma 19.12.

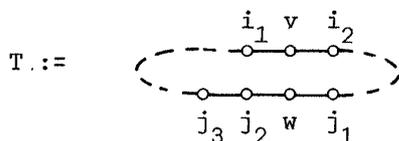
Sei  $|W| \geq 3$ , und es gebe zwei Knoten  $v, w \in W$ , die jeweils in genau einer weiteren maximalen Clique  $[W^v, E^v]$  bzw.  $[W^w, E^w]$  von  $[V_a, E_a]$  enthalten seien. Sei weiterhin  $|W^v| = |W^w| = 2$ , o.B.d.A.  $W^v = \{v, v_1\}$ ,  $W^w = \{w, w_1\}$ . Sei ferner

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \alpha & \forall \{i, j\} \in E_a \text{ mit } \{i, j\} \cap \{v, w\} \neq \emptyset, \\ a_{iv_1} &= 0 & \forall i \in V - \{v, v_1\}, \\ a_{iw_1} &= 0 & \forall i \in V - \{w, w_1\}. \end{aligned}$$

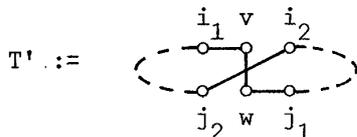
Dann enthält jede Tour  $T \in H$  eine Kante  $\{i, j\} \in C$  mit  $\{i, j\} \cap \{v, w\} \neq \emptyset$ .

Beweis:

Sei  $T \in H$  eine Tour, die  $\{v, w\}$  nicht enthält (andernfalls sind wir bereits fertig).



a) Angenommen nur eine der Kanten  $\{v, i_1\}$ ,  $\{v, i_2\}$ ,  $\{w, j_1\}$ ,  $\{w, j_2\}$  ist in  $E_a$ , o.B.d.A.  $\{v, i_1\} \in E_a$ . Definieren wir



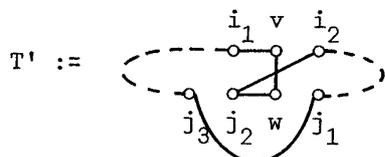
dann gilt  $ax^{T'} - ax^T = a_{vw} + a_{i_2j_2} - a_{vi_2} - a_{wj_2} > \alpha + a_{i_2j_2} > 0$ .

Widerspruch, sonst wäre  $ax \leq a_0$  keine gültige Ungleichung!

b) Sind mindestens drei der vier Kanten aus  $E_a$ , so muß zwangsläufig eine der Kanten aus  $C$  sein, da  $v$  und  $w$  nach Voraussetzung jeweils nur mit einer Kante aus  $E_a$  inzidieren, die nicht in  $C$  ist.

c) Seien  $\{v, i_2\}$ ,  $\{w, j_1\} \notin E_a$  und  $\{v, i_1\}$ ,  $\{w, j_2\} \in E_a$ . Sind  $i_1$  oder  $j_2$  aus  $W$ , sind wir fertig. Andernfalls gilt notwendig  $i_1 = v_1$ ,  $j_2 = w_1$ . Folglich ist  $a_{j_2j_3} = 0$  nach Voraussetzung.

Wir definieren



Dann gilt mit  $j_2 = w_1$

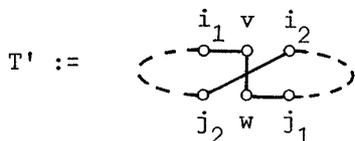
$$ax^{T'} - ax^T = a_{vw} + a_{i_2j_2} + a_{j_1j_3} - a_{vi_2} - a_{wj_1} - a_{j_2j_3} = \alpha + a_{i_2j_2} + a_{j_1j_3} > 0.$$

Widerspruch!

Ein Widerspruch folgt analog, wenn  $\{v, i_1\}, \{w, j_2\} \notin E_a$  und  $\{v, i_2\}, \{w, j_1\} \in E_a$ .

d) Seien  $\{v, i_1\}, \{w, j_1\} \in E_a, \{v, i_2\}, \{w, j_2\} \notin E_a$ .

Wir definieren



Daraus ergibt sich:

$$ax^{T'} - ax^T = a_{vw} + a_{i_2j_2} - a_{vi_2} - a_{wj_2} = a_{vw} + a_{i_2j_2} \geq \alpha.$$

Widerspruch!

Für  $\{v, i_2\}, \{w, j_2\} \in E_a, \{v, i_1\}, \{w, j_1\} \notin E_a$  folgt ein Widerspruch analog.

Damit haben wir alle Fälle erledigt.  $\square$

Mit etwas mehr Mühe kann man sogar zeigen, daß unter den Voraussetzungen von Lemma 19.12 jede Tour  $T \in H$  auch eine der Kanten  $\{v, v_1\}, \{w, w_1\}$  enthält.

Lemma 19.13.

Sei  $|W| \geq 3, a_{ij} = \alpha \forall \{i, j\} \in C$ .

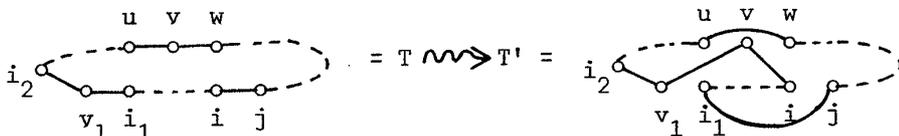
Sei  $v \in W$  in genau einer weiteren maximalen Clique  $[W^v, E^v]$  mit  $W^v = \{v, v_1\}$  enthalten, und sei  $a_{iv_1} = 0 \forall i \in V - \{v, v_1\}$ . Sei  $T \in H$  eine Tour, die eine Kante  $\{i, j\}$  enthält mit  $i \in W - \{v\}$  und  $\{i, j\} \notin E_a$ .

Dann gibt es in  $T$  keine Kette  $[u, v, w]$  mit  $u, w \in W$ .

Beweis:

Angenommen, eine Tour  $T \in H$  enthält eine Kette  $[u, v, w]$  mit  $u, w \in W$  und eine Kante  $\{i, j\} \notin E_a$  mit  $i \in W - \{v\}$ . Für die Kette  $[i_1, v_1, i_2]$  in  $T$  gilt nach Voraussetzung  $\{v_1, i_1\}, \{v_1, i_2\} \notin E_a$ .

a)  $u \neq i \neq w$ . O.B.d.A. sei  $T$  wie folgt gegeben:

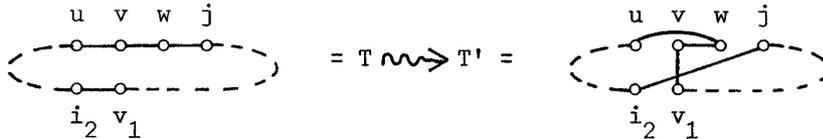


Es folgt

$$ax^{T'} - ax^T = a_{vv_1} + a_{vi} + a_{uw} + a_{i_1j} - a_{uv} - a_{vw} - a_{v_1i_1} - a_{ij} = a_{vv_1} + a_{i_1j} > 0.$$

Widerspruch!

b) O.B.d.A.  $w = i$ .



$$ax^{T'} - ax^T = a_{vv_1} + a_{uw} + a_{ji_2} - a_{v_1i_2} - a_{wj} - a_{uv} = a_{vv_1} + a_{ji_2} > 0.$$

Widerspruch!  $\square$

Lemma 19.14.

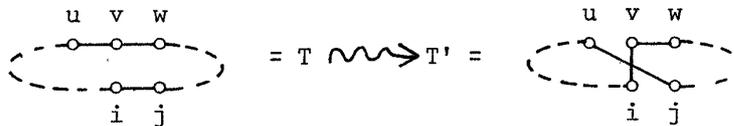
Voraussetzungen wie Lemma 19.13.

Dann gilt für die Kette  $[u, v, w]$  in  $T$ :  $\{u, v\}, \{v, w\} \in E_a$ .

Beweis:

Sei  $T \in \mathcal{H}$  eine Tour, die eine Kante  $\{i, j\} \notin E_a$  enthält mit  $i \in W - \{v\}$ .

a) Angenommen  $\{u, v\} \notin E_a$ .



$$ax^{T'} - ax^T = a_{vi} + a_{uj} - a_{vu} - a_{ij} = \alpha + a_{uj} > 0.$$

Widerspruch!

b) Angenommen  $\{v, w\} \notin E_a$ .

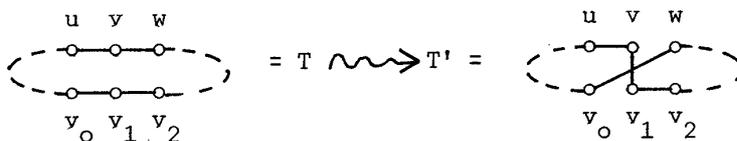
b<sub>1</sub>)  $u = v_1$ . Nach Voraussetzung gilt für den Nachbarn  $v_2$  von  $v_1$  in  $T$   $a_{v_1v_2} = 0$ .



$$ax^{T'} - ax^T = a_{vi} + a_{v_2w} > 0. \text{ Widerspruch!}$$

b<sub>2</sub>)  $u \neq v_1$ . Sei  $[v_0, v_1, v_2]$  die Kette in  $T$ , die  $v_1$  enthält. Nach Voraussetzung

$$\text{ist } a_{v_1v_0} = a_{v_1v_2} = 0.$$



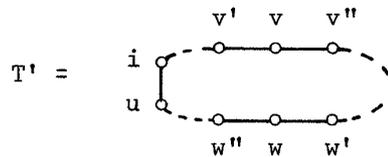
$$ax^{T'} - ax^T = a_{vv_1} + a_{wv_0} > 0. \text{ Widerspruch! } \square$$

Lemma 19.15.

Sei  $|W| \geq 3$  und  $\overset{0}{W} = \emptyset$ . Jeder Knoten  $w \in W$  sei in genau einer weiteren maximalen Clique  $[W^w, E^w]$  enthalten, und es gelte  $|W^w| = 2 \quad \forall w \in W$ . Sei  $a_{ij} = \alpha$ , falls  $\{i, j\} \cap W \neq \emptyset$ ,  $a_{ij} = 0$ , falls ein  $w \in W$  existiert mit  $i \in W^w - \{w\}$ ,  $j \in V - \{w, i\}$ . Dann gibt es zu jedem Knoten  $u \in W$  und jedem Knoten  $i \in V - (W \cup W^u)$  und jedem Knotenpaar  $v, w \in W - \{u\}$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kanten  $\{u, i\}$  und  $\{v, w\}$  enthält.

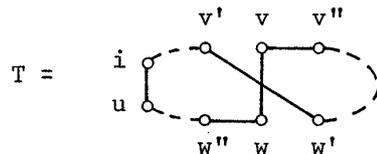
Beweis:

Ist  $u \in W$  und  $i \in V - (W \cup W^u)$ , dann ist  $\{u, i\} \notin E_a$ . Obige Voraussetzungen implizieren die Voraussetzungen von Lemma 19.11 bezüglich  $u \in W$ , also gibt es eine Tour  $T' \in H$ , die  $\{u, i\}$  enthält. Enthält  $T'$  nicht die Kante  $\{v, w\}$  - andernfalls sind wir fertig - so sei  $T'$  o.B.d.A. wie folgt gegeben



$T'$  erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 19.14, also gilt  $\{v, v'\}, \{v, v''\}, \{w, w''\}, \{w, w'\} \in E_a$ . Da  $v$  und  $w$  jeweils nur in einer Kante aus  $E_a - C$  enthalten sind, muß mindestens einer der Nachbarn von  $v$  und  $w$  aus  $W$  sein. Nach Lemma 19.13 kann aber nur höchstens einer der Nachbarn von  $v$  und  $w$  aus  $W$  sein, folglich ist der andere Nachbar aus  $W^v$  bzw.  $W^w$ . O.B.d.A. sei  $w' \in W$  und damit  $w'' \in W^v - W$ .

a) Ist  $v' \in W$ , so definiere

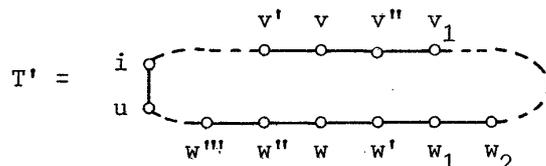


$T$  hat, da  $a_{v', w'} = \alpha$ , die gewünschten Eigenschaften.

b) Sei  $v'' \in W$  und damit  $v' \in W^v - W$ .

b<sub>1</sub>) Angenommen  $v'' = w'$ , damit ist  $[v, v'', w]$  eine Kette in  $T$  mit  $v, v'', w \in W$ . Nach Voraussetzung ist  $|W^{v''}| = 2$ . Da  $T$  eine Kante  $\{u, i\} \notin E_a$ ,  $u \in W - \{v''\}$  enthält, widerspricht dies Lemma 19.13.

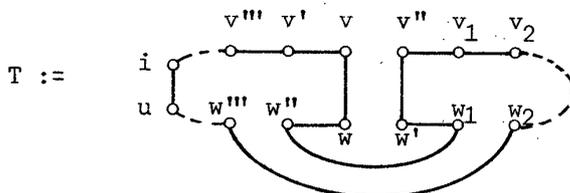
b<sub>2</sub>) Also ist  $v'' \neq w'$ . Wir bezeichnen die Knoten in  $T'$  wie folgt



Nach Lemma 19.14 sind wegen  $v'', w' \in W$  die Kanten  $\{v'', v_1\}, \{w', w_1\} \in E_a$ . Da  $v, v'' \in W$  bzw.  $w, w' \in W$  muß nach Lemma 19.13  $v_1 \in W^{v''} - W$  und  $w_1 \in W^{w'} - W$  gelten.

Aus den Voraussetzungen folgt  $a_{w_1 w_2} = a_{w'' w'''} = 0$ .

Wir definieren



Es ist

$$\begin{aligned} ax^T - ax^{T'} &= a_{vw} + a_{w'v''} + a_{w_1 w''} + a_{w_2 w'''} - a_{vv''} - a_{ww'} - a_{w_1 w_2} - a_{w'' w'''} \\ &= a_{w_1 w''} + a_{w_2 w''} \geq 0, \end{aligned}$$

folglich gilt  $T \in H$ .  $\square$

Lemma 19.16.

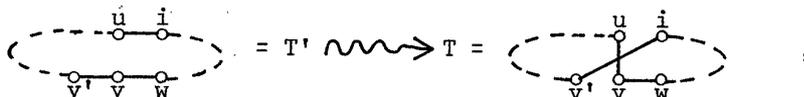
Voraussetzungen wie Lemma 19.15.

Dann gibt es zu je drei Knoten  $u, v, w \in W$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[u, v, w]$  enthält.

Beweis:

Seien  $u, v, w \in W$  und  $i \in V - (W \cup W^u)$ . Dann gibt es nach Lemma 19.15 eine Tour  $T' \in H$ , die  $\{u, i\}$  und  $\{v, w\}$  enthält. Nach Voraussetzung ist  $a_{ui} = 0$ .

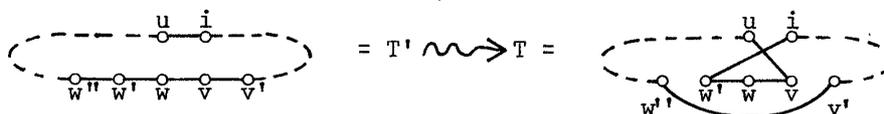
a) Hat  $T'$  das folgende Aussehen



und ist  $T$  wie dargestellt definiert, dann gilt

$$ax^T - ax^{T'} = a_{uv} + a_{iv'} - a_{ui} - a_{vv'} \geq a_{iv'} \geq 0.$$

b) Sei  $T'$  wie folgt gegeben, und sei  $T$  wie gezeichnet definiert:



Da die Voraussetzungen von Lemma 19.16 bezüglich  $w \in W$  die Voraussetzungen von Lemma 19.13 implizieren, ist, da bereits  $v \in W$ , nach Lemma 19.13  $w' \notin W$ . Nach Lemma 19.14 ist  $\{w, w'\} \in E_a$  (analog  $\{v, v'\} \in E_a$ ). Folglich muß nach Voraussetzung  $w' \in W^w - W$  gelten und damit  $a_{w'w} = 0$ . Daraus ergibt sich

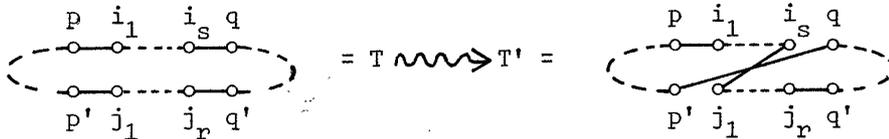
$$ax^T - ax^{T'} = a_{uv} + a_{v'w''} + a_{iw'} - a_{ui} - a_{w'w''} - a_{vv'} = a_{v'w'} + a_{iw'} \geq 0. \square$$

Lemma 19.17.

Sei  $[W', C']$  eine maximale Clique in  $[V_\alpha, E_\alpha]$  mit  $|\overset{\circ}{W}'| = |W'| - 1$  und sei  $a_{ij} = \alpha \forall \{i, j\} \in C'$ .  
 Dann enthält jede Tour  $T \in H$  entweder eine hamiltonsche Kette in  $W'$  oder eine hamiltonsche Kette in  $\overset{\circ}{W}'$ .

Beweis:

Wir zeigen: Enthält  $T \in H$  keine hamiltonsche Kette in  $W'$ , dann enthält  $T$  eine hamiltonsche Kette in  $\overset{\circ}{W}'$ . Ist  $|W'| = 2$ , so ist die Behauptung trivial. Sei  $|W'| \geq 3$ , und  $T \in H$  enthalte keine hamiltonsche Kette in  $W'$ . Dann gibt es zwei Ketten  $[p, i_1, i_2, \dots, i_s, q], [p', j_1, j_2, \dots, j_r, q']$  in  $T$  mit  $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_r \in \overset{\circ}{W}'$ ,  $p, q, p', q' \notin \overset{\circ}{W}'$ . O.B.d.A. seien  $p, q, p', q' \notin W'$ . Wir ändern  $T$  wie folgt



Dann folgt wegen  $a_{i_s q} = a_{p' j_1} = 0$   
 $ax^{T'} - ax^T = a_{i_s j_1} + a_{p' q} - a_{p' j_1} - a_{i_s q} = \alpha + a_{p' q} > 0$ .

Daraus folgt  $T \notin H$ . Widerspruch!  $\square$

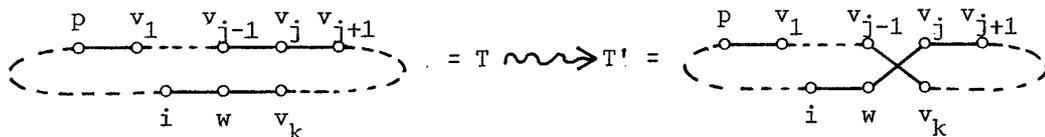
Lemma 19.18.

Sei  $w \in V$  in genau zwei maximalen Cliques  $[W, C], [W', C']$  von  $[V_\alpha, E_\alpha]$  enthalten und  $\{w\} = W \cap W'$ . Sei  $|\overset{\circ}{W}'| = |W'| - 1$ ,  $|W| \geq 3$ ,  $|V - (W \cup W')| \geq 2$ , und es möge Knoten  $w_1, w_2 \in W - W'$ ,  $w_1 \neq w_2$  und  $i_1, i_2 \in V - (W \cup W')$ ,  $i_1 \neq i_2$  geben mit  $\{w_1, i_1\}, \{w_2, i_2\} \in E_\alpha$ . Sei  $a_{ij} = \alpha \forall \{i, j\} \in E_\alpha$  mit  $W' \cap \{i, j\} \neq \emptyset$ . Dann gibt es zu jedem Knoten  $v \in W'$  und jedem Knoten  $i \in V - \{v, w\}$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält.

Beweis: Offensichtlich implizieren obige Voraussetzungen die von Lemma 19.11.

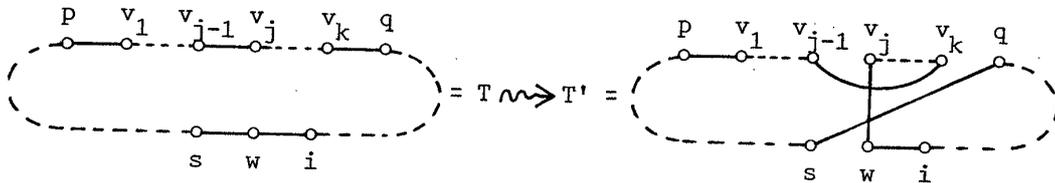
Sei  $v \in \overset{\circ}{W}'$  beliebig aber fest gewählt. Nach Lemma 19.11 gibt es zu jedem  $i \in V - \{v, w\}$  eine Tour  $T \in H$ , die  $\{w, i\}$  enthält. Nach Lemma 19.17 enthält  $T$  eine hamiltonsche Kette in  $W'$  oder in  $\overset{\circ}{W}'$ .

a) Enthält  $T$  eine hamiltonsche Kette in  $W'$ , dann hat diese die Form  $[v_1, v_2, \dots, v_k, w]$ . Ist  $v = v_j$  und  $j \neq k$ , so ändern wir  $T$  wie folgt in  $T'$



Offensichtlich ist  $T' \in H$ .

b) Enthält  $T$  eine hamiltonsche Kette  $[v_1, \dots, v_k]$  in  $\overset{\circ}{W}$ , und ist  $v = v_j$ , so ändere  $T$  in  $T'$  wie folgt



Aus  $a_{v_k q} = 0$ ,  $a_{ws} \leq \alpha$ ,  $a_{v_{j-1} v_j} = a_{v_{j-1} v_k}$ ,  $a_{qs} \geq 0$ ,  $a_{v_j w} = \alpha$  folgt die Behauptung.  $\square$

Wir wollen nun ähnliche Aussagen wie im vorhergehenden für Facetten von  $\overset{\circ}{Q}_T^n$  beweisen. Wiederum legen wir, um ständige Wiederholungen zu vermeiden, einige Bezeichnungen fest, die bis zum Ende des Paragraphen gültig sein sollen.

Bezeichnungen 19.19.

- (a)  $ax \leq a_0$  ist eine Facette von  $\overset{\circ}{Q}_T^n$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ .
- (b)  $[V_a, E_a]$  ist der von  $a$  induzierte Untergraph des vollständigen Graphen  $K_n = [V, E]$  mit  $n$  Knoten, d.h.  
 $E_a = \{\{i, j\} \in E \mid a_{ij} \neq 0\}$ ,  $V_a = \bigcup_{e \in E_a} e$ .
- (c)  $[W, C]$  und  $[W', C']$  sind zwei verschiedene maximale Cliques von  $[V_a, E_a]$ .  
 $\overset{\circ}{W} = \{w \in W \mid \{i, w\} \in E_a \iff i \in W\} = \{w \in W \mid a_{iw} = 0 \quad \forall i \in V - W\}$ ,  
 $\overset{\circ}{W} = (V - W) - \{i \in V \mid \{i, w\} \in E_a \text{ für alle } w \in W - \overset{\circ}{W}\}$ .
- (d)  $\tilde{T}_n := \{S \subset E \mid \exists \text{ Tour } T \subset E \text{ mit } S \subset T\}$ .
- (e)  $H_a := \{x \in \overset{\circ}{Q}_T^n \mid ax = a_0\}$ .  
 $H := \{T \in \tilde{T}_n \mid ax^T = a_0\}$ .  $\square$

Zunächst ist nach Satz 4.2 und Satz 17.1 klar, daß eine Facette  $ax \leq a_0$  von  $\overset{\circ}{Q}_T^n$  mit  $a_{ij} \geq 0$  verschieden ist von jeder der Facetten  $x_{ij} \geq 0$ . Das bedeutet, daß es - gegeben die Facette  $ax \leq a_0$  - zu jeder Kante  $\{i, j\} \in E$  eine Tour  $T \in H$  gibt, die  $\{i, j\}$  enthält.

Lemma 19.20.

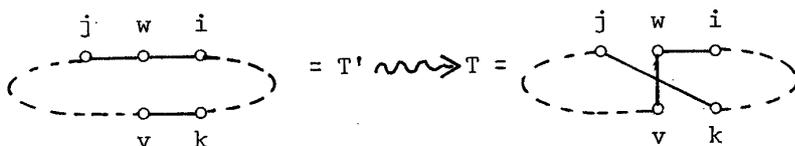
Sei  $|W| \geq 2$ ,  $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i, j\} \in C$  mit  $\{i, j\} \cap \overset{\circ}{W} \neq \emptyset$ ,  
 $a_{ij} \geq \alpha \quad \forall \{i, j\} \in C$  mit  $\{i, j\} \subset W - \overset{\circ}{W}$ .

Dann gibt es zu je zwei Knoten  $v, w \in \overset{\circ}{W}$  und jedem Knoten  $i \in V - \{v, w\}$  ein  $T \in H$ , das die Kette  $[v, w, i]$  enthält.

Beweis:

a) Ist  $|\overset{\circ}{W}| = |W| = 2$ , d.h.  $ax \leq a_0$  ist ein Vielfaches einer der Ungleichungen  $x_{ij} \leq 1$ , dann ist die Behauptung trivial.

b) Sei  $|W| \geq 3$ . Sei  $i \in V - \{v, w\}$  beliebig, und sei  $T' \in H$  mit  $\{w, i\} \in T'$ .  
O.B.d.A. können wir annehmen, daß  $T'$  eine Tour ist (andernfalls ergänzen wir  $T'$  zu einer Tour). Wir konstruieren  $T$  aus  $T'$  wie folgt



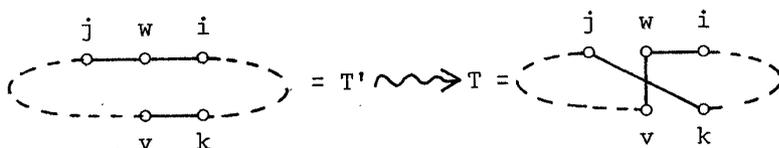
Es ist  $a_{vw} = \alpha$ , und wenn  $a_{wj} = a_{vk} = \alpha$ , dann gilt  $j, k \in W$ , d.h. nach Voraussetzung  $a_{jk} \geq \alpha$ . Folglich ist  $ax^T \geq a_0$ , also  $T \in H$ .  $\square$

Lemma 19.21.

Sei  $|\overset{\circ}{W}| = 1$ ,  $\overset{\circ}{W} = \{w\}$ ,  $a_{ij} = \alpha \forall \{i, j\} \in E_a$  mit  $\{i, j\} \cap W \neq \emptyset$ .  
Dann gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - \{w\}$  einen Knoten  $v \in (W - \overset{\circ}{W}) - \{i\}$  (falls  $(W - \overset{\circ}{W}) - \{i\} \neq \emptyset$ ) und ein  $T \in H$ , das die Kette  $[v, w, i]$  enthält.

Beweis:

Sei  $i \in V - \{w\}$  beliebig. Zunächst gibt es ein  $T' \in H$ , das die Kante  $\{w, i\}$  enthält. O.B.d.A. ist  $T'$  eine Tour. Ist der zweite Nachbar  $j$  von  $w$  in der Tour  $T'$  nicht aus  $W - \overset{\circ}{W}$ , dann ändern wir  $T'$  wie folgt, wobei  $v \in W - \overset{\circ}{W}$  beliebig ist.



Es ist  $a_{vw} = \alpha$ ,  $a_{vk} \leq \alpha$ ,  $a_{wj} = 0$ ,  $a_{jk} \geq 0$ , folglich

$$ax^T - ax^{T'} = a_{vw} + a_{jk} - a_{wj} - a_{vk} \geq a_{jk} \geq 0,$$

und damit gilt  $T \in H$ .  $\square$

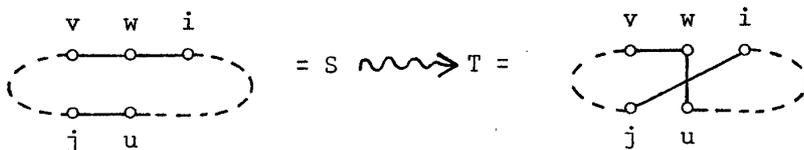
Lemma 19.22.

Seien die Voraussetzungen von Lemma 19.21 erfüllt. Sei  $v \in W - \overset{\circ}{W}$ , so daß es einen Knoten  $i \in V - W$  und eine Tour  $S \in H$  gibt, die die Kette  $[v, w, i]$  enthält.

Dann gibt es zu jedem Knoten  $u \in (W - \overset{\circ}{W}) - \{v\}$  (falls  $(W - \overset{\circ}{W}) - \{v\} \neq \emptyset$ ) eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, u]$  enthält.

Beweis:

Gibt es eine Kantenmenge  $S' \in H$ , die eine Kette  $[v, w, i]$  enthält mit  $i \in V - W$ , dann offensichtlich auch eine Tour  $S \in H$ , die  $[v, w, i]$  enthält. Sei  $u \in (W - \overset{\circ}{W}) - \{v\}$  beliebig.



Da  $a_{wi} = 0$ ,  $a_{uj} \leq \alpha$ ,  $a_{wu} = \alpha$ ,  $a_{ij} \geq 0$ , ist  $T \in H$ .  $\square$

Wir erinnern daran, daß wir die Facetten  $\sum_{e \in \omega(i)} x_e \leq 2$  von  $\tilde{Q}_T^n$  (siehe Satz 18.2) Gradbeschränkungen nennen.

Lemma 19.23.

Sei  $ax \leq a_0$  keine Gradbeschränkung.

Dann gibt es zu jedem Knoten  $i \in V$  einen Knoten  $j \in V - \{i\}$  mit  $\{i, j\} \notin E_a$ .

Beweis:

Angenommen, es gibt einen Knoten  $i \in V$  mit  $\{i, j\} \in E_a \quad \forall j \in V - \{i\}$ . Sei  $S \in H$ ; ist  $S$  keine Tour, so kann  $S$  zu einer Tour  $T \in H$  ergänzt werden.  $T$  enthält dann eine Kette  $[k, i, j]$ . Wegen  $a_{ik} > 0$ ,  $a_{ij} > 0$  muß  $S$  bereits diese Kette enthalten haben. Folglich erfüllt  $x^S$  die Gleichung  $\sum_{e \in \omega(i)} x_e = 2$ . Das heißt  $ax \leq a_0$  ist in einer Gradbeschränkungs-Facetten (siehe Satz 18.2) enthalten. Widerspruch!  $\square$

Lemma 19.24.

Sei  $[W', C']$  eine maximale Clique in  $[V_a, E_a]$  mit  $|\overset{\circ}{W}'| = |W'| - 1$ .

Sei  $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i, j\} \in C'$ .

Dann enthält jedes  $T \in H$  entweder eine hamiltonsche Kette in  $W'$  oder eine hamiltonsche Kette in  $\overset{\circ}{W}'$ .

Beweis:

Analog zu Lemma 19.17.  $\square$

Lemma 19.25.

Seien  $[W, C]$  und  $[W', C']$  zwei verschiedene maximale Cliques in  $[V_a, E_a]$ . Sei

$|W| \geq 3$ ,  $W \cap W' \neq \emptyset$  und  $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i, j\} \in E_a$  mit  $\{i, j\} \cap W' \neq \emptyset$ .

Dann ist  $V - (W \cup W') \neq \emptyset$ .

Beweis:

Ist  $V - (W \cup W') = \emptyset$ , dann gilt nach Voraussetzung für  $w \in W \cap W'$ :  $a_{iw} = \alpha > 0$

$\forall i \in V - \{w\}$ . Daraus folgt, daß jedes  $T \in H$  eine Kette  $[i, w, j]$  enthalten muß,

d.h. der Inzidenzvektor  $x^T \in H_a$  erfüllt die Gradbeschränkung  $\sum_{e \in \omega(w)} x_e \leq 2$  mit

Gleichheit. Wegen  $|W| \geq 3$  ist  $ax \leq a_0$  verschieden von dieser Facette, also

echt in einer anderen Facette enthalten. Widerspruch!  $\square$

Lemma 19.26.

Voraussetzungen wie Lemma 19.25, und sei  $|\overset{\circ}{W}'| = |W'| - 1$ ,  $\{w\} = W \cap W'$ .  
Dann gibt es zu jedem Knoten  $v \in \overset{\circ}{W}'$  und jedem Knoten  $i \in V - \{v, w\}$  ein  $T \in H$ ,  
das die Kette  $[v, w, i]$  enthält.

Beweis:

Sei  $i \in V - W'$  und  $T \in H$  mit  $\{w, i\} \in T$ . Enthält  $T$  eine Kette in  $W'$ , so können wir  
durch Umordnen erreichen, daß  $T$  zu beliebigem  $v \in W'$  eine Kette  $[v, w, i]$  enthält  
(siehe Lemma 19.24).

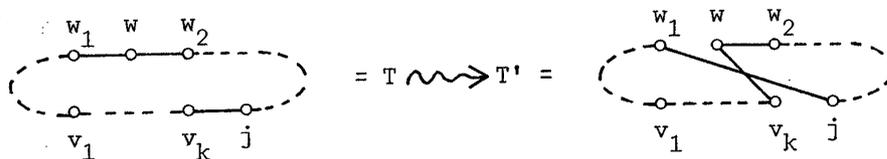
Enthält  $T$  eine Kette in  $\overset{\circ}{W}'$ , aber nicht in  $W'$ , sagen wir  $[w_1, w_2, \dots, w_k]$ , so  
gilt für die Nachbarn  $i_1, i_k$  von  $w_1, w_k$  in  $T$ , falls vorhanden,  $\{w_1, i_1\} \notin E_a$ ,  
 $\{w_k, i_k\} \notin E_a$ . Hat  $w$  einen Nachbarn  $w'$  in  $T$ , so gilt  $a_{ww'} \leq \alpha$ . Definieren wir  
 $S := T - \{\{w, w'\}, \{w_1, i_1\}\} \cup \{\{w, w_1\}\}$ , so gilt  $S \in H$ , und  $S$  enthält eine  
Kette  $[w_1, w, i]$ , wobei  $w_1 \in \overset{\circ}{W}'$  beliebig gewählt werden kann.  $\square$

Lemma 19.27.

Voraussetzungen wie Lemma 19.26,  $\{w\} = W \cap W'$ ,  $a_{wi} = 0 \quad \forall i \in V - (W \cup W')$ .  
Dann gibt es eine Tour  $T \in H$ , die eine Kette  $[w_1, w, w_2]$  enthält mit  $w_1, w_2 \in W$ .

Beweis:

Enthielte jedes  $T \in H$  eine hamiltonsche Kette in  $W'$ , dann würde jeder Inzidenz-  
vektor von Touren aus  $H$  die Ungleichung  $(*) \sum_{e \in E(W')} x_e \leq |W'| - 1$  mit Gleichheit  
erfüllen (siehe Lemma 19.24). Da  $ax \leq a_0$  nach Voraussetzung verschieden von  
dieser Ungleichung ist, wäre  $H_a$  echt in der durch  $(*)$  definierten Facette  
(siehe Satz 18.3) enthalten. Widerspruch! Also gibt es ein  $T \in H$ , das keine  
hamiltonsche Kette in  $W'$  enthält, aber damit nach Lemma 19.24 eine solche in  
 $\overset{\circ}{W}'$ . O.B.d.A. ist  $T$  eine Tour. Enthalte  $T$  die Kette  $[w_1, w, w_2]$ , und sei  
 $[v_1, \dots, v_k]$  die Kette in  $\overset{\circ}{W}'$ . Angenommen  $w_1 \notin W$ , d.h.  $a_{ww_1} = 0$ , dann definieren  
wir eine Tour  $T'$  wie folgt:



Es ist  $ax^{T'} - ax^T = a_{wv_k} + a_{jw_1} - a_{ww_1} - a_{v_k j} = \alpha + a_{jw_1} > 0$ .

Widerspruch zur Gültigkeit von  $ax \leq a_0$ .

Analog folgt ein Widerspruch, falls wir annehmen, daß  $w_2 \notin W$ .  $\square$

§ 20. Liftungssätze für  $Q_T^n$

Die in recht aufwendiger Kleinarbeit erzielten Ergebnisse des vorigen Paragraphen geben uns nun die Möglichkeit, Liftungssätze für  $Q_T^n$  zu formulieren und zu beweisen. Sätze dieser Art vereinfachen die Beweislast bei der Nachprüfung der Facettialeigenschaft für gewisse Ungleichungen erheblich. Im allgemeinen braucht man, wenn solche Sätze vorhanden sind, "nur noch" zu zeigen, daß gewisse "Basisungleichungen" einer Klasse von Ungleichungen Facetten definieren, das Ergebnis für die restlichen Ungleichungen dieser Klasse wird dann durch die Liftungssätze erbracht.

Ein Liftungssatz für den symmetrischen Travelling Salesman Polytopen  $Q_T^n$  wurde zum ersten Mal von J.F. Maurras [1975] angegeben. Leider ist die Arbeit recht schwer lesbar und in der Formulierung des Liftungssatzes sowie in der Beweisführung nicht völlig korrekt. Von Maurras Beweisideen und -techniken konnten wir jedoch profitieren und so zu wesentlich allgemeineren Ergebnissen gelangen als ursprünglich vermutet.

Die nachfolgenden Liftungssätze sind aufgrund ihrer vielen technischen Voraussetzungen wenig elegant, erweisen sich jedoch im weiteren für unsere Untersuchungen als sehr nützlich. Ihre Beweise werden durch eine spezielle Art von Induktion geführt und basieren auf den folgenden Überlegungen:

- (a)  $ax \leq a_0$  ist eine Facette von  $Q_T^n$ , die "lokal" bekannt ist, d.h. wir kennen einige Koeffizienten exakt, einige gar nicht, von anderen kennen wir untere Schranken.
- (b) Aufgrund der lokalen Informationen über  $ax \leq a_0$  definieren wir eine Ungleichung  $a'x' \leq a'_0$ , die gültig für  $Q_T^{n'}$ ,  $n' > n$ , ist.
- (c) Wir betrachten eine beliebige Hyperebene  $c'x' = c'_0$  mit  $H_{a'} := \{x' \in Q_T^{n'} \mid a'x' = a'_0\} \subset \{x' \in \mathbb{R}^{|E'|} \mid c'x' = c'_0\}$  und wollen zeigen, daß  $c' = \lambda'A' + \pi'a'$  gilt, womit wir nach Satz 4.4 fertig wären.
- (d) Wir überlegen uns, daß wir o.B.d.A. statt  $c'x' = c'_0$  eine Hyperebene  $b'x' = b'_0$  mit  $H_{a'} \subset \{x' \mid b'x' = b'_0\}$  wählen können, so daß einige Koeffizienten von  $b'$  bereits bekannt sind.
- (e) Aufgrund der Kenntnis einiger der Koeffizienten von  $b'$  und der lokalen Kenntnis von  $a$  berechnen wir, was den größten Teil der Beweise ausmachen wird, mit Hilfe der Lemmata aus § 19 weitere Koeffizienten von  $b'$ .
- (f) Wir definieren sodann eine Hyperebene  $bx = b_0$  durch  $b_{ij} := b'_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $b_0$  geeignet, und überlegen uns, daß  $H_a = \{x \in Q_T^n \mid ax = a_0\} \subset \{x \mid bx = b_0\}$  gilt.

(g) Da  $H_a$  eine Facette von  $Q_T^n$  ist, gibt es nach Satz 4.4 einen Vektor  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$ , so daß  $b = \gamma A + \pi a$  gilt.

(h) Aufgrund der Kenntnis von  $A$  und der teilweisen Kenntnis von  $a$  (nach Voraussetzung) und  $b$  (nach (e) und (f)) können wir  $\gamma$  und  $\pi$  berechnen.

(i) Die Kenntnis von  $\gamma$  und  $\pi$  erlaubt uns, einen Vektor  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n'}$  und  $\pi' \in \mathbb{R} - \{0\}$  zu definieren, so daß wir zeigen können, daß

$$b' = \gamma' A' + \pi' a'$$

gilt.

(j) Aus Satz 4.4 folgt damit, daß  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $Q_T^{n'}$  ist.

Die in 19.0 vereinbarten Bezeichnungen wollen wir auch in diesem Paragraphen verwenden. Wir erinnern noch einmal an folgende Definitionen. Ist  $[W, C]$  eine maximale Clique in  $[V_a, E_a]$ , dann ist  $\overset{0}{W} := \{w \in W \mid a_{iw} = 0 \ \forall i \in V-W\}$ ,  $\overset{1}{W} := (V-W) - \{i \in V \mid \{i, w\} \in E_a \ \forall w \in W - \overset{0}{W}\}$ . Darüber hinaus bezeichne  $K_n = [V', E']$  den vollständigen Graphen mit  $n'$  Knoten,  $T_n = \{T \subset E' \mid T \text{ Tour in } K_n\}$  und  $A'x' = 2$  das Gleichungssystem  $\sum_{e \in \omega(i)} x_e = 2, i = 1, \dots, n'$ .

Satz 20.1.

Sei  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $Q_T^n$ ,  $a_{ij} \geq 0, 1 \leq i < j \leq n$ , sei  $[W, C]$  eine maximale Clique in  $[V_a, E_a]$ , und sei eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt

- (a)  $|\overset{0}{W}| \geq 2,$   
 $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i, j\} \in C \text{ mit } \{i, j\} \cap \overset{0}{W} \neq \emptyset,$   
 $a_{ij} \geq \alpha \quad \forall \{i, j\} \in C \text{ mit } \{i, j\} \subset W - \overset{0}{W},$
- (b)  $|\overset{0}{W}| = 1,$   
 $|\overset{1}{W}| \geq 2,$   
 $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i, j\} \in E_a \text{ mit } \{i, j\} \cap W \neq \emptyset.$

Sei

$$a'_0 := a_0 + \alpha, \quad a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & 1 \leq i < j \leq n \\ \alpha & i \in W, j = n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dann ist  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $Q_T^{n+1}$ .

Beweis:

Es ist aufgrund der Definition unmittelbar einsichtig, daß  $a'x' \leq a'_0$  eine gültige Ungleichung bezüglich  $Q_T^{n+1}$  ist.

Sei  $H_a := \{x' \in Q_T^{n+1} \mid a'x' = a'_0\}$ ,  $H' := \{T \in T_{n+1} \mid x^T \in H_a\}$ . Sei  $c'x' = c'_0$  eine beliebige Hyperebene mit  $H_a \subset \{x' \in \mathbb{R}^{n+1} \mid c'x' = c'_0\}$ .

Sei

$$(1) b'_{i,n+1} = \alpha \quad \forall i \in W,$$

$$(2) b'_{i,n+1} = 0 \quad \forall i \in V-W,$$

$$(3) b'_{vw} = \alpha \quad (\text{wobei } v, w \in V \text{ in den verschiedenen Beweisteilen} \\ \text{speziell gew\u00e4hlt werden}),$$

dann gibt es nach Folgerung 15.2 einen Vektor  $\lambda' \in \mathbb{R}^{n+1}$ , so da\u00df der Vektor

$$b' := c' + \lambda' A'$$

die in (1), (2), (3) festgelegten Komponenten besitzt. Sei weiterhin

$$b'_0 := c'_0 + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \lambda'_j, \text{ dann gilt offensichtlich } H_a \subset \{x' \mid b'x' = b'_0\}.$$

Wir werden zeigen, da\u00df es  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  gibt, so da\u00df

$$b' = \gamma' A' + \pi a' \text{ gilt. Aus dieser Beziehung ergibt sich: } c' = (\gamma' - \lambda') A' + \pi a'$$

$$\text{und } c'_0 = 2 \sum_{j=1}^{n+1} (\gamma'_j - \lambda'_j) + \pi a'_0. \text{ Aus Satz 4.4 folgt dann mit}$$

$\text{aff}(Q_T^{n+1}) = \{x' \mid A'x' = 2\}$ , da\u00df  $Q_T^{n+1} \cap \{x' \mid a'x' = a'_0\}$  eine Facette von  $Q_T^{n+1}$  definiert, was zu zeigen ist.

$$(a) |\overset{\circ}{W}| \geq 2.$$

Seien  $v$  und  $w$  zwei beliebig aber fest gew\u00e4hlte Knoten aus  $W$ .

Nach Folgerung 19.3 (a) und (b) und Lemma 19.4 gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - \{v, w\}$  eine  $n$ -Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enth\u00e4lt. Ersetzen wir diese Kette durch die Ketten  $[v, w, n+1, i]$  bzw.  $[v, n+1, w, i]$ , so sind die auf diese Weise definierten  $(n+1)$ -Touren  $T', T''$  offensichtlich aus  $H'$  und damit gilt f\u00fcr die Inzidenzvektoren:  $x^{T'}, x^{T''} \in \{x' \mid b'x' = b'_0\}$ . Daraus folgt mit

(1), (2), (3):

$$0 = b'_0 - b'_0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{i,n+1} + b'_{vw} - b'_{v,n+1} - b'_{wi} = b'_{i,n+1} - b'_{wi}.$$

$$\text{Ist } i \in V - W, \text{ so impliziert (2): } b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in V - W.$$

$$\text{Ist } i \in W - \{v, w\}, \text{ dann ist nach (1): } b'_{wi} = \alpha \quad \forall i \in W - \{w\}.$$

Da  $v$  und  $w$  f\u00fcr unsere Betrachtungen v\u00f6llig gleichwertig sind, k\u00f6nnen wir ihre Rollen vertauschen und erhalten wie oben

$$b'_{vi} = 0 \quad \forall i \in V - W,$$

$$b'_{vi} = \alpha \quad \forall i \in W - \{v\}.$$

$$(b) |\overset{\circ}{W}| = 1. \text{ Sei } \overset{\circ}{W} = \{w\}.$$

$$(b_1) |W| = 2, |\overset{\circ}{W}| = 1. \text{ Sei } W - \overset{\circ}{W} = \{v\}.$$

Nach Lemma 19.6 gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - W$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enth\u00e4lt. Wie in Fall (a) schlie\u00dfen wir

$$b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in V - W.$$

Nach Lemma 19.7 gibt es einen Knoten  $j \in \overset{1}{W}$ , (d.h.  $a_{vj}^1 = 0$ ) und eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[w, v, j]$  enthält. Ersetzen wir diese durch die Ketten  $[w, v, n+1, j]$  bzw.  $[w, n+1, v, j]$ , so sind die dadurch definierten  $(n+1)$ -Touren  $T', T''$  aus  $H'$ . Es folgt:  $0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{j, n+1} + b'_{vw} - b'_{w, n+1} - b'_{vj} = b'_{j, n+1} - b'_{vj}$  und damit

$$b'_{vj} = 0 \quad \text{für ein } j \in \overset{1}{W}.$$

(b<sub>2</sub>)  $|W| \geq 3$ .

Sei ein Knoten  $i_0 \in V-W$  beliebig aber fest gewählt, dann existieren nach Lemma 19.9 ein Knoten  $v \in W-\overset{0}{W}$  und eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i_0]$  enthält. Diesen Knoten  $v$  wollen wir für unsere Konstruktion verwenden.

Wie in (a) folgt zunächst:  $b'_{wi_0} = 0$ . Der Knoten  $v \in W-\overset{0}{W}$  erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 19.10, deshalb gibt es zu jedem Knoten  $i \in (W-\overset{0}{W}) - \{v\}$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält. Die übliche Konstruktion ergibt

$$b'_{wi} = \alpha \quad \forall i \in W-\overset{0}{W}.$$

Nach Lemma 19.9 gibt es nun wiederum zu jedem Knoten  $i \in V-W$  einen Knoten  $u \in W-\overset{0}{W}$  und eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[u, w, i]$  enthält. Da  $b'_{wu} = \alpha$ , folgt wie oben

$$b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

Da  $|\overset{1}{W}| \geq 2$ , gibt es mindestens zwei verschiedene Kanten  $\{u_1, i\}, \{u, j\} \notin E_a$  mit  $u_1, u \in W-\overset{0}{W}$  und  $i, j \in \overset{1}{W}$ . Aufgrund von Satz 18.6 (siehe Beweis anfang von Lemma 19.1) muß es eine Tour  $T \in H$  geben, die eine dieser Kanten, sagen wir  $\{u, j\}$ , enthält. Sei  $\{w, w'\}$  eine der zwei Kanten aus  $T$ , die  $w$  enthalten.

$$\begin{aligned} \text{Die } (n+1)\text{-Touren: } T' &:= (T - \{\{w, w'\}\}) \cup \{\{w, n+1\}, \{w', n+1\}\}, \\ T'' &:= (T - \{\{u, j\}\}) \cup \{\{u, n+1\}, \{j, n+1\}\} \end{aligned}$$

sind nach Konstruktion aus  $H'$ . Es folgt

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{uj} + b'_{w, n+1} + b'_{w', n+1} - b'_{ww'} - b'_{u, n+1} - b'_{j, n+1} = b'_{uj}.$$

(c) In allen drei Fällen (a), (b<sub>1</sub>), (b<sub>2</sub>) haben wir somit die folgenden Informationen erhalten können: Es gibt ein  $w \in \overset{0}{W}$  mit

$$(4) \quad b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in V-W,$$

$$(5) \quad b'_{wi} = \alpha \quad \forall i \in W - \{w\},$$

und es gibt ein  $v \in W - \{w\}$  und ein  $j_0 \in V-W$  mit  $\{v, j_0\} \notin E_a$  und

$$(6) \quad b'_{vj_0} = 0.$$

(d) Wir definieren eine Hyperebene  $bx = b_0$  in  $\mathbb{R}^{|E|}$  durch

$$b_{ij} := b'_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad b_0 := b'_0 - \alpha.$$

Sei  $T$  eine beliebige Tour aus  $H$ .  $T$  enthält eine Kante  $\{w, w'\}$ , wobei  $w$  der aus  $W$  gewählte Knoten (siehe (c)) und  $w'$  irgendein anderer Knoten ist. Ersetzen wir diese durch die Kette  $[w, n+1, w']$ , so ist die neue  $(n+1)$ -Tour  $T'$  nach

Konstruktion aus  $H'$ . Somit gilt

$$b'x^{T'} - bx^T = b'_{w, n+1} + b'_{w', n+1} - b'_{ww'} = b'_{w, n+1} = \alpha.$$

Also folgt  $bx^T = b'_o - \alpha$  und damit  $H_a \subset \{x \mid bx = b'_o\}$ .

Nun ist aber nach Voraussetzung  $H_a$  eine Facette von  $Q_T^n$ . Also existieren nach Satz 4.4  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b = \gamma A + \pi a \quad \text{und} \quad b'_o = 2 \sum_{j=1}^n \gamma_j + \pi a'_o.$$

Aus den Informationen über  $b$  bzw.  $b'$ , der Kenntnis der Matrix  $A$  und den "lokalen" Kenntnissen von  $a$  schließen wir

$$\begin{aligned} (7) \quad \gamma_w + \gamma_i &= b'_{wi} = 0 & \forall i \in V-W, \\ (8) \quad \gamma_w + \gamma_i + \pi\alpha &= b'_{wi} = \alpha & \forall i \in W-\{w\}, \\ (9) \quad \gamma_v + \gamma_{j_o} &= b'_{vj_o} = 0 & (\text{da } \{v, j_o\} \notin E_a). \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \gamma_w + \gamma_v + \pi\alpha &= \alpha, \\ \gamma_w + \gamma_{j_o} &= 0, \\ \gamma_v + \gamma_{j_o} &= 0 \end{aligned}$$

hat die Lösung:  $\gamma_w = \gamma_v = \frac{\alpha - \pi\alpha}{2}$ ,  $\gamma_{j_o} = \frac{\pi\alpha - \alpha}{2}$ .

Aus (7) folgt:  $\gamma_i = \frac{\pi\alpha - \alpha}{2} \quad \forall i \in V-W$ .

Aus (8) folgt:  $\gamma_i = \frac{\alpha - \pi\alpha}{2} \quad \forall i \in W$ .

Definieren wir nun  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n+1}$  durch

$$\begin{aligned} \gamma'_i &:= \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \gamma'_{n+1} &:= \frac{\alpha - \pi\alpha}{2}, \end{aligned}$$

so gilt, wenn die letzten  $n$  Komponenten der Vektoren  $a' \in \mathbb{R}^{|E'|}$  zu den Kanten  $\{i, n+1\}$ ,  $i \in V-W$ , und  $\{i, n+1\}$ ,  $i \in W$ , gehören

$$\begin{aligned} \gamma' A' + \pi a' &= \gamma' \begin{pmatrix} A & I \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \end{pmatrix} + \pi (a \mid 0, \dots, 0 \mid \alpha, \dots, \alpha) \\ &= (\gamma A \mid (\gamma'_i + \gamma'_{n+1})_{i \in V-W} \mid (\gamma'_i + \gamma'_{n+1})_{i \in W}) \\ &= (b \mid 0, \dots, 0 \mid \alpha, \dots, \alpha) = b', \end{aligned}$$

und damit haben wir das Gewünschte gezeigt.  $\square$

Satz 20.2.

Sei  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $Q_T^n$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Sei  $[W, C]$  eine maximale Clique in  $[V_\alpha, E_\alpha]$ . Jeder Knoten  $w \in W$  sei in genau einer weiteren maximalen Clique  $[W^w, E^w]$  enthalten, und es möge gelten

$$\begin{aligned} |W| &\geq 3, \\ \overset{\circ}{W} &= \emptyset, \\ |W^w| &= 2 \quad \forall w \in W, \\ a_{ij} &= \alpha \quad \forall \{i, j\} \in E_\alpha \text{ mit } \{i, j\} \cap W \neq \emptyset, \\ a_{ij} &= 0 \quad \text{falls es einen Knoten } w \in W \text{ gibt mit} \\ &\quad i \in W^w - W, j \in V - W^w. \end{aligned}$$

Ist

$$a'_0 := a_0 + \alpha, \quad a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & 1 \leq i < j \leq n \\ \alpha & i \in W, j = n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dann ist  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $Q_T^{n+1}$ .

Beweis:

Offensichtlich ist  $a'x' \leq a'_0$  gültig bezüglich  $Q_T^{n+1}$ .

O.B.d.A. sei  $W = \{1, \dots, k\}$ ,  $k \geq 3$ ,  $W^i = \{i, k+i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , und sei  $H_a := \{x' \in Q_T^{n+1} \mid a'x' = a'_0\}$ ,  $H' := \{T \in T_{n+1} \mid x^T \in H_a\}$ .

Sei  $c'x' = c'_0$  eine beliebige Hyperebene mit  $H_a, c \{x' \in \mathbb{R}^{|E'|} \mid c'x' = c'_0\}$ .

Sei

$$\begin{aligned} (1) \quad b'_{i, n+1} &= \alpha \quad \forall i \in W, \\ (2) \quad b'_{i, n+1} &= 0 \quad \forall i \in V - W, \\ (3) \quad b'_{12} &= \alpha, \end{aligned}$$

dann impliziert Folgerung 15.2 die Existenz eines Vektors  $\lambda' \in \mathbb{R}^{n+1}$ , so daß

$$b' := c' + \lambda'A'$$

die in (1), (2), (3) vorgeschriebenen Komponenten enthält. Ist

$$b'_0 := c'_0 + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \lambda'_j, \text{ dann gilt offensichtlich } H_a, c \{x' \in \mathbb{R}^{|E'|} \mid b'x' = b'_0\}.$$

Wenn wir zeigen können, daß es  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $\pi' \in \mathbb{R} - \{0\}$  gibt, so daß

$b' = \gamma'A' + \pi'a'$  gilt, sind wir analog zu Satz 20.1 mit Satz 4.4 fertig.

a) Sei  $w \in W - \{1, 2\}$ . Dann gibt es nach Lemma 19.16 eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[1, 2, w]$  enthält. Ersetzen wir  $[1, 2, w]$  durch die Ketten  $[1, n+1, 2, w]$  bzw.

$[1, 2, n+1, w]$ , so sind die daraus resultierenden  $(n+1)$ -Touren  $T', T''$  Elemente von  $H'$ . Es folgt aus  $H_a, c \{x \in Q_T^{n+1} \mid b'x' = b'_0\}$

$$0 = b'_0 - b'_0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{1, n+1} + b'_{2w} - b'_{12} - b'_{w, n+1} = b'_{2w} - \alpha.$$

Wir erhalten  $b'_{2w} = \alpha \quad \forall w \in W - \{2\},$

und analog  $b'_{1w} = \alpha \quad \forall w \in W - \{1\}.$

Sind  $v, w \in W - \{1, 2\}$ , so gibt es nach Lemma 19.16 eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[1, v, w]$  enthält. Ersetzen wir diese durch  $[1, n+1, v, w]$  bzw.  $[1, v, n+1, w]$ , so sind diese  $(n+1)$ -Touren  $T', T''$  aus  $H'$ . Es folgt

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{vw} + b'_{1, n+1} - b'_{1v} - b'_{w, n+1} = b'_{vw} - \alpha.$$

Mithin gilt

$$(4) \quad b'_{ij} = \alpha \quad \forall i, j \in W \cup \{n+1\}.$$

b) Seien  $u \in W$ ,  $i \in V - (W \cup W^u)$  und  $v, w \in W - \{u\}$ , dann gibt es nach Lemma 19.15 eine Tour  $T \in H$ , die die Kanten  $\{u, i\}$  und  $\{v, w\}$  enthält. Ersetzen wir zum einen die Kante  $\{u, i\}$  durch die Kette  $[u, n+1, i]$ , zum anderen  $\{v, w\}$  durch  $[v, n+1, w]$ , so sind die neuen Touren  $T', T''$  in  $H'$ , d.h.

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{vw} + b'_{u, n+1} + b'_{i, n+1} - b'_{ui} - b'_{v, n+1} - b'_{w, n+1} = -b'_{ui}.$$

Es folgt

$$(5) \quad b'_{ui} = 0 \quad \forall u \in W \text{ und } i \in V - (W \cup W^u).$$

c) Sei  $b \in \mathbb{R}^{|E|}$  definiert durch  $b_{ij} := b'_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $b_0 := b'_0 - \alpha$ , dann ist  $bx = b_0$  eine Hyperebene, die  $H_a$  enthält. Angenommen, es gibt eine  $n$ -Tour  $T \in H$  mit  $bx^T \neq b_0$ . Nach Lemma 19.12 enthält  $T$  eine Kante  $\{v, w\} \in C$ . Ersetzen wir  $\{v, w\}$  durch die Kette  $[v, n+1, w]$ , so ist die  $(n+1)$ -Tour  $T' \in H'$ . Es folgt  $b'x^{T'} = bx^T + \alpha \neq b_0 + \alpha = b'_0$ . Widerspruch zu  $T' \in H'$ !

d) Da  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $Q_T^n$  ist, gibt es nach Satz 4.4  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit  $b = \gamma A + \pi a$ . Aus der Struktur von  $A$  und den bekannten Eigenschaften von  $a$  und  $b$  folgt

$$(6) \quad \gamma_i + \gamma_j + \pi a = \alpha \quad \forall i, j \in W,$$

$$(7) \quad \gamma_i + \gamma_j = 0 \quad \forall i \in W \text{ und } j \in V - (W \cup W^i),$$

$$(8) \quad \gamma_i + \gamma_j + \pi a_{ij} = b_{ij} \quad \text{sonst.}$$

Seien  $u, v, w \in W$  beliebig ( $|W| \geq 3$ ), dann hat das Gleichungssystem

$$\gamma_u + \gamma_v + \pi a = \alpha,$$

$$\gamma_u + \gamma_w + \pi a = \alpha,$$

$$\gamma_v + \gamma_w + \pi a = \alpha$$

die Lösung  $\gamma_u = \gamma_v = \gamma_w = \frac{\alpha - \pi a}{2}$ .

Aus (6) folgt  $\gamma_i = \frac{\alpha - \pi a}{2} \quad \forall i \in W.$

Da es aufgrund der Voraussetzungen zu jedem  $i \in V - W$  ein  $u \in W$  gibt mit  $i \notin W^u$ ,

folgt aus (7)

$$\gamma_i = \frac{\pi a - \alpha}{2} \quad \forall i \in V - W.$$

e) Definieren wir nun  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n+1}$  durch  $\gamma'_i := \gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\gamma'_{n+1} := \frac{\alpha - \pi\alpha}{2}$ ,  $\pi' := \pi$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma'A' + \pi'a' &= \gamma' \begin{pmatrix} A & I \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \end{pmatrix} + \pi'(a|0, \dots, 0|\alpha, \dots, \alpha) \\ &= (\gamma A | (\gamma'_i + \gamma'_{n+1})_{i \in V-W} | (\gamma'_i + \gamma'_{n+1})_{i \in W}) + (\pi a | 0, \dots, 0 | \pi\alpha, \dots, \pi\alpha) \\ &= (b | 0, \dots, 0 | \alpha - \pi\alpha, \dots, \alpha - \pi\alpha) + (\pi a | 0, \dots, 0 | \pi\alpha, \dots, \pi\alpha) \\ &= (b | 0, \dots, 0 | \alpha, \dots, \alpha) \\ &= b'. \end{aligned}$$

Aus Satz 4.4 folgt damit, daß  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $Q_T^{n+1}$  ist.  $\square$

Unter denselben Voraussetzungen wie bei Satz 20.2 können wir die vorgegebene Facette auch noch auf andere Art liften.

Satz 20.3.

Sei  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $Q_T^n$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Sei  $[W, C]$  eine maximale Clique in  $[V_\alpha, E_\alpha]$ . Jeder Knoten  $w \in W$  sei in genau einer weiteren maximalen Clique  $[W^w, E^w]$  enthalten, und es möge gelten

$$\begin{aligned} |W| &\geq 3, \\ \bar{W} &= \emptyset, \\ |W^w| &= 2 \quad \forall w \in W, \\ a_{ij} &= \alpha \quad \forall \{i, j\} \in E_\alpha \text{ mit } \{i, j\} \cap W \neq \emptyset, \\ a_{ij} &= 0 \quad \text{falls es einen Knoten } w \in W \text{ gibt mit } i \in W^w - W, j \in V - W^w. \end{aligned}$$

Ist

$$a'_0 := a_0 + 3\alpha, \quad a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & 1 \leq i < j \leq n \\ \alpha & \forall i, j \in W \cup \{n+1, n+2\} \\ \alpha & \text{falls } \{i, j\} = \{n+1, n+3\} \\ \alpha & \text{falls } \{i, j\} = \{n+2, n+4\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dann ist  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $Q_T^{n+4}$ .

Beweis:

Offensichtlich ist  $a'x' \leq a'_0$  gültig bezüglich  $Q_T^{n+4}$ .

Sei o.B.d.A.  $W = \{1, \dots, k\}$ ,  $k \geq 3$ , und  $W^i = \{i, k+i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , und sei  $H_{a'} := \{x' \in Q_T^{n+4} \mid a'x' = a'_0\}$ ,  $H' := \{T \subset T_{n+4} \mid x^T \in H_{a'}\}$ .

Sei  $c'x' = c'_0$  eine beliebige Hyperebene mit  $H_{a'} \subset \{x \in \mathbb{R}^{|E'|} \mid c'x' = c'_0\}$ .

Sei

- (1)  $b'_{n+2,n+4} = \alpha,$
- (2)  $b'_{n+1,n+2} = \alpha$
- (3)  $b'_{i,n+4} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n, n+1, n+2, n+3\},$

dann gibt es nach Folgerung 15.2 einen Vektor  $\lambda' \in \mathbb{R}^{n+4}$ , so daß der Vektor  $b' := c' + \lambda'A'$  die in (1), (2), (3) festgelegten Komponenten enthält.

Sei  $b'_0 := c'_0 + 2 \sum_{j=1}^{n+4} \lambda'_j$ , dann gilt offenbar  $H_a, c \{x \mid b'x' = b'_0\}$ .

Gibt es  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n+4}$  und  $\pi' \in \mathbb{R} - \{0\}$ , so daß  $b' = \gamma'A' + \pi'a'$ , dann folgt wegen  $c' = (\gamma' - \lambda')A' + \pi'a'$ ,  $c'_0 = 2 \sum_{j=1}^{n+4} (\gamma'_j - \lambda'_j) + \pi'a'_0$  mit Satz 4.4, daß  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $Q_T^{n+4}$  ist. Die Existenz eines Vektors  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n+4}$  und einer Zahl  $\pi' \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit dieser Eigenschaft wollen wir im folgenden zeigen.

a) Aufgrund der Voraussetzungen existiert zu jedem Knoten  $i \in V-W$  ein Knoten  $w \in W$  mit  $\{w, i\} \in E_a$ . Nach Lemma 19.11, dessen Voraussetzungen offensichtlich erfüllt sind, gibt es eine Tour  $S \in H$ , die  $\{w, i\}$  enthält.

a<sub>1</sub>) Wir ersetzen in  $S$  die Kante  $\{w, i\}$  durch die Ketten  $[w, n+2, n+4, n+1, n+3, i]$  bzw.  $[w, n+2, n+1, n+3, n+4, i]$



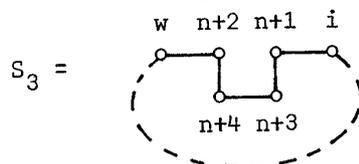
und erhalten auf diese Weise  $(n+4)$ -Touren  $S_1, S_2 \in H'$ . Aus (1), (2), (3) folgt wegen  $H_a, c \{x' \in Q_T^{n+4} \mid b'x' = b'_0\}$

$$\begin{aligned}
 0 = b'_0 - b'_0 &= b'x^{S_1} - b'x^{S_2} = b'_{n+2,n+4} + b'_{n+1,n+4} + b'_{i,n+3} - b'_{n+1,n+2} \\
 &\quad - b'_{i,n+4} - b'_{n+3,n+4} \\
 &= b'_{i,n+3} .
 \end{aligned}$$

Also gilt

$$(4) \quad b'_{i,n+3} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

a<sub>2</sub>) Ersetzen wir in  $S$  die Kante  $\{w, i\}$  durch die Kette  $[w, n+2, n+4, n+3, n+1, i]$ , so ist die neue  $(n+4)$ -Tour  $S_3$  aus  $H'$ .



Mit (1), (2), (3) folgt

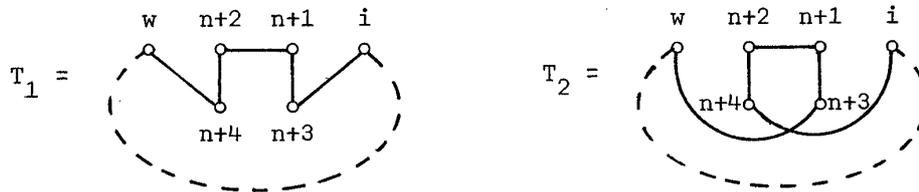
$$0 = b'x^{S_3} - b'x^{S_2} = b'_{i,n+1} + b'_{n+2,n+4} - b'_{n+1,n+2} - b'_{i,n+4} = b'_{i,n+1}$$

und damit

$$(5) \quad b'_{i,n+1} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

b) Aufgrund der Voraussetzungen gibt es zu jedem  $w \in W$  ein  $i \in V-W$  mit  $\{w,i\} \in E_a$ .  
Nach Lemma 19.11 gibt es dann eine Tour  $T \in H$ , die die Kante  $\{w,i\}$  enthält.

b<sub>1</sub>) Wir ersetzen in  $T$  die Kante  $\{w,i\}$  durch die Ketten  $[w,n+4,n+2,n+1,n+3,i]$   
bzw.  $[w,n+3,n+1,n+2,n+4,i]$  und erhalten  $(n+4)$ -Touren  $T_1, T_2 \in H'$ .



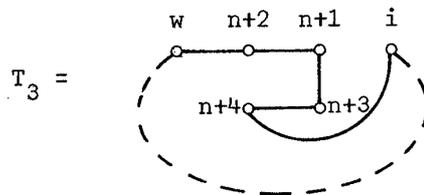
(3) und (4) implizieren:

$$0 = b'x^{T_1} - b'x^{T_2} = b'_{w,n+4} + b'_{i,n+3} - b'_{w,n+3} - b'_{i,n+4} = -b'_{w,n+3},$$

also

$$(6) \quad b'_{w,n+3} = 0 \quad \forall w \in W.$$

b<sub>2</sub>) Ersetzen wir in  $T$  die Kante  $\{w,i\}$  durch  $[w,n+2,n+1,n+3,n+4,i]$ , so ist diese Tour  $T_3$  ebenfalls aus  $H'$ .



Aus (1), (3), (6) folgt

$$0 = b'x^{T_3} - b'x^{T_2} = b'_{w,n+2} + b'_{n+3,n+4} - b'_{n+2,n+4} - b'_{w,n+3} = b'_{w,n+2} - \alpha,$$

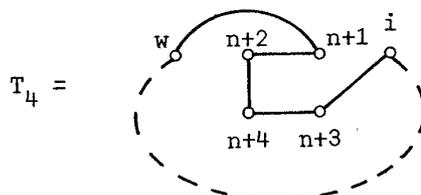
mithin

$$(7) \quad b'_{w,n+2} = \alpha \quad \forall w \in W.$$

b<sub>3</sub>) Definieren wir

$$(8) \quad \beta := b'_{n+1,n+3}$$

und ersetzen wir in  $T$  die Kante  $\{w,i\}$  durch die Kette  $[w,n+1,n+2,n+4,n+3,i]$



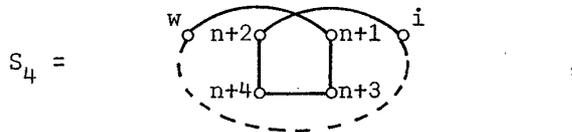
so ist  $T_4 \in H'$  und mit (1), (3), (4), (7), (8) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= b'x^{T_4} - b'x^{T_3} = b'_{w,n+1} + b'_{n+2,n+4} + b'_{i,n+3} - b'_{w,n+2} - b'_{n+1,n+3} - b'_{i,n+4} \\ &= b'_{w,n+1} - \beta, \end{aligned}$$

das heißt

$$(9) \quad b'_{w,n+1} = \beta \quad \forall w \in W.$$

$a_3$ ) Kehren wir nun zu dem in a) eingeschlagenen Weg zurück und ersetzen wir in der  $n$ -Tour  $S \in H$  die Kante  $\{w,i\}$  durch die Kette  $[w,n+1,n+3,n+4,n+2,i]$



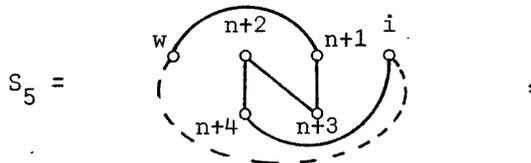
so ist  $S_4 \in H'$ . Mit (5), (7), (9) folgt

$$0 = b'x^{S_4} - b'x^{S_3} = b'_{w,n+1} + b'_{i,n+2} - b'_{w,n+2} - b'_{i,n+1} = b'_{i,n+2} + \beta - \alpha,$$

und damit

$$(10) \quad b'_{i,n+2} = \alpha - \beta \quad \forall i \in V-W.$$

$a_4$ ) Ersetzen wir in  $S \in H$  die Kante  $\{w,i\}$  durch die Kette  $[w,n+1,n+3,n+2,n+4,i]$



so ist  $S_5 \in H'$ . (3) und (10) implizieren

$$0 = b'x^{S_5} - b'x^{S_4} = b'_{n+2,n+3} + b'_{i,n+4} - b'_{i,n+2} - b'_{n+3,n+4} = b'_{n+2,n+3} - \alpha + \beta.$$

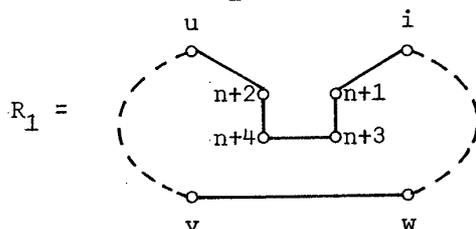
Das bedeutet

$$(11) \quad b'_{n+2,n+3} = \alpha - \beta.$$

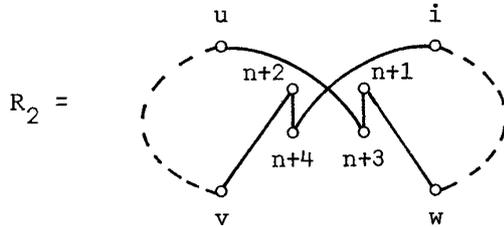
c) Nach Lemma 19.15 gibt es zu jedem Paar  $v,w \in W$  und jedem  $u \in W$  und jedem  $i \in V - (W \cup W^u)$  eine Tour  $R \in H$ , die die Kanten  $\{u,i\}$  und  $\{v,w\}$  enthält.

$c_1$ ) Ersetzen wir in  $R$  die Kante  $\{u,i\}$  durch die Kette  $[u,n+2,n+4,n+3,n+1,i]$ ,

so ist die  $(n+4)$ -Tour  $R_1$  aus  $H'$ .



Verändern wir  $R$  zu einer  $(n+4)$ -Tour  $R_2$ , wie in der Zeichnung dargestellt, so ist nach Konstruktion  $R_2 \in H'$ .



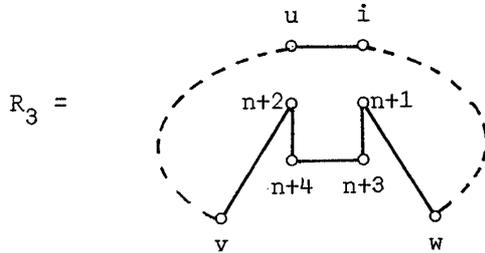
Mit (3), (5), (6), (7), (9) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= b'x^{R_1} - b'x^{R_2} = b'_{u,n+2} + b'_{n+3,n+4} + b'_{i,n+1} + b'_{vw} - b'_{u,n+3} - b'_{i,n+4} \\ &\quad - b'_{v,n+2} - b'_{w,n+1} \\ &= \alpha + 0 + 0 + b'_{vw} - 0 - 0 - \alpha - \beta \\ &= b'_{vw} - \beta, \end{aligned}$$

daraus ergibt sich

$$(12) \quad b'_{vw} = \beta \quad \forall v, w \in W.$$

$c_2$ ) Ersetzen wir in  $R \in H$  die Kante  $\{v, w\}$  durch die Kette  $[v, n+2, n+4, n+3, n+1, w]$ , so ist  $R_3 \in H'$ .



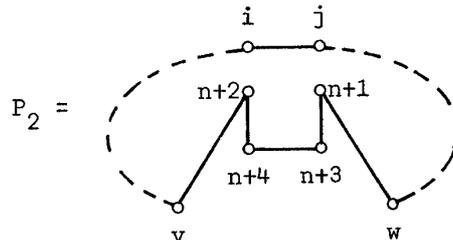
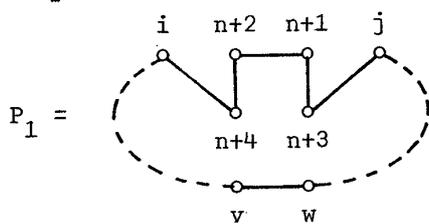
Aus (5), (7), (9), (12) ergibt sich

$$0 = b'x^{R_3} - b'x^{R_1} = b'_{ui} + b'_{v,n+2} + b'_{w,n+1} - b'_{u,n+2} - b'_{i,n+1} - b'_{vw} = b'_{ui}$$

und damit

$$(13) \quad b'_{ui} = 0 \quad \forall u \in W \quad \forall i \in V - (W \cup W^u).$$

d) Ist  $\{i, j\}$  eine beliebige Kante, die nicht in  $E_a$  liegt, und ist  $P \in H$  eine  $n$ -Tour, die  $\{i, j\}$  enthält, dann enthält  $P$  nach Lemma 19.12 eine Kante  $\{v, w\} \in C$ . Ersetzen wir zum einen  $\{i, j\}$  durch  $[i, n+4, n+2, n+1, n+3, j]$ , zum anderen  $\{v, w\}$  durch  $[v, n+2, n+4, n+3, n+1, w]$



so gilt  $P_1, P_2 \in H'$  und damit

$$0 = b'x^{P_2} - b'x^{P_1} = b'_{ij} + b'_{v,n+2} + b'_{w,n+1} + b'_{n+3,n+4} - b'_{i,n+4} - b'_{j,n+3} - b'_{vw} - b'_{n+1,n+2} = b'_{ij},$$

das bedeutet

$$(14) \quad b'_{ij} = 0 \quad \text{falls } \{i,j\} \notin E_a \text{ und falls es eine Tour aus } H \text{ gibt, die } \{i,j\} \text{ enthält.}$$

e) Wir definieren  $b \in \mathbb{R}^{|E|}$  durch  $b_{ij} := b'_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , und

$$b_o := b'_o - 2\alpha - \beta.$$

Sei  $T \in H$ ; nach Lemma 19.12 gibt es in  $T$  eine Kante  $\{v,w\} \in C$ . Ersetzen wir diese Kante durch die Kette  $[v,n+2,n+4,n+3,n+1,w]$ , dann ist die so definierte  $(n+4)$ -Tour  $T'$  aus  $H'$ . Daraus folgt mit (1), (3), (7), (8), (9), (12)

$$b'x^{T'} - bx^T = b'_{v,n+2} + b'_{n+2,n+4} + b'_{n+3,n+4} + b'_{n+1,n+3} + b'_{w,n+1} - b'_{vw} = 2\alpha + \beta.$$

Das bedeutet

$$bx^T = b_o \quad \forall T \in H,$$

und das heißt  $H_a \subset \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid bx = b_o\}$ .

Da  $ax \leq a_o$  eine Facette von  $Q_T^n$  ist, gibt es nach Satz 4.4  $\gamma \in \mathbb{R}^n$ ,  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b = \gamma A + \pi a, \quad b_o = 2 \sum_{j=1}^n \gamma_j + \pi a_o.$$

Aus den Kenntnissen über  $A$ ,  $a$  und  $b$  schließen wir

$$(15) \quad \gamma_i + \gamma_j + \pi a_{ij} = b_{ij} \quad \forall \{i,j\} \in E_a,$$

$$(16) \quad \gamma_i + \gamma_j = b_{ij} \quad \text{sonst.}$$

Seien  $u,v,w \in W$  beliebig, dann gilt nach Voraussetzung und (12)

$$\gamma_u + \gamma_v + \pi a = \beta,$$

$$\gamma_u + \gamma_w + \pi a = \beta,$$

$$\gamma_v + \gamma_w + \pi a = \beta.$$

Daraus folgt

$$(17) \quad \gamma_w = \frac{\beta - \pi a}{2} \quad \forall w \in W.$$

Da es nach Voraussetzung zu jedem  $i \in V-W$  ein  $w \in W$  gibt mit  $\{w,i\} \in E_a$ , folgt aus (16) und (13)

$$(18) \quad \gamma_i = \frac{\pi a - \beta}{2} \quad \forall i \in V-W.$$

Ohne Schwierigkeiten können wir eine Tour  $T \in H$  finden, die eine Kante  $\{k+i,k+j\}$

mit  $i, j \in W$  enthält, nach Voraussetzung gilt  $\{k+i, k+j\} \notin E_a$ . Aus (16), (18) und (14) folgt  $0 = \gamma_{k+i} + \gamma_{k+j} = \pi\alpha - \beta$  und damit

$$\beta = \pi\alpha \quad , \quad \pi = \frac{\beta}{\alpha}$$

und  $\gamma_i = 0 \quad \forall i \in V$ .

Daraus ergibt sich  $b = \pi\alpha$ ,  $b_0 = \pi\alpha_0$ .

f) Wir definieren nun  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n+4}$  durch

$\gamma'_i := \gamma_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\gamma'_{n+1} := \gamma'_{n+3} := \gamma'_{n+4} = 0$ ,  $\gamma'_{n+2} := \alpha - \beta$  und setzen  $\pi' := \pi$ .

Der Übersichtlichkeit halber zerlegen wir die Vektoren  $d \in \mathbb{R}^{|E'|}$  wie folgt

$$d = (d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | d_5 | d_6 | d_7 | d_8 | d_9 | d_{10} | d_{11})$$

mit

$$d_1 = (d_{12}, d_{13}, \dots, d_{n-1, n})$$

$$d_2 = (d_{i, n+1})_{i \in V-W}$$

$$d_3 = (d_{i, n+1})_{i \in W}$$

$$d_4 = (d_{i, n+2})_{i \in V-W}$$

$$d_5 = (d_{i, n+2})_{i \in W \cup \{n+1\}}$$

$$d_6 = (d_{i, n+3})_{i \in V-W}$$

$$d_7 = (d_{i, n+3})_{i \in W}$$

$$d_8 = (d_{n+1, n+3}, d_{n+2, n+3})$$

$$d_9 = (d_{i, n+4})_{i \in V-W}$$

$$d_{10} = (d_{i, n+4})_{i \in W}$$

$$d_{11} = (d_{n+1, n+4}, d_{n+2, n+4}, d_{n+3, n+4})$$

Sei  $I_k$  die  $(k, k)$ -Einheitsmatrix, dann gilt nach (1) - (11)

$$\gamma'A' + \pi'a' = \gamma' \begin{pmatrix} A & | & I_n & | & & | & & | & & | & & | \\ \hline 0 \dots 0 & | & 1 \dots 1 & | & I_{n+1} & | & I_{n+2} & | & I_{n+3} & | & & | \\ \hline 0 \dots 0 & | & & | & 1 \dots 1 & | & & | & & | & & | \\ \hline 0 \dots 0 & | & & | & & | & 1 \dots 1 & | & & | & & | \\ \hline 0 \dots 0 & | & & | & & | & & | & 1 \dots 1 & | & & | \\ \hline \end{pmatrix} + \pi'a'$$

$$\begin{aligned} &= (\gamma A | 0, \dots, 0 | 0, \dots, 0 | \alpha - \beta, \dots, \alpha - \beta | \alpha - \beta, \dots, \alpha - \beta | 0, \dots, 0 | 0, \dots, 0 | 0, \alpha - \beta | 0, \dots, 0 | 0, \dots, 0 | 0, \alpha - \beta, 0) \\ &+ (\pi\alpha | 0, \dots, 0 | \pi\alpha, \dots, \pi\alpha | 0, \dots, 0 | \pi\alpha, \dots, \pi\alpha | 0, \dots, 0 | 0, \dots, 0 | \pi\alpha, 0 | 0, \dots, 0 | 0, \dots, 0 | 0, \pi\alpha, 0) \\ &= (b | 0, \dots, 0 | \beta, \dots, \beta | \alpha - \beta, \dots, \alpha - \beta | \alpha, \dots, \alpha | 0, \dots, 0 | 0, \dots, 0 | \beta, \alpha - \beta | 0, \dots, 0 | 0, \dots, 0 | 0, \alpha, 0) \\ &= b' \end{aligned}$$

und weiter gilt

$$2 \sum_{j=1}^{n+4} \gamma_j' + \pi' a_0' = 2\alpha - 2\beta + \pi a_0 + 3\beta = b_0 + 2\alpha + \beta = b_0'.$$

Damit haben wir erhalten:

$$c' = b' - \lambda A' = (\gamma' - \lambda') A' + \pi' a', \quad c_0' = 2 \sum_{j=1}^{n+4} (\gamma_j' - \lambda_j') + \pi' a_0',$$

und wir sind mit Satz 4.4 fertig.  $\square$

Satz 20.4.

Sei  $a x \leq a_0$  eine Facette von  $Q_T^n$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Sei  $w \in V$  in genau zwei maximalen Cliques  $[W, C]$ ,  $[W', C']$  von  $[V_a, E_a]$  enthalten und gelte

$$\begin{aligned} \{w\} &= W \cap W', \\ |\bar{W}'| &= |W'| - 1, \\ |W| &\geq 3, \\ |V - (W \cup W')| &\geq 2, \\ a_{ij} &= \alpha \quad \forall \{i, j\} \in E_a \text{ mit } \{i, j\} \cap W' \neq \emptyset, \\ a_{ij} &\geq \alpha \quad \forall \{i, j\} \in C. \end{aligned}$$

Ferner möge es voneinander verschiedene Knoten  $w_1, w_2 \in W$  und  $i_1, i_2 \in V - (W \cup W')$  geben mit  $\{w_1, i_1\}, \{w_2, i_2\} \notin E_a$ .

Ist  $m \geq 1$  und  $a_0' := a_0 + 2m\alpha$ ,

$$a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & 1 \leq i < j \leq n, \\ \alpha & \forall i \in W \Delta W', j \in \{n+1, \dots, n+m\}, \\ 2\alpha & \forall i, j \in \{w, n+1, \dots, n+m\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist  $a'x' \leq a_0'$  eine Facette von  $Q_T^{n+m}$ .

Beweis:

Man sieht sofort, daß  $a'x' \leq a_0'$  eine gültige Ungleichung bezüglich  $Q_T^{n+m}$  ist.

Sei  $H_a := \{x' \in Q_T^{n+m} \mid a'x' = a_0'\}$ ,  $H' := \{T \in T_{n+m} \mid x^T \in H_a\}$ .

O.B.d.A. sei  $w = n$  und  $n-1 \in W' - W$ .

Sei  $c'x' = c_0'$  eine beliebige Hyperebene, die  $H_a$  enthält.

Sei

- (1)  $b_{i, n+m}' = 2\alpha \quad i = n, \dots, n+m-1,$
- (2)  $b_{i, n+m}' = \alpha \quad \forall i \in W \Delta W',$
- (3)  $b_{i, n+m}' = 0 \quad \forall i \in V - (W \cup W')$
- (4)  $b_{n-1, n}' = \alpha.$

Nach Folgerung 15.2 gibt es einen Vektor  $\lambda' \in \mathbb{R}^{n+m}$ , so daß  $b' := c' + \lambda'A'$  die in (1) - (4) festgelegten Komponenten enthält; sei  $b'_0 := c'_0 + 2 \sum_{j=1}^{n+m} \lambda'_j$ , dann gilt  $H_a, c \{x' \mid b'x' = b'_0\}$ . Wir zeigen wieder, daß es  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n+m}$  und  $\pi' \in \mathbb{R} - \{0\}$  gibt, so daß  $b' = \gamma'A' + \pi'a'$ ,  $b'_0 = 2 \sum_{j=1}^{n+m} \gamma'_j + \pi'a'_0$ , und sind dann wie üblich nach Satz 4.4 fertig.

a) Nach Lemma 19.18 gibt es zu  $n-1 \in W'-W = \overset{0}{W'}$  und jedem  $i \in V - \{n, n-1\}$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[n-1, n, i]$  enthält.

a<sub>1</sub>) Ersetzen wir zum einen die Kante  $\{n, i\}$  durch die Kette  $[n, n+1, \dots, n+m, i]$  zum anderen  $\{n-1, n\}$  durch  $[n-1, n+m, n+m-1, \dots, n+1, n]$ , so sind die daraus resultierenden  $(n+m)$ -Touren  $T_1, T_2$  aus  $H'$ . Wegen  $H_a, c \{x' \in \mathbb{R}^{E'} \mid b'x' = b'_0\}$  folgt aus (2), (4)

$0 = b'_0 - b'_0 = b'x^{T_1} - b'x^{T_2} = b'_{n-1, n} + b'_{i, n+m} - b'_{n-1, n+m} - b'_{in} = b'_{i, n+m} - b'_{in}$   
und damit aus (2) und (3)

$$(5) \quad b'_{in} = 0 \quad \forall i \in V - (W \cup W'),$$

$$(6) \quad b'_{in} = \alpha \quad \forall i \in W \Delta W'.$$

a<sub>2</sub>) Ersetzen wir, falls  $m > 1$ , in der Tour  $T \in H$  die Kette  $[n-1, n, i]$  durch die Kette  $[n-1, n+m-1, n+m-2, \dots, n+1, n, n+m, i]$ , so ist die neue  $(n+m)$ -Tour  $T_3$  nach Konstruktion aus  $H'$ . Aus (1), (2), (3), (5) bzw. (6) folgt

$$0 = b'x^{T_3} - b'x^{T_2} = b'_{n-1, n+m-1} + b'_{n, n+m} + b'_{i, n+m} - b'_{n-1, n+m} - b'_{in} - b'_{n+m-1, n+m} \\ = b'_{n-1, n+m-1} - \alpha,$$

analog erhalten wir

$$(7) \quad b'_{n-1, n+i} = \alpha \quad i = 1, \dots, m.$$

a<sub>3</sub>) Ersetzen wir in  $T$  die Kette  $[n-1, n, i]$  durch die Kette  $[n-1, n+m-1, \dots, n+1, n+m, n, i]$ , so ist  $T_4 \in H'$  und

$$0 = b'x^{T_4} - b'x^{T_3} = b'_{in} + b'_{n+1, n+m} - b'_{i, n+m} - b'_{n, n+1} = 2\alpha - b'_{n, n+1},$$

analog folgt

$$(8) \quad b'_{n, n+i} = 2\alpha \quad i = 1, \dots, m.$$

a<sub>4</sub>) Ersetzen wir in  $T$   $[n-1, n, i]$  durch die Kette  $[n-1, n+m, n, n+1, \dots, n+m-1, i]$ , so ist die neue  $(n+m)$ -Tour  $T_5$  aus  $H'$  und

$$0 = b'x^{T_5} - b'x^{T_1} = b'_{n-1, n+m} + b'_{n, n+m} + b'_{i, n+m-1} - b'_{n-1, n} - b'_{n+m-1, n+m} - b'_{i, n+m} \\ = b'_{i, n+m-1} - b'_{i, n+m},$$

analog folgt

$$(9) \quad b'_{i, n+j} = \alpha \quad \forall i \in W \Delta W', \quad j = 1, \dots, m,$$

$$(10) \quad b'_{i, n+j} = 0 \quad \forall i \in V - (W \cup W'), \quad j = 1, \dots, m.$$

$a_5$ ) Ersetzen wir in  $T [n-1, n, i]$  durch  $[n-1, n+1, n, n+2, \dots, n+m, i]$ , dann ist  $T_6 \in H'$ , und es folgt aus (4), (7), (8)

$$0 = b'x^{T_1} - b'x^{T_6} = b'_{n-1, n} + b'_{n+1, n+2} - b'_{n-1, n+1} - b'_{n, n+2} = b'_{n+1, n+2} - 2\alpha.$$

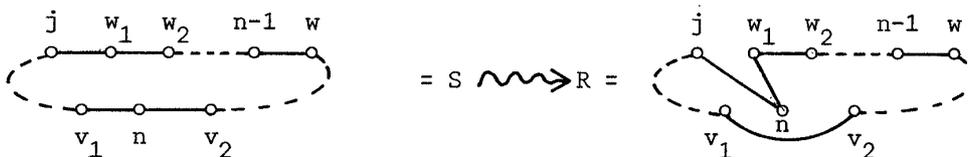
Analog schließen wir

$$(11) \quad b'_{n+i, n+j} = 2\alpha \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

b) Nach Lemma 19.1 bzw. Lemma 19.5 angewandt auf  $W'$  (hier gilt

$|W'| = |V - (W \cup W')| \geq 2$ ) gibt es zu  $n-1 \in W' - W = \overset{\circ}{W}'$  und zu jedem Knoten  $w \in W - W'$  eine Tour  $S \in H$ , die die Kante  $\{n-1, w\}$  enthält. Nach Lemma 19.17 angewandt auf  $W'$  enthält  $S$  entweder eine hamiltonsche Kette in  $W'$  oder eine solche in  $\overset{\circ}{W}'$ .

Enthält  $S$  eine hamiltonsche Kette in  $W'$ , so können wir durch Umordnung der Knoten von  $W'$  erreichen, daß diese in  $n \in W \cap W'$  endet. Enthält  $S$  eine hamiltonsche Kette in  $\overset{\circ}{W}'$ , so konstruieren wir eine neue Tour  $R$  wie folgt



wobei  $[w_1, \dots, n-1]$  die hamiltonsche Kette in  $\overset{\circ}{W}'$  ist. Es ist  $a_{jw_1} = 0$ ,  $a_{nw_1} = \alpha$ ,  $a_{jn} \geq 0$ . Gilt  $\{n, v_1\}, \{n, v_2\} \in E_a$ , dann ist nach Voraussetzung  $v_1, v_2 \in W$  und ebenfalls nach Voraussetzung  $a_{nv_1} = a_{nv_2} = \alpha$  und  $a_{v_1v_2} \geq \alpha$ . Es folgt damit  $ax^R - ax^S = a_{jn} + a_{nw_1} + a_{v_1v_2} - a_{jw_1} - a_{nv_1} - a_{nv_2} \geq 0$ , das aber bedeutet:  $R \in H$ .

Damit wissen wir, daß es eine Tour  $S \in H$  gibt, die eine Kette

$[n, w_1, \dots, w_k, n-1, w]$  enthält, wobei  $\{w_1, \dots, w_k, n-1\} = \overset{\circ}{W}'$ ,  $w \in W$  gilt.

Ersetzen wir diese Kette durch  $[n, n+1, \dots, n+m, w_1, \dots, w_k, n-1, w]$  bzw. durch

$[n, w_1, \dots, w_k, n-1, n+1, \dots, n+m, w]$ , so sind diese  $(n+m)$ -Touren  $S_1, S_2$  nach Konstruktion aus  $H'$ . Mithin gilt

$$\begin{aligned} 0 &= b'x^{S_1} - b'x^{S_2} = b'_{n, n+1} + b'_{w_1, n+m} + b'_{w, n-1} - b'_{w_1 n} - b'_{n-1, n+1} - b'_{w, n+m} \\ &= b'_{w, n-1}. \end{aligned}$$

Analog folgt

$$(12) \quad b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in W' - W, \quad \forall w \in W - W'.$$

c) Sei  $b \in \mathbb{R}^{|E|}$  definiert durch  $b_{ij} := b'_{ij} \quad 1 \leq i < j \leq n$  und  $b_o := b'_o - 2m\alpha$ .

Jede Tour  $T \in H$  enthält eine Kante  $\{n, i\}$ ,  $i \in V - \{n\}$ . Ersetzen wir diese Kante durch die Kette  $[n, n+1, \dots, n+m, i]$ , dann ist die so erhaltene  $(n+m)$ -Tour  $T'$  aus  $H'$ , das ergibt

$$b'x^{T'} - bx^T = \sum_{i=0}^{m-1} b'_{n+i, n+i+1} + b'_{i, n+m} - b'_{in} = 2m\alpha.$$

Also folgt  $bx^T = b_0 \quad \forall T \in H$ .

Da nun aber  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $Q_T^n$  ist, existieren nach Satz 4.4  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b = \gamma A + \pi a \quad \text{und} \quad b_0 = 2 \sum_{j=1}^n \gamma_j + \pi a_0.$$

Aus der Struktur von A und  $E_a$  folgt

$$\begin{aligned} \gamma_i + \gamma_j + \pi a_{ij} &= b_{ij} & \forall \{i,j\} \in E_a, \\ \gamma_i + \gamma_j &= b_{ij} & \text{sonst.} \end{aligned}$$

Aus der teilweisen Kenntnis von a und b können wir schließen (siehe (4), (6), (12)), wenn  $w \in W - W'$  beliebig ist:

$$\begin{aligned} \gamma_n + \gamma_{n-1} + \pi \alpha &= \alpha, \\ \gamma_n + \gamma_w + \pi \alpha &= \alpha, \\ \gamma_w + \gamma_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt  $\gamma_n = \alpha - \pi \alpha$ ,  $\gamma_w = \gamma_{n-1} = 0$ .

Ist  $i \in W \Delta W'$ , so folgt aus (6)

$$\alpha = \pi \alpha + \gamma_n + \gamma_i = \pi \alpha + \gamma_i.$$

Ist  $i \in V - (W \cup W')$ , so folgt aus (5)

$$0 = \gamma_n + \gamma_i = \alpha - \pi \alpha + \gamma_i.$$

Mithin

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \alpha - \pi \alpha \\ \gamma_i &= \pi \alpha - \alpha & i \in V - (W \cup W') \\ \gamma_i &= 0 & i \in W \Delta W'. \end{aligned}$$

Wir definieren nun  $\gamma' \in \mathbb{R}^{n+m}$  durch

$$\begin{aligned} \gamma'_i &:= \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \gamma'_{n+i} &:= \alpha - \pi \alpha, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

und setzen  $\pi' := \pi$ .

Zerlegen wir  $d \in \mathbb{R}^{|E'|}$  wie folgt

$$\begin{aligned} d &= (d_0 | d_1^1 | d_2^1 | d_3^1 | \dots | d_1^m | d_2^m | d_3^m) \\ d_0 &= (d_{12}, d_{13}, \dots, d_{n-1,n}) \\ d_1^1 &= (d_{i,n+1})_{i \in V - (W \cup W')} \\ d_2^1 &= (d_{i,n+1})_{i \in W \Delta W'} \\ d_3^1 &= (d_{n,n+1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1^m &= (d_{i,n+m})_{i \in V - (W \cup W')} \\ d_2^m &= (d_{i,n+m})_{i \in W \Delta W'} \\ d_3^m &= (d_{i,n+m})_{i \in \{n, \dots, n+m-1\}} \end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma'A' + \pi'a' &= (\gamma A | 0, \dots, 0 | \alpha - \pi\alpha, \dots, \alpha - \pi\alpha | 2(\alpha - \pi\alpha) | \dots \\ &\quad | 0, \dots, 0 | \alpha - \pi\alpha, \dots, \alpha - \pi\alpha | 2(\alpha - \pi\alpha), \dots, 2(\alpha - \pi\alpha)) \\ &+ (\pi a | 0, \dots, 0 | \pi\alpha, \dots, \pi\alpha | 2\pi\alpha | \dots \\ &\quad | 0, \dots, 0 | \pi\alpha, \dots, \pi\alpha | 2\pi\alpha, \dots, 2\pi\alpha) \\ &= (b | 0, \dots, 0 | \alpha, \dots, \alpha | 2\alpha | \dots | 0, \dots, 0 | \alpha, \dots, \alpha | 2\alpha, \dots, 2\alpha) \\ &= b' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^{n+m} \gamma_j^! + \pi'a'_0 &= 2 \sum_{j=1}^n \gamma_j + \pi a'_0 + \sum_{j=n+1}^{n+m} 2(\alpha - \pi\alpha) + 2m\pi\alpha \\ &= b'_0 + 2m\alpha \\ &= b'_0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} c' &= (\gamma' - \lambda')A' + \pi'a' \\ c'_0 &= 2 \sum_{j=1}^{n+m} (\gamma_j^! - \lambda_j^!) + \pi'a'_0 \end{aligned}$$

und der Beweis ist erledigt.  $\square$

Die meisten in der Literatur bekannten Liftungssätze für 0-1 Polytope (vergleiche etwa [Padberg, 1975], [Peled, 1975b], [Zemel, 1975]) sind mehr als Beweisverfahren denn als konkrete Facettengeneratoren zu sehen. Sie geben im allgemeinen ein ganzzahliges Programm an, durch dessen Lösung die Koeffizienten der höherdimensionalen Facetten bestimmt werden. In manchen Fällen - wie etwa in § 18 - können diese ganzzahligen Programme einfach gelöst werden, was aber leider nicht immer so ist. Die in diesem Paragraphen entwickelten Liftungssätze haben gegenüber den allgemeinen Liftungsverfahren natürlich den Nachteil, daß sie nur speziell für das symmetrische TSP gelten; dafür liefern sie aber bezüglich  $Q_T^n$  konkrete Liftungskoeffizienten, was bedeutet, daß man, ohne Rechenverfahren einschalten zu müssen, von einer "Basisfacette" ausgehend explizit höherdimensionale Facetten angeben kann. Dadurch haben wir die Möglichkeit, aus gewissen "Basisfacetten" ganze Klassen von Facetten entwickeln zu können.

§ 21. Liftungssätze für  $\tilde{Q}_T^n$

Analog zu den Aussagen über  $Q_T^n$  in § 20 wollen wir nun mit Hilfe der Lemmata aus § 19 Liftungssätze für  $\tilde{Q}_T^n$  beweisen. Die Schlußweisen und Beweistechniken sind die gleichen wie im vorigen Paragraphen. Die in 19.19 festgelegten Bezeichnungen  $[V_a, E_a]$ ,  $[W, C]$ ,  $\overset{\circ}{W}$ ,  $\overset{\circ}{W}$ ,  $\overset{\circ}{T}_n$ ,  $H_a$ ,  $H$  wollen wir auch in diesem Paragraphen verwenden.

Satz 21.1.

Sei  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Sei  $[W, C]$  eine maximale Clique von  $[V_a, E_a]$ , und sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt

- (a)  $|\overset{\circ}{W}| \geq 2$ ,  
 $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i, j\} \in C \text{ mit } \{i, j\} \cap \overset{\circ}{W} \neq \emptyset$ ,  
 $a_{ij} \geq \alpha \quad \forall \{i, j\} \in C \text{ mit } i, j \in \overset{\circ}{W}$ ,
- (b)  $|\overset{\circ}{W}| = 1$ ,  
 $a_{ij} = \alpha \quad \forall \{i, j\} \in E_a \text{ mit } \{i, j\} \cap W \neq \emptyset$   
 $ax \leq a_0$  keine Gradbeschränkung (18.2).

Sei

$$a'_0 := a_0 + \alpha, \quad a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & 1 \leq i < j \leq n, \\ \alpha & i \in W, j = n+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $\tilde{Q}_T^{n+1}$ .

Beweis:

Offensichtlich ist  $a'x' \leq a'_0$  eine gültige Ungleichung für  $\tilde{Q}_T^{n+1}$ .

Sei  $H_a := \{x' \in Q_T^{n+1} \mid a'x' = a'_0\}$ ,  $H' := \{T \in T_{n+1} \mid x^T \in H_a\}$ .

Sei  $b'x' = b'_0$  eine beliebige Hyperebene mit  $H_a \subset \{x' \mid b'x' = b'_0\} =: H_b$ .

Wir zeigen, daß  $b' = \pi a'$ ,  $b'_0 = \pi a'_0$  gilt, und haben mit Satz 4.4 (e) das gewünschte Ergebnis.

a) Sei  $w \in \overset{\circ}{W} \neq \emptyset$  fest gewählt und  $\beta := b'_{w, n+1}$ .

b) Da  $\tilde{Q}_T^n$  volldimensional und  $ax \leq a_0$  verschieden von jeder der Ungleichungen  $-x_{ij} \leq 0$  ist, gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - \{w\}$  eine Kantenmenge  $T \in H$ , die die Kante  $\{w, i\}$  enthält. Ist  $i \in V - W$ , dann ist nach Definition  $\{w, i\} \notin E_a$ . Folglich gilt

$$T' := (T - \{\{w, i\}\}) \cup \{\{w, n+1\}, \{n+1, i\}\} \in H',$$

$$T'' := (T - \{\{w, i\}\}) \cup \{\{w, n+1\}\} \in H'.$$

Aus  $H_a, c H_b$ , folgt

$$0 = b'_o - b'_o = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{i,n+1},$$

und damit

$$(1) b'_{i,n+1} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

c) Sei Bedingung (a) des Satzes erfüllt, speziell  $|\overset{o}{W}| \geq 2$ .

$c_1$ ) Zu jedem Knoten  $v \in \overset{o}{W} - \{w\}$  und jedem Knoten  $i \in V-W$  gibt es nach Lemma 19.20 eine Kantenmenge  $T \in H$ , die die Kette  $[w,v,i]$  enthält. Aus  $a_{vi} = 0$  folgt

$$T' := (T - \{\{v,i\}\}) \cup \{\{v,n+1\}\} \in H',$$

$$T'' := (T - \{\{v,i\}, \{v,w\}\}) \cup \{\{v,n+1\}, \{w,n+1\}\} \in H'.$$

Damit gilt wegen  $H_a, c H_b$ ,

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{vw} - b'_{w,n+1} = b'_{vw} - \beta.$$

Es folgt

$$(2) b'_{vw} = \beta \quad \forall v \in \overset{o}{W}.$$

$c_2$ ) Sei  $T \in H$  mit  $[v,w,i] \in T$ , dann folgt analog zu  $c_1$ )

$$(3) b'_{v,n+1} = \beta \quad \forall v \in \overset{o}{W}.$$

$c_3$ ) Wegen  $|\overset{o}{W}| \geq 2$  ist  $ax \leq a_o$  verschieden von den Gradbeschränkungen, also existiert nach Lemma 19.23 zu jedem Knoten  $u \in \overset{o}{W} - \overset{o}{W}$  ein Knoten  $i \in V-W$  mit  $\{u,i\} \notin E_a$ . Sei  $T \in H$  mit  $\{u,i\} \in T$ ; durch simple Kantenvertauschung können wir aufgrund der Voraussetzungen erreichen, daß  $T$  eine Kante  $\{v,w\}$  enthält mit  $v \in \overset{o}{W}$ . Dann gilt

$$T' := (T - \{\{u,i\}\}) \cup \{\{u,n+1\}\} \in H',$$

$$T'' := (T - \{\{u,i\}, \{v,w\}\}) \cup \{\{v,n+1\}, \{w,n+1\}\} \in H',$$

und damit nach (2), (3)

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{u,n+1} + b'_{vw} - b'_{v,n+1} - b'_{w,n+1} = b'_{u,n+1} - \beta.$$

Es folgt

$$(4) b'_{u,n+1} = \beta \quad \forall u \in \overset{o}{W} - \overset{o}{W}.$$

$c_4$ ) Zu jedem Knoten  $v \in \overset{o}{W} - \{w\}$  und jedem Knoten  $i \in V - \{v,w\}$  gibt es nach Lemma 19.20 eine Kantenmenge  $T \in H$ , die die Kette  $[v,w,i]$  enthält. Dann gilt

$$T' := (T - \{\{v,w\}\}) \cup \{\{v,n+1\}, \{w,n+1\}\} \in H',$$

$$T'' := (T - \{\{w,i\}\}) \cup \{\{w,n+1\}, \{i,n+1\}\} \in H',$$

und mit (3)

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{wi} + b'_{v,n+1} - b'_{vw} - b'_{i,n+1} = b'_{wi} - b'_{i,n+1}.$$

Aus (1), (3), (4) folgt

$$(5) b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in V-W,$$

$$(6) b'_{vw} = \beta \quad \forall v \in \overset{o}{W} - \{w\}.$$

d) Sei Bedingung (b) des Satzes erfüllt, und sei  $\overset{\circ}{W} = \{w\}$ . Zusätzlich möge gelten  $\{v\} = W - \overset{\circ}{W}$ .

d<sub>1</sub>) Nach Lemma 19.23 gibt es einen Knoten  $i \in V - W$  mit  $\{v, i\} \notin E_a$ . Sei  $T \in H$  mit  $\{v, i\} \in T$ . Durch Vertauschung von Kanten können wir aufgrund der Voraussetzungen offensichtlich ohne Schwierigkeiten erreichen, daß die Kette  $[w, v, i]$  in  $T$  enthalten ist. Definieren wir  $T', T''$  wie in c<sub>1</sub>), so folgt analog

$$b'_{vw} = \beta$$

d<sub>2</sub>) Analog zu c<sub>2</sub>) folgt mit Lemma 19.21

$$b'_{v, n+1} = \beta$$

d<sub>3</sub>) Zu jedem Knoten  $i \in V - W$  gibt es nach Lemma 19.21 eine Kantenmenge  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält. Definieren wir  $T', T'' \in H'$  wie in c<sub>4</sub>), so folgt

$$b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in V - W.$$

e) Sei Bedingung (b) erfüllt, sei  $\overset{\circ}{W} = \{w\}$ , und es möge  $|\overset{\circ}{W} - \overset{\circ}{W}| \geq 2$  gelten.

e<sub>1</sub>) Nach Lemma 19.23 existiert zu jedem Knoten  $v \in W - \overset{\circ}{W}$  ein Knoten  $i \in V - W$  mit  $\{v, i\} \notin E_a$ . Sei  $T \in H$  mit  $\{v, i\} \in T$ ; o.B.d.A. können wir annehmen, daß  $T$  eine Tour ist und die Kette  $[w', w, w'']$  enthält. Dann gilt

$$T' := (T - \{\{v, i\}, \{w, w'\}\}) \cup \{\{w, n+1\}, \{w', n+1\}\} \in H',$$

$$T'' := (T - \{\{v, i\}, \{w, w'\}\}) \cup \{\{v, n+1\}, \{w', n+1\}\} \in H',$$

und damit

$$0 = b'x^{T''} - b'x^{T'} = b'_{v, n+1} - b'_{w, n+1},$$

also folgt

$$b'_{v, n+1} = \beta \quad \forall v \in W - \overset{\circ}{W}.$$

e<sub>2</sub>) Nach Lemma 19.21 gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - W$  einen Knoten  $v \in W - \overset{\circ}{W}$  und eine Kantenmenge  $S \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält. Dann gilt

$$S' := (S - \{\{w, i\}\}) \cup \{\{w, n+1\}\} \in H',$$

$$S'' := (S - \{\{w, i\}, \{v, w\}\}) \cup \{\{v, n+1\}, \{w, n+1\}\} \in H' \quad \text{und}$$

$$0 = b'x^{S'} - b'x^{S''} = b'_{vw} - b'_{v, n+1} = b'_{vw} - \beta.$$

Nach Lemma 19.22 gibt es nun zu diesem Knoten  $v \in W - \overset{\circ}{W}$  und zu jedem Knoten  $u \in (W - \overset{\circ}{W}) - \{v\}$  eine Tour  $T \in H$ , die  $[v, w, u]$  enthält. Dann folgt

$$T' := (T - \{\{v, w\}\}) \cup \{\{v, n+1\}, \{w, n+1\}\} \in H',$$

$$T'' := (T - \{\{w, u\}\}) \cup \{\{w, n+1\}, \{u, n+1\}\} \in H' \quad \text{und}$$

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{uw} + b'_{v, n+1} - b'_{vw} - b'_{u, n+1} = b'_{uw} - \beta.$$

Das ergibt

$$b'_{uw} = \beta \quad \forall u \in W - \overset{\circ}{W}.$$

e<sub>3</sub>) Nach Lemma 19.21 gibt es zu jedem Knoten  $i \in V-W$  einen Knoten  $v \in W-W$  und eine Kantenmenge  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält. Es gilt

$$T' := (T - \{v, w\}) \cup \{v, n+1, w, n+1\} \in H',$$

$$T'' := (T - \{w, i\}) \cup \{w, n+1\} \in H',$$

daraus folgt

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{wi} + b'_{v, n+1} - b'_{vw} = b'_{wi},$$

und damit

$$b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

f) In a) - e) haben wir somit gezeigt: Es gibt einen Knoten  $w \in W$  mit

$$b'_{vw} = \beta \quad \forall v \in W - \{w\},$$

$$b'_{iw} = 0 \quad \forall i \in V-W,$$

außerdem gilt

$$b'_{v, n+1} = \beta \quad \forall v \in W,$$

$$b'_{i, n+1} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

Sei nun  $b \in \mathbb{R}^{|E|}$  definiert durch  $b_{ij} := b'_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $b_0 := b'_0 - \beta$ .

Sei  $T \in H$ ; enthält  $T$  eine Kante  $\{w, i\}$ ,  $i \in V - \{w\}$ , dann definieren wir

$T' := (T - \{w, i\}) \cup \{w, n+1, i, n+1\}$ , falls nicht, dann  $T' := T \cup \{w, n+1\}$ .

Es gilt damit  $T' \in H'$ , also folgt  $b'x^{T'} - bx^T = b'_{w, n+1} (+ b'_{i, n+1} - b'_{iw}) = \beta$ .

Das bedeutet  $H_a \subset \{x \mid bx = b\}$ .

Da  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$  ist, gibt es nach Satz 4.4 eine Zahl  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b_0 = \pi a_0, \quad b = \pi a.$$

Für  $v \in W - \{w\}$  gilt

$$\beta = b_{vw} = \pi a_{vw} = \pi \alpha, \quad \text{d.h.} \quad \pi = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Aus  $b'_{i, n+1} = \beta$ ,  $a'_{i, n+1} = \alpha$   $\forall i \in W$ ,

$b'_{i, n+1} = 0$ ,  $a'_{i, n+1} = 0$   $\forall i \in V - W$

folgt damit

$$b' = \pi a', \quad b'_0 = \pi a'_0,$$

womit nach Satz 4.4 die Behauptung gezeigt ist.  $\square$

Satz 21.2.

Sei  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Sei der Knoten  $w \in V$  in genau zwei maximalen Cliques  $[W, C]$ ,  $[W', C']$  von  $[V_a, E_a]$  enthalten und gelte

$$\begin{aligned} \{w\} &= W \cap W', \\ |\overset{\circ}{W}'| &= |W'| - 1, \\ |W| &\geq 3, \\ a_{ij} &= \alpha \quad \forall \{i, j\} \in E_a \text{ mit } \{i, j\} \cap W' \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Sei  $m \geq 1$  und  $a'_0 := a_0 + 2m\alpha$  sowie

$$a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & 1 \leq i < j \leq n, \\ \alpha & \forall i \in W \Delta W', j \in \{n+1, \dots, n+m\}, \\ 2\alpha & \forall i, j \in \{w, n+1, \dots, n+m\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $\tilde{Q}_T^{n+m}$ .

Beweis:

Ohne Schwierigkeiten sehen wir, daß  $a'x' \leq a'_0$  eine gültige Ungleichung für  $\tilde{Q}_T^{n+m}$  ist.

Sei  $H_a := \{x' \in \tilde{Q}_T^{n+m} \mid a'x' = a'_0\}$  und  $H' := \{T \in \tilde{T}_{n+m} \mid x^T \in H_a\}$ .

Sei  $b'x' \leq b'_0$  eine beliebige Hyperebene mit  $H_a, c \{x' \in \tilde{Q}_T^{n+m} \mid b'x' = b'_0\} =: H_b$ .

Wir werden zeigen, daß unsere Voraussetzungen  $b' = \pi a'$ ,  $b'_0 = \pi a'_0$  implizieren, womit nach Satz 4.4 die Behauptung bewiesen ist.

Sei  $w$  derjenige Knoten, der in  $W \cap W'$  liegt.

a) Zu jedem Knoten  $i \in V - (W \cup W')$  (diese Menge ist nach Lemma 19.25 nicht leer) gibt es, da  $ax \leq a_0$  verschieden ist von den Facetten  $-x_{ij} \leq 0$ , eine Kantenmenge  $T \in H$  mit  $\{w, i\} \in T$ . Da  $w$  nach Voraussetzung in keiner weiteren Clique von  $[V_a, E_a]$  liegt, folgt  $\{w, i\} \notin E_a$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} T' &:= (T - \{\{w, i\}\}) \cup [w, n+1, n+2, \dots, n+m] \in H', \\ T'' &:= T' \cup \{\{n+m, i\}\} \in H'. \end{aligned}$$

Aus  $H_a, c H_b$  folgt

$$0 = b'_0 - b'_0 = b'x^{T''} - b'x^{T'} = b'_{i, n+m},$$

analog folgt

$$(1) b'_{i, n+j} = 0 \quad \forall i \in V - (W \cup W'), \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

b) Sei  $v$  ein fest gewählter Knoten aus  $W' - W$ , und sei

$$\beta := b'_{vw}.$$

$b_1$ ) Nach Lemma 19.25 ist  $V-(W \cup W') \neq \emptyset$ . Zu  $i \in V-(W \cup W')$  gibt es nach Lemma 19.26 eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält. Dann ist

$$\begin{aligned} T' &:= (T - \{\{w, i\}\}) \cup [w, n+1, \dots, n+m] \in H', \\ T'' &:= (T - \{\{w, i\}, \{v, w\}\}) \cup [v, n+m, \dots, n+1, w] \in H', \\ 0 = b'x^{T''} - b'x^{T'} &= b'_{v, n+m} - b'_{vw} = b'_{v, n+m} - \beta. \end{aligned}$$

Analog folgt

$$(2) \quad b'_{v, n+j} = \beta \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

$b_2$ ) Sei  $T \in H$  wie in  $b_1$ ) gewählt. Nach Lemma 19.24 enthält  $T$  eine Hamiltonsche Kette in  $W'$  oder in  $\overset{0}{W}'$ ; da die Kette  $[v, w, i]$  in  $T$  enthalten ist, aber  $i \notin W'$ , muß  $T$  eine hamiltonsche Kette in  $W'$  enthalten, die in  $w \in \overset{0}{W}'$  endet.

Durch Umordnen können wir erreichen, daß die Kette in einem beliebigen Knoten  $u \in W' - \{v, w\}$  beginnt. Hat  $u$  einen weiteren Nachbarn  $j \in V - W'$  in  $T$ , so gilt  $\{u, j\} \notin E_a$  nach Voraussetzung und damit

$$\begin{aligned} T' &:= (T - \{\{u, j\}, \{w, i\}\}) \cup [w, n+1, \dots, n+m] \in H', \\ T'' &:= (T - \{\{u, j\}, \{w, i\}, \{v, w\}\}) \cup [u, n+m, \dots, n+1, w] \in H', \\ 0 = b'x^{T''} - b'x^{T'} &= b'_{u, n+m} - b'_{vw} = b'_{u, n+m} - \beta. \end{aligned}$$

Analog schließen wir

$$(3) \quad b'_{u, n+j} = \beta \quad \forall u \in \overset{0}{W}', \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

c) Nach Lemma 19.27 gibt es Knoten  $w_1, w_2 \in W$  und eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[w_1, w, w_2]$  enthält. Nach Lemma 19.24 enthält  $T$  eine Kette  $[v_1, \dots, v_k]$  in  $\overset{0}{W}'$ . Seien  $j_1$  bzw.  $j_k$  die weiteren Nachbarn von  $v_1$  bzw.  $v_k$  in der Tour  $T$ . Nach Voraussetzung gilt  $\{v_1, j_1\}, \{v_k, j_k\} \notin E_a$ , also können wir diese beiden Kanten aus  $T$  entfernen, und es gilt weiterhin  $T \in H$ . Durch Umordnen der Knoten in der Kette  $[v_1, \dots, v_k]$  können wir erreichen, daß  $v_1 = v$  gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} T' &:= (T - \{\{w_1, w\}\}) \cup [w_1, n+1, \dots, n+m, w] \in H', \\ T'' &:= (T - \{\{w_1, w\}\}) \cup [v_k, n+1, \dots, n+m, w] \in H', \\ b'x^{T'} - b'x^{T''} &= b'_{w_1, n+1} - b'_{v_k, n+1} = b'_{w_1, n+1} - \beta. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für den Knoten  $w_1 \in W$

$$b'_{w_1, n+j} = \beta \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Definieren wir  $T''' := (T'' - \{\{w, n+m\}\}) \cup \{\{w_1, n+m\}, \{w, v_1\}\} \in H'$ ,

so gilt mit  $v_1 = v$

$$0 = b'x^{T'''} - b'x^{T''} = b'_{w_1, n+m} + b'_{wv_1} - b'_{w, n+m} = 2\beta - b'_{w, n+m}.$$

Analog:

$$(4) \quad b'_{w, n+j} = 2\beta \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

d) Zu jedem Knoten  $i \in V - (W \cup W')$  gibt es nach Lemma 19.26 eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält. Sei

$$T' := (T - \{v, w\}) \cup [v, n+1, \dots, n+m, w] \in H',$$

$$T'' := (T - \{w, i\}) \cup [w, n+m, \dots, n+1] \in H',$$

$$T''' := (T - \{v, w, w, i\}) \cup [v, n+1, w] \cup [w, n+m, \dots, n+2] \in H',$$

dann folgt aus (3)

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{wi} + b'_{v, n+1} - b'_{vw} = b'_{wi},$$

und damit aus (4)

$$0 = b'x^{T''} - b'x^{T'''} = b'_{w, n+1} - b'_{wi} - b'_{n+1, n+2} = 2\beta - b'_{n+1, n+2}.$$

Analog folgt

$$(5) \quad b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in V - (W \cup W'),$$

$$(6) \quad b'_{n+i, n+j} = 2\beta \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

e) Zu jedem Knoten  $u \in W' - \{v, w\}$  bzw. zu  $u = v \in W'$ , falls  $|W'| = 2$ , und jedem Knoten  $i \in W - \{w\}$  gibt es eine Kantenmenge  $T \in H$ , die die Kante  $\{u, i\}$  enthält. Ohne Schwierigkeiten können wir  $T$  so umordnen, daß auch die Kante  $\{v, w\}$  in  $T$  enthalten ist. Es gilt

$$T' := (T - \{v, w, u, i\}) \cup [w, n+1, \dots, n+m, v] \in H',$$

$$T'' := (T - \{u, i\}) \cup [u, n+1, \dots, n+m, i] \in H'.$$

Aus (2), (3), (4) folgt

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{i, n+m} + b'_{u, n+1} + b'_{vw} - b'_{w, n+1} - b'_{v, n+m} = b'_{i, n+m} - \beta.$$

Analog folgt

$$(7) \quad b'_{i, n+j} = \beta \quad \forall i \in W - \{w\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

f) Nach Lemma 19.26 gibt es zu jedem  $i \in (W \cup W') - \{v, w\}$  eine Tour  $T \in H$ , die die Kette  $[v, w, i]$  enthält. Dann ist

$$T' := (T - \{v, w\}) \cup [v, n+1, \dots, n+m, w] \in H',$$

$$T'' := (T - \{w, i\}) \cup [w, n+m, \dots, n+1, i] \in H'.$$

Aus (2), (3) bzw. (7) folgt

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{wi} + b'_{v, n+1} - b'_{i, n+1} - b'_{vw} = b'_{wi} - \beta,$$

und somit

$$(8) \quad b'_{wi} = \beta \quad \forall i \in W \Delta W'.$$

g) Fassen wir die in (1) - (8) erhaltenen Ergebnisse über  $b'$  zusammen, so gilt:

$$b'_{ij} = \beta \quad \forall i \in W \Delta W', \quad \forall j \in \{w, n+1, \dots, n+m\},$$

$$b'_{ij} = 2\beta \quad \forall i, j \in \{w, n+1, \dots, n+m\},$$

$$b'_{ij} = 0 \quad \forall i \in V - (W \cup W'), \quad \forall j \in \{w, n+1, \dots, n+m\}.$$

h) Wir definieren nun  $b \in \mathbb{R}^{|E|}$  durch  $b_{ij} := b'_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $b_o := b'_o - 2m\beta$ .  
Ist  $T \in H$ , dann enthält  $T$  eine Kante  $\{w,i\}$ ,  $i \in V - \{w\}$  (folgt aus Lemma 19.24).  
Ändern wir  $T$  in  $T'$ , indem wir die Kante  $\{w,i\}$  durch die Kette  $[w, n+1, \dots, n+m, i]$   
ersetzen, so ist nach Konstruktion  $T' \in H'$  und somit  $b'x^{T'} = b'_o$  nach  
Voraussetzung. Daraus ergibt sich

$$b'x^{T'} - bx^T = \sum_{i=1}^{m-1} b'_{n+i, n+i+1} + b'_{w, n+1} + b'_{i, n+m} - b'_{wi} = 2m\beta.$$

Also folgt

$$H_a \subset \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid bx = b_o\}.$$

Da aber  $ax \leq a_o$  eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$  ist, gibt es nach Satz 4.4 ein  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$   
mit  $b = \pi a$ ,  $b_o = \pi a_o$ . Aus  $\beta = b_{vw} = \pi a_{vw} = \pi a$  folgt  $\pi = \frac{\beta}{\alpha}$ .

Aus g) kennen wir einige der Koeffizienten von  $b'$  und aus unseren Voraus-  
setzungen einige von  $a'$ , mit  $\pi = \frac{\beta}{\alpha}$  folgt  $b'_{i, n+j} = \beta = \pi a'_{i, n+j} \quad \forall i \in V,$   
 $j = 1, \dots, m$ , also ergibt sich  $b' = \pi a'$ ,  $b'_o = \pi a'_o$ , und wir sind mit  
Satz 4.4 fertig.  $\square$

## Kapitel 9. Facetten der symmetrischen Travelling Salesman Polytope

### § 22. Neue gültige Ungleichungen

Wie wir uns in § 16 überlegt haben, stehen zwei kombinatorische Optimierungs-  
probleme, nämlich das Spanning Tree Problem und das 2-Matching Problem, in  
besonders enger Beziehung zum STSP. Speziell haben wir gezeigt, daß für die  
zu diesen Problemen gehörigen Polytope gilt:

$$Q_T^n \subset Q_{2M}^n \cap Q_S^n,$$

$$\tilde{Q}_T^n \subset \tilde{Q}_{2M}^n \cap Q_S^n.$$

Damit sind insbesondere alle Facetten von  $Q_{2M}^n$  (siehe Satz 15.10),  $\tilde{Q}_{2M}^n$  (siehe  
Satz 14.6),  $Q_S^n$  (siehe Definition 16.1) gültige Ungleichungen für  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$ ;  
diese Tatsache legt natürlich nahe zu untersuchen, welche der 2-Matching- und  
der Kurzzyklen-Bedingungen auch "scharfe" Ungleichungen für das STSP liefern.  
Darüberhinaus hat V. Chvátal [1973a] eine Möglichkeit aufgezeigt, wie sich  
die 2-Matching-Ungleichungen (siehe § 14) bezüglich des STSP verallgemeinern  
lassen.

Definition 22.1.

Sei  $W_0, W_1, \dots, W_k \in V$ ,  $k \geq 1$ , und es gelte

- (a)  $|W_0 \cap W_i| = 1$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  
 (b)  $|W_i| \geq 2$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,

dann heißt  $C := \bigcup_{i=0}^k E(W_i)$  ein Chvátal-Kamm.  $W_0$  heißt Griff und die  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , heißen Zinken des Kamms.  $\square$

Bezeichnen wir mit  $\langle \frac{k}{2} \rangle$  die kleinste ganze Zahl größer oder gleich  $\frac{k}{2}$ , dann hat V. Chvátal für Kämmen die folgende Ungleichung abgeleitet:

Satz 22.2. [Chvátal, 1973a]

Für jeden Chvátal-Kamm  $C$  ist die Kammungleichung

$$\sum_{e \in C} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \langle \frac{k}{2} \rangle =: s(C)$$

eine gültige Ungleichung bezüglich  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$ .  $\square$

Lemma 22.3.

Die Kurzzyklus-Ungleichungen sind die Kammungleichungen mit  $|W_0| = 1$  und  $k = 1$ .

Beweis:

Sei  $W \in V$  und  $w \in W$  beliebig; definiere  $W_0 := \{w\}$ ,  $W_1 := W$ , dann ist

$C := E(W_0) \cup E(W_1) = E(W)$  und

$$\sum_{e \in E(W)} x_e = \sum_{e \in C} x_e \leq |W_0| + |W_1| - 1 - \langle \frac{1}{2} \rangle = |W| - 1. \quad \square$$

Da sich auch die Ungleichungen  $x_e \leq 1$  formal als Kurzzyklus-Bedingungen schreiben lassen und die 2-Matching-Ungleichungen offensichtlich in der Menge aller Kammungleichungen enthalten sind, umfassen die Kammungleichungen fast alle der bisher bekannten (sinnvollen) gültigen Ungleichungen bezüglich  $Q_T^n$  bzw.  $\tilde{Q}_T^n$ .

Wir wollen nun untersuchen, welche der Kammungleichungen dominiert sind, d.h. mit Sicherheit keine Facetten von  $Q_T^n$  bzw.  $\tilde{Q}_T^n$  liefern. Wir wenden dabei Satz 4.5 an und zeigen, daß es zu gewissen Kammungleichungen  $ax \leq a_0$  gültige Ungleichungen  $bx \leq b_0$ ,  $cx \leq c_0$  gibt mit  $a \leq b+c$ ,  $a_0 \geq b_0+c_0$ , bzw. daß es eine gültige Ungleichung  $bx \leq b_0$  gibt mit  $a \leq b$ ,  $a \not\equiv b$ ,  $a_0 \geq b_0$ . Dabei nennen wir einen Chvátal-Kamm dominiert, wenn die zugehörige Kammungleichung bezüglich  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  dominiert wird.

Lemma 22.4.

Ist  $C$  ein Chvátal-Kamm mit einelementigem Griff und mindestens zwei Zinken, so wird er dominiert.

Beweis:

Sei  $W_0 = \{w\}$ ,  $k \geq 2$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{e \in C} x_e &\leq \sum_{e \in \omega(w)} x_e + \sum_{i=1}^k \sum_{e \in E(W_i - \{w\})} x_e \\ &\leq 2 + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 2) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - (k-1) \\ &\leq s(C). \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 22.5.

Chvátal-Kämme mit nur einer Zinke und einem Griff mit mindestens zwei Knoten werden dominiert.

Beweis:

Sei  $\{w\} = W_0 \cap W_1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{e \in C} x_e &\leq \sum_{e \in \omega(w)} x_e + \sum_{e \in E(W_0 - W_1)} x_e + \sum_{e \in E(W_1 - W_0)} x_e \\ &\leq 2 + |W_0| - 2 + |W_1| - 2 \\ &= s(C). \quad \square \end{aligned}$$

Hieraus folgt bereits, daß keine der 2-Matching Facetten von  $Q_{2M}^n$  bzw.  $\tilde{Q}_{2M}^n$  (siehe Satz 15.10 bzw. Satz 14.6), die nur eine Zinke haben, Facette von  $Q_T^n$  bzw.  $\tilde{Q}_T^n$  sein kann.

Lemma 22.6.

Chvátal-Kämme mit einer geraden Anzahl von Zinken werden dominiert.

Beweis:

Ist  $|W_0| = 1$ , so folgt das bereits aus Lemma 22.4.

Sei  $|W_0| \geq 2$ . Dann gibt es einen Knoten  $w \in W_0$  und einen Knoten  $v \in V - W_0$ , so daß  $\{v, w\} \notin C$ . Definiere  $W_{k+1} := \{v, w\}$  und  $C' := \bigcup_{i=0}^{k+1} E(W_i)$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in C} x_e &\leq \sum_{e \in C'} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^{k+1} (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k+1}{2} \right\rangle \\
 &= |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) + 1 - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle - 1 \\
 &= s(C). \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 22.7.

Schneiden sich zwei Zinken im Griff, so wird der Chvátal-Kamm dominiert.

Beweis:

O.B.d.A nehmen wir an, daß sich die Zinken  $W_1, \dots, W_p$  im Griff schneiden.

Sei  $\{w\} = \bigcap_{i=0}^p W_i$ ,  $p \leq k$ . Falls  $\{w\} = W_0$ , sind wir mit Lemma 22.4 fertig.

Sei also  $|W_0| \geq 2$ , und wegen Lemma 22.5 und 22.6 können wir annehmen, daß  $k \geq 3$  gilt und  $k$  ungerade ist.

a)  $p = k$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in C} x_e &\leq \sum_{e \in \omega(w)} x_e + \sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i - \{w\})} x_e \\
 &\leq 2 + \sum_{i=0}^k (|W_i| - 2) \\
 &= |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - k \\
 &\leq s(C).
 \end{aligned}$$

b)  $2 \leq p < k$ . Definiere  $W'_0 := W_0 - \{w\}$ ,  $W'_i := W_i$ ,  $i = p+1, \dots, k$ ,

$C' := \bigcup_{i=p+1}^k E(W'_i) \cup E(W'_0)$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in C} x_e &\leq \sum_{e \in \omega(w)} x_e + \sum_{i=1}^p \sum_{e \in E(W_i - \{w\})} x_e + \sum_{e \in C'} x_e \\
 &\leq 2 + \sum_{i=1}^p (|W_i| - 2) + (|W_0| - 1) + \sum_{i=p+1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k-p}{2} \right\rangle \\
 &= |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) + 1 - p - \left\langle \frac{k-p}{2} \right\rangle \\
 &\leq s(C). \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 22.8.

Schneiden sich zwei Zinken außerhalb des Griffs, so ist der Chvátal-Kamm dominiert.

Beweis:

Sei  $w \in \bigcap_{i=1}^p W_i$ ,  $2 \leq p \leq k$ ,  $w \notin \bigcup_{i=p+1}^k W_i \cup W_0$ . Wegen Lemma 22.7 können wir annehmen, daß sich keine zwei Zinken im Griff schneiden.

Sei  $W'_0 = \bigcup_{i=0}^p W_i$ ,  $C' = \bigcup_{i=p+1}^k E(W_i) \cup E(W'_0)$ , dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{e \in C} x_e &\leq \sum_{e \in C'} x_e \leq |W'_0| + \sum_{i=p+1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k-p}{2} \right\rangle \\ &= |W_0| + \sum_{i=1}^p (|W_i| - 2) + 1 + \sum_{i=p+1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k-p}{2} \right\rangle \\ &= |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - p + 1 - \left\langle \frac{k-p}{2} \right\rangle \\ &\leq s(C). \quad \square \end{aligned}$$

Fassen wir die vorhergehenden Lemmata zusammen, so gilt

Satz 22.9.

Sei  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$ ,  $k \geq 1$  und  $C = \bigcup_{i=1}^k E(W_i)$  ein Chvátal-Kamm, dann wird die zugehörige Kammungleichung dominiert, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- (a)  $k = 1$  und  $|W_0| \geq 2$ ,
- (b)  $k \geq 2$  und  $|W_0| = 1$ ,
- (c)  $\exists i, j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ ,
- (d)  $k$  gerade.  $\square$

Da die Chvátal-Kämme mit  $|W_0| = 1$  und  $k = 1$  nach Lemma 22.3 gerade die Kurzzyklusbedingungen induzieren (bzw die trivialen Ungleichungen  $x_e \leq 1$ , falls  $|W_1| = 2$ ) und wir diese gesondert betrachten wollen, zählen wir diese von nun an nicht mehr zu den Kammungleichungen. Im weiteren können wir uns damit auf Chvátal-Kämme mit folgenden Eigenschaften beschränken:

- (a) Je zwei Zinken sind disjunkt.
- (b) Die Zinkenanzahl ist ungerade und größer gleich drei.

Wir wollen nun diese undominierten Chvátal-Kämme weiter verallgemeinern und definieren

Definition 22.10.

Sei  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$ , und gelte

- (a)  $|W_0 \cap W_i| \geq 1, \quad i = 1, \dots, k,$
- (b)  $|W_i - W_0| \geq 1, \quad i = 1, \dots, k,$
- (c)  $W_i \cap W_j = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq k,$
- (d)  $k \geq 3$  und ungerade,

dann heißt  $C = \bigcup_{i=1}^k E(W_i)$  ein Kamm,  $W_0$  heißt Griff, die  $W_i$  heißen Zinken des Kammes.  $\square$

Satz 22.11.

Sei  $C$  ein durch  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$  definierter Kamm. Dann ist die Kammungleichung

$$a^C x := \sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle =: s(C)$$

eine gültige Ungleichung bezüglich  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$ .

Beweis:

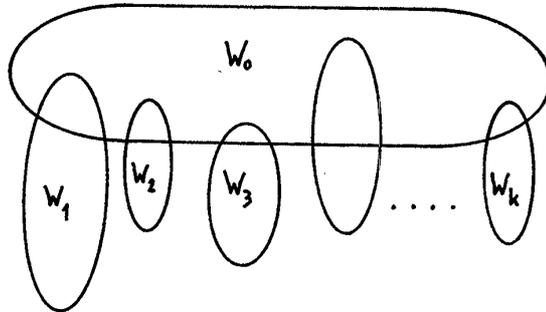
$$\begin{aligned} 2 \cdot a^C x &\leq \sum_{w \in W_0} \sum_{e \in \omega(w)} x_e + \sum_{i=1}^k \left( \sum_{e \in E(W_i)} x_e + \sum_{e \in E(W_i - W_0)} x_e + \sum_{e \in E(W_i \cap W_0)} x_e \right) \\ &\leq 2|W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1 + |W_i - W_0| - 1 + |W_i \cap W_0| - 1) \\ &= 2(|W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1)) - k, \end{aligned}$$

das heißt

$$a^C x \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \frac{k}{2}.$$

Da alle Ecken von  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  ganzzahlig sind, kann  $a^C x$  dort nur ganzzahlige Werte annehmen. Durch Abrundung folgt dann die Behauptung.  $\square$

Ein Kamm hat im allgemeinen folgendes Aussehen:



Im Unterschied zu allen bisher betrachteten Ungleichungen hat  $a^C$  nicht nur Koeffizienten aus  $\{0,1\}$ . Diejenigen Kanten aus  $C$ , die in  $E(W_0)$  und in einer der Kantenmengen  $E(W_i)$  enthalten sind, erhalten in  $a^C$  einen Koeffizienten 2. Allein die (nicht dominierten) Chvátal-Kammungleichungen haben keinen von 0 und 1 verschiedenen Koeffizienten.

Eine Möglichkeit, die der Autor längere Zeit für vielversprechend hielt, die obigen Kammungleichungen zu verallgemeinern, ist, die Zinken durch Kämmen zu ersetzen und auf diese Weise induktiv "Cliquesbäume" aufzubauen. Für diese Gebilde läßt sich eine ähnliche Ungleichung wie die Kammungleichung ableiten. Jedoch werden diese Ungleichungen immer von Kammungleichungen dominiert, sie tragen also nichts zu einer vollständigen Beschreibung von  $Q_T^n$  oder  $\tilde{Q}_T^n$  bei.

### § 23. Facetten von $Q_T^n$

Mit Hilfe der in § 20 bewiesenen Liftungssätze wollen wir nun zeigen, daß die Kurzzyklusbedingungen und die in Satz 22.11 angegebenen Kammungleichungen Facetten des Travelling Salesman Polytopen  $Q_T^n$  definieren.

#### Satz 23.1.

Für jedes  $n \geq 4$  und jede Knotenmenge  $W \subset V$  mit  $2 \leq |W| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  definieren die Kurzzyklusbedingungen

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$$

Facetten von  $Q_T^n$ .

#### Beweis:

Ist  $|W| = 2$ , so sind die Kurzzyklusbedingungen gerade die trivialen Ungleichungen  $x_{ij} \leq 1$ ,  $\{i,j\} = W$ . In Satz 18.5 haben wir gezeigt, daß diese Ungleichungen Facetten von  $Q_T^n$ ,  $n \geq 4$ , definieren.

Der von einer Kurzzyklusbedingung  $ax := \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  induzierte Untergraph  $[V_a, E_a]$  ist gerade der Graph  $[W, E(W)]$ , und dieser Graph ist selbst eine (maximale) Clique; außerdem ist  $|W| = |\overset{0}{W}| \geq 2$  und  $a_e = 1 \quad \forall e \in E(W)$ . Damit sind für alle Kurzzyklusbedingungen alle Voraussetzungen von Satz 20.1 (a) erfüllt.

Sei nun  $2 < |W| \leq \binom{n}{2}$ . O.B.d.A. sei  $W = \{1, 2, n-k, \dots, n\}$ . Nach Satz 18.5 ist  $x_{12} \leq 1$  Facette von  $Q_T^{n-k-1}$ . Nach obiger Bemerkung sind für diese Facette alle Voraussetzungen von Satz 20.1 (a) erfüllt; vermittels der in 20.1 angegebenen Liftungsvorschrift folgt, daß

$$a'x = \sum_{e \in E(W^{n-k})} x_e \leq 2 = |W^{n-k}| - 1, \quad \text{für } W^{n-k} := \{1, 2, n-k\}$$

eine Facette von  $Q_T^{n-k}$  ist. Durch weitere  $k$  sukzessive Anwendungen des Satzes 20.1 (a) auf analoge Art erhalten wir, daß  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  eine Facette von  $Q_T^n$  definiert.  $\square$

Anders als im Spanning Tree Problem sind jedoch jeweils zwei Kurzzyklusbedingungen bezüglich  $Q_T^n$  äquivalent.

Lemma 23.2.

Seien  $W, W' \subset V$ ,  $W \neq W'$ , und  $2 \leq |W| \leq n-2$ ,  $2 \leq |W'| \leq n-2$ , dann gilt:  
Die Kurzzyklusbedingungen

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \text{und} \quad \sum_{e \in E(W')} x_e \leq |W'| - 1$$

sind genau dann äquivalent bezüglich  $Q_T^n$ , wenn  $W' = V-W$  gilt.

Beweis:

" $\Leftarrow$ ": Wegen  $\omega(W) = \omega(V-W)$  und  $\sum_{w \in W} \sum_{e \in \omega(w)} x_e = 2|W|$  gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in E(V-W)} x_e \leq |V-W| - 1 \\ \Leftrightarrow & \sum_{e \in E(V-W)} x_e + \frac{1}{2} \left( \sum_{w \in W} \sum_{e \in \omega(w)} x_e \right) \leq |V-W| - 1 + |W| \\ \Leftrightarrow & \sum_{e \in E(V-W)} x_e + \frac{1}{2} \sum_{e \in \omega(w)} x_e + \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |V-W| + |W| - 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \left( \sum_{w \in V-W} \sum_{e \in \omega(w)} x_e \right) + \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |V-W| + |W| - 1 \\ \Leftrightarrow & \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1. \end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ ": trivial.  $\square$

Satz 23.3.

Für jede Knotenmenge  $W \subset V$ ,  $3 \leq |W| \leq n-3$ , definiert die Kurzzyklusbedingung

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$$

eine Facette von  $Q_T^n$ .

Beweis:

Folgt für Knotenmengen  $W$  mit  $\binom{n}{2} < |W| \leq n-3$  aus Satz 23.1 mit Lemma 23.2, für die übrigen aus Satz 23.1.  $\square$

In der Literatur werden zur Definition des symmetrischen Travelling Salesman Problems als ganzzahliges Programm (siehe [Dantzig, Fulkerson, Johnson, 1954]) häufig die sogenannten Loop Constraints

$$\sum_{i \in W} \sum_{j \in V-W} x_{ij} \geq 2$$

benutzt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese äquivalent zu den Kurzzyklusbedingungen

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{e \in E(V-W)} x_e \leq |V-W| - 1$$

sind und damit nach Folgerung 23.4 Facetten von  $Q_T^n$  definieren. Die Loop Constraints haben jedoch für unsere Betrachtungen den Nachteil, daß sie nicht gültig bezüglich  $\tilde{Q}_T^n$  sind, weshalb wir ihnen keine weitere Aufmerksamkeit schenken wollen.

Aus Satz 17.3 wissen wir, daß  $\dim Q_T^n = |E| - |V|$  ist, desgleichen aus Lemma 15.1, daß das Gleichungssystem  $\sum_{e \in \omega(v)} x_e = 2 \quad \forall v \in V$  vollen Rang hat, und wegen  $Q_T^n \subset \tilde{Q}_{2M}^n$  (siehe § 12), daß  $\text{aff } Q_T^n$  die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist. Wir wollen uns nun überlegen, daß  $\text{aff } Q_T^n$  auch von einem Gleichungssystem, das durch spezielle Kurzzyklusbedingungen gegeben ist, definiert wird.

Lemma 23.4.

Für die Polytope  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_{2M}^n$  gilt

$$\begin{aligned} Q_T^n \subset \tilde{Q}_{2M}^n &:= \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \sum_{e \in \omega(v)} x_e = 2 \quad \forall v \in V, 0 \leq x_e \leq 1 \quad \forall e \in E\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \sum_{e \in E(V-\{v\})} x_e = n-2 \quad \forall v \in V, 0 \leq x_e \leq 1 \quad \forall e \in E\}. \end{aligned}$$

Beweis:

$$\text{Es ist } 2 \sum_{e \in E(V-\{v\})} x_e = \sum_{w \in V-\{v\}} \sum_{e \in \omega(w)} x_e - \sum_{e \in \omega(v)} x_e = 2(n-1)-2 = 2(n-2),$$

$$\text{und } (n-2) \sum_{e \in \omega(v)} x_e = \sum_{w \in V-\{v\}} \sum_{e \in E(V-\{w\})} x_e - (n-3) \sum_{e \in E(V-\{v\})} x_e = 2(n-2),$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Damit ist es uns nun gelungen, alle Facetten des Forest Polytopen  $\tilde{Q}_{ST}^n$  (siehe Folgerung 10.4) und alle Facetten des Spanning Tree Polytopen  $Q_{ST}^n$  (siehe Folgerung 11.3) vollständig hinsichtlich ihrer Eigenschaften bezüglich des Travelling Salesman Polytopen  $Q_T^n$  zu klassifizieren, womit wir wissen, welche Eigenschaften von  $\tilde{Q}_{ST}^n$  und  $Q_{ST}^n$  sich auf  $Q_T^n$  "vererben".

Satz 23.5.

a) Die Ungleichung  $\sum_{e \in E} x_e \leq n-1$  ist nicht gültig bezüglich  $Q_T^n$ .

b) Die  $n$  Facetten von  $\tilde{Q}_{ST}^n$  bzw.  $Q_{ST}^n$   $\sum_{e \in E(V-\{w\})} x_e = n-2$  enthalten den

Polytopen  $Q_T^n$  und bilden ein äquivalentes Gleichungssystem zu

$$\sum_{e \in \omega(w)} x_e = 2 \quad \forall w \in V.$$

c) Für alle  $W \subset V$ ,  $|W| = n-2$  ist die Facette  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq n-3$  von  $Q_{ST}^n$  bzw.  $\tilde{Q}_{ST}^n$

bezüglich  $Q_T^n$  äquivalent zu der trivialen Facette  $x_e \leq 1$  für  $e = V-W$ .

d) Ist  $W \subset V$  und  $3 \leq |W| \leq n-3$ , dann definieren die zwei Kurzzyklusbedingungen

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \text{ und } \sum_{e \in E(V-W)} x_e = |V-W| - 1 \text{ dieselbe Facette von } Q_T^n.$$

e) Ist  $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}(V)$  mit  $W \in \mathcal{W} : \iff V-W \notin \mathcal{W}$ , dann ist

$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E,$$

$$x_e \leq 1 \quad \forall e \in E,$$

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \in \mathcal{W}, 3 \leq |W| \leq n-3$$

ein nicht redundantes System von Facetten von  $Q_T^n$ .  $\square$

Um mit Hilfe der Liftungssätze aus § 20 zeigen zu können, daß die Kammungleichungen (siehe 22.11) Facetten von  $Q_T^n$  definieren, benötigen wir als

"Induktionsanfang" die Information, daß gewisse "Basiskämme" Facetten von  $Q_T^n$  bilden. Deshalb zeigen wir zunächst, daß die kleinstmöglichen Kämme (d.h. dreielementiger Griff, drei zweielementige Zinken) Facetten von  $Q_T^n$ ,  $n \geq 6$ , definieren.

Satz 23.6.

Sei  $n \geq 6$ . Sei  $W = \{u, v, w, u_1, v_1, w_1\} \subset V$ . Sei  $W_0 = \{u, v, w\}$ ,  $W_1 = \{u, u_1\}$ ,  $W_2 = \{v, v_1\}$ ,  $W_3 = \{w, w_1\}$ , dann definiert die Kammgleichung

$$a^C x := x_{uv} + x_{uw} + x_{vw} + x_{uu_1} + x_{vv_1} + x_{ww_1} \leq 4$$

eine Facette von  $Q_T^n$ .

Beweis:

Sei  $cx = c_0$  eine Hyperebene mit  $H_a := \{x \in Q_T^n \mid a^C x = 4\} \subset \{x \in Q_T^n \mid cx = c_0\}$ ,  
 $H := \{T \in T_n \mid a^C x^T = 4\}$ .

Sei

- (1)  $b_{uv} = b_{uw} = b_{uu_1} = 1$ ,
- (2)  $b_{ui} = 0 \quad \forall i \in V - \{v, w, u_1\}$ ,
- (3)  $b_{vw} = 1$ ,

dann gibt es nach Folgerung 15.2  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , so daß

$$b := c + \lambda A$$

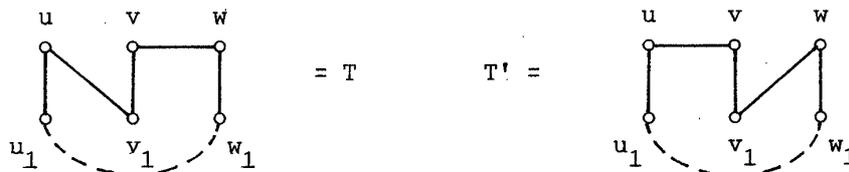
die in (1), (2), (3) festgelegten Komponenten besitzt. Sei  $b_0 = c_0 + 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j$ , dann gilt  $H_a \subset \{x \in Q_T^n \mid bx = b_0\}$ .

Können wir zeigen, daß es  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  gibt mit  $b = \gamma A + \pi a^C$ , dann gilt  $c = (\gamma - \lambda)A + \pi a^C$  und  $c_0 = 2 \sum_{j=1}^n (\gamma_j - \lambda_j) + \pi 4$ , und wir sind wegen Satz 4.4 fertig.

In jedem der folgenden Beweisschritte wählen wir jeweils zwei Touren aus, deren Inzidenzvektoren die betrachtete Ungleichung mit Gleichheit erfüllen, da jeweils vier ihrer Kanten aus dem Kamm C sind. Mit Hilfe der so gewählten Touren versuchen wir den Vektor b so gut wie möglich zu berechnen.

Der besseren Übersichtlichkeit halber zeichnen wir die betrachteten Touren, anstatt sie mengentheoretisch anzugeben.

a) Die beiden folgenden Touren sind aus H, da vier ihrer Kanten im Kamm C enthalten sind.



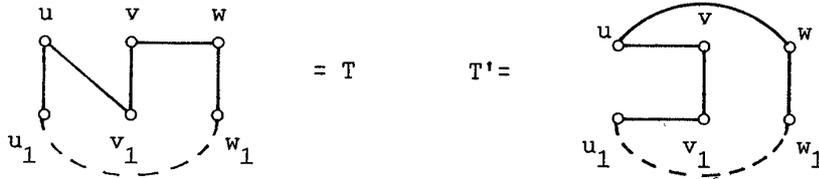
Also gilt  $bx^{T'} = bx^T = b_0$  und damit nach (1), (2), (3)

$$0 = bx^{T'} - bx^T = b_{wv_1} + b_{uv} - b_{uv_1} - b_{vw} = b_{wv_1}.$$

Mithin  $b_{wv_1} = 0.$

Analog:  $b_{vw_1} = 0.$

b)



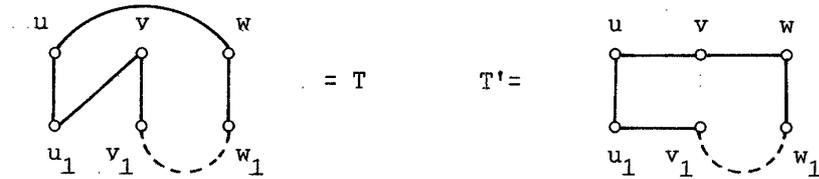
Es gilt  $T, T' \in H$  und damit

$$0 = bx^{T'} - bx^T = b_{u_1v_1} + b_{uv} + b_{uw} - b_{uu_1} - b_{uv_1} - b_{vw} = b_{u_1v_1},$$

also  $b_{u_1v_1} = 0.$

c) Definiere  $\beta := b_{vu_1}.$

c<sub>1</sub>)

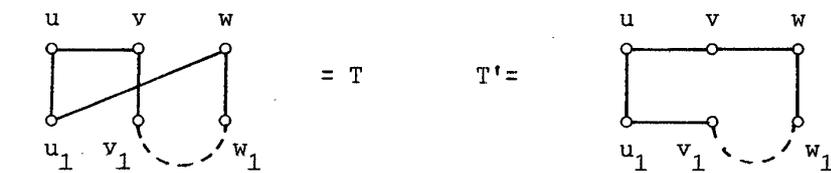


$T, T' \in H.$

$$0 = bx^T - bx^{T'} = b_{vv_1} + b_{vu_1} + b_{uw} - b_{u_1v_1} - b_{uv} - b_{vw} = b_{vv_1} + \beta - 1,$$

also  $b_{vv_1} = 1 - \beta.$

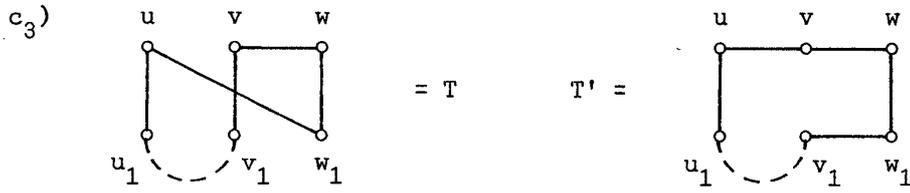
c<sub>2</sub>)



$T, T' \in H.$

$$0 = bx^T - bx^{T'} = b_{wu_1} + b_{vv_1} - b_{vw} - b_{u_1v_1} = b_{wu_1} + 1 - \beta - 1,$$

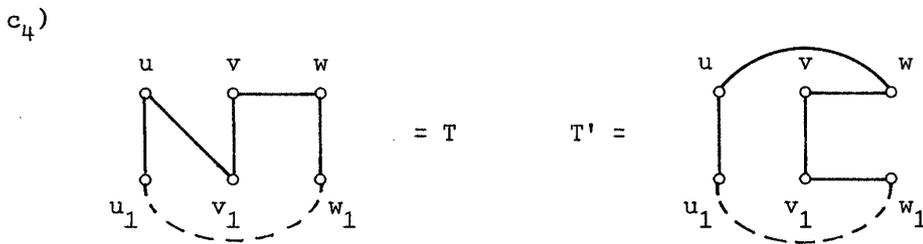
also  $b_{wu_1} = \beta.$



$T, T' \in H.$

$$0 = bx^{T'} - bx^T = b_{v_1 w_1} + b_{uv} - b_{vv_1} - b_{uw_1} = b_{v_1 w_1} + 1 - 1 + \beta,$$

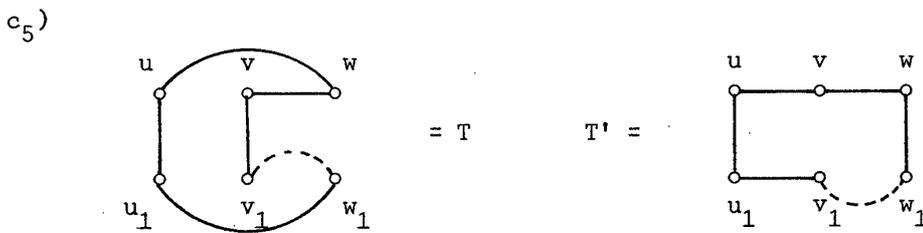
d.h.  $b_{v_1 w_1} = -\beta.$



$T, T' \in H.$

$$0 = bx^T - bx^{T'} = b_{ww_1} + b_{uv_1} - b_{uw} - b_{v_1 w_1} = b_{ww_1} - 1 + \beta,$$

d.h.  $b_{ww_1} = 1 - \beta.$

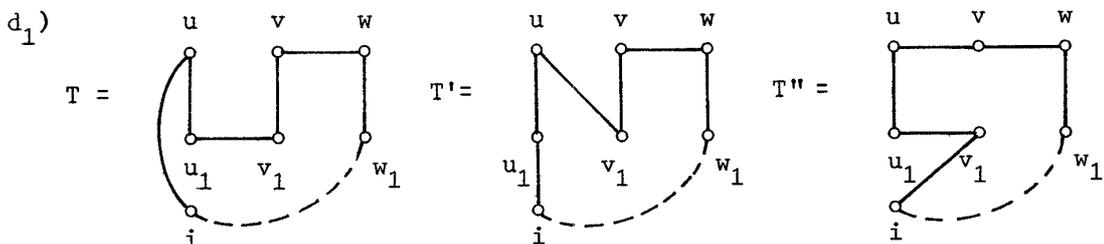


$T, T' \in H.$

$$0 = bx^T - bx^{T'} = b_{u_1 w_1} + b_{vv_1} + b_{uw} - b_{ww_1} - b_{u_1 v_1} - b_{uv} = b_{u_1 w_1},$$

d.h.  $b_{u_1 w_1} = 0.$

d) Sei  $n \geq 7$  und  $i \in V-W$  beliebig.



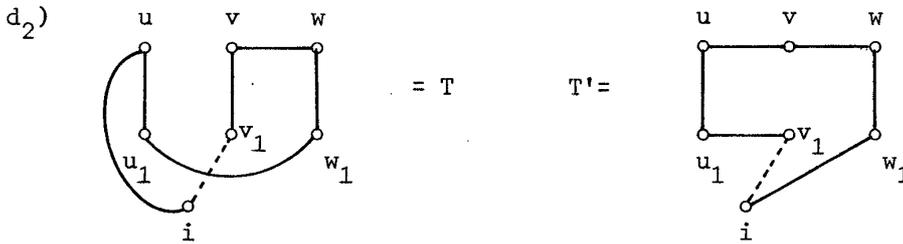
$T, T', T'' \in H.$

$$0 = bx^{T'} - bx^T = b_{iu_1} + b_{uv_1} - b_{u_1v_1} - b_{ui} = b_{iu_1},$$

$$0 = bx^{T''} - bx^T = b_{iv_1} + b_{uv} - b_{vv_1} - b_{ui} = b_{iv_1} + \beta.$$

Es folgt  $b_{iu_1} = 0 \quad \forall i \in V-W,$

$$b_{iv_1} = -\beta \quad \forall i \in V-W.$$

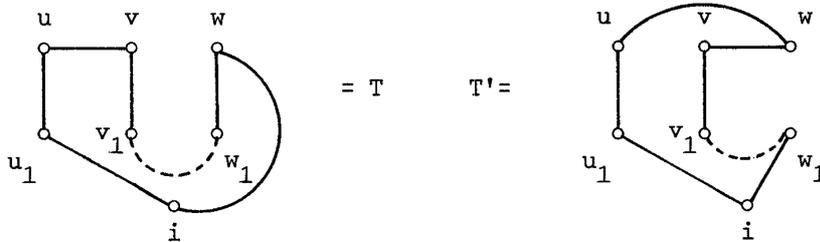


$T, T' \in H.$

$$0 = bx^{T'} - bx^T = b_{iw_1} + b_{u_1v_1} + b_{uv} - b_{ui} - b_{u_1w_1} - b_{vv_1} = b_{iw_1} + \beta,$$

also folgt  $b_{iw_1} = -\beta \quad \forall i \in V-W.$

e) Sei  $n \geq 7$ ,  $i \in V-W$  beliebig.



$T, T' \in H.$

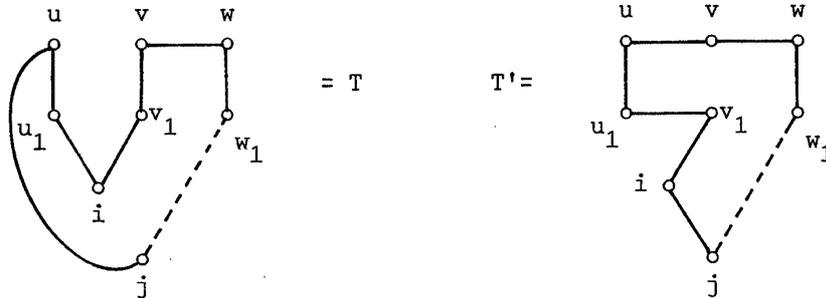
$$0 = bx^T - bx^{T'} = b_{iw} + b_{ww_1} + b_{uv} - b_{uw} - b_{vw} - b_{iw_1}$$

$$= b_{iw} + (1 - \beta) + 1 - 1 - 1 + \beta = b_{iw},$$

also  $b_{iw} = 0 \quad \forall i \in V-W,$

analog  $b_{iy} = 0 \quad \forall i \in V-W.$

f) Sei  $n \geq 8$ ,  $i, j \in V-W$ .



$T, T' \in H$ .

$$\begin{aligned} 0 &= bx^{T'} - bx^T = b_{ij} + b_{u_1 v_1} + b_{uv} - b_{vv_1} - b_{uj} - b_{u_1 i} \\ &= b_{ij} + 0 + 1 - (1 - \beta) - 0 - 0 \\ &= b_{ij} + \beta. \end{aligned}$$

Es folgt  $b_{ij} = -\beta \quad \forall i, j \in V-W$ .

g) Zusammengefaßt haben wir also in a) - f) gezeigt:

$$b_{iu} = b_{iv} = b_{iw} = 0 \quad \forall i \in V - \{u, v, w, u_1, v_1, w_1\},$$

$$b_{uv} = b_{uw} = b_{vw} = b_{uu_1} = 1,$$

$$b_{uv_1} = b_{uw_1} = b_{vw_1} = b_{wv_1} = 0,$$

$$b_{vu_1} = b_{wu_1} = \beta,$$

$$b_{vv_1} = b_{ww_1} = 1 - \beta,$$

$$b_{u_1 v_1} = b_{u_1 w_1} = 0,$$

$$b_{v_1 w_1} = -\beta,$$

$$b_{iu_1} = 0 \quad \forall i \in V - \{u, v, w, u_1, v_1, w_1\},$$

$$b_{iv_1} = b_{iw_1} = -\beta \quad \forall i \in V - \{u, v, w, u_1, v_1, w_1\},$$

$$b_{ij} = -\beta \quad \forall i, j \in V - \{u, v, w, u_1, v_1, w_1\}.$$

Definieren wir nun  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  durch

$$\gamma_u := \gamma_v := \gamma_w := \gamma_{u_1} := \frac{\beta}{2}, \quad \gamma_i := -\frac{\beta}{2}, \quad \forall i \in V - \{u, v, w, u_1\}, \text{ und } \pi := 1 - \beta,$$

dann folgt aus

$$\begin{aligned}
 a_{uv} &= a_{uw} = a_{vw} = 1 \\
 a_{uu_1} &= a_{vv_1} = a_{ww_1} = 1 \\
 a_{ij} &= 0 \quad \text{sonst,}
 \end{aligned}$$

daß  $b = \gamma A + \pi a$  gilt, was zu zeigen war.  $\square$

Mit Satz 23.6 und mit Hilfe der Liftungssätze aus § 20 können wir nun von den in 22.10, 22.11 definierten Kammungleichungen zeigen

Satz 23.7.

*Jede Kammungleichung definiert eine Facette von  $Q_T^n$ .*

*Genauer: Sei  $n \geq 6$ , sei  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$ , und gelte*

- (a)  $|W_0 \cap W_i| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k,$
- (b)  $|W_i - W_0| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k,$
- (c)  $W_i \cap W_j = \emptyset \quad 1 \leq i < j \leq k,$
- (d)  $k \geq 3$  und ungerade,

*dann definiert die Kammungleichung*

$$\sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle$$

*eine Facette von  $Q_T^n$ .*

Beweis:

Wir entfernen zunächst alle bis auf einen Knoten, die in  $W_i \cap W_0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , enthalten sind. Dann entfernen wir alle bis auf einen Knoten aus  $W_i - W_0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Desweiteren entfernen wir nun alle Knoten aus  $W_0 - \bigcup_{i=1}^k W_i$ . Der auf diese Weise konstruierte Kamm hat  $k$  2-elementige Zinken  $W_i^!$  und jeder Knoten des Griffes ist in genau einer zweielementigen Zinke enthalten. Wir entfernen alle Zinken bis auf die drei Zinken  $W_1^!, W_2^!, W_3^!$ . Dieser Kamm hat also einen 3-elementigen Griff und 3 zweielementige Zinken.

Nach Satz 23.6 definiert die zugehörige Kammungleichung eine Facette des Polytopen  $Q_T^m$  mit  $m = n - \sum_{i=0}^k |W_i| + 6 \geq 6$ . Diese Facette erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 20.3. Mit Hilfe der in Satz 20.3 angegebenen Liftungsvorschrift fügen wir nun die Zinken  $W_4^!, W_5^!$  zu diesem Kamm hinzu. Satz 20.3 besagt, daß die neue Kammungleichung eine Facette von  $Q_T^{m+4}$  ist. Der neue Kamm erfüllt wiederum alle Voraussetzungen von Satz 20.3. Dieses Verfahren wiederholen wir, bis alle weiteren  $k-5$  Zinken  $W_i^!$  jeweils paarweise hinzugefügt worden sind. Satz 20.3 garantiert dafür, daß alle neu erzeugten Kammungleichungen Facetten sind.

Ist  $|W_0 - \bigcup_{i=1}^k W_i| \geq 1$ , so können wir mit Satz 20.2 (für den aktuellen Kamm gilt  $W'_0 = \emptyset$ ,  $|W'_i| = 2$ ) einen Knoten zu  $W'_0$  hinzufügen.

Mit Satz 20.1 (b) (jetzt gilt  $|W'_0| = 1$ ) fügen wir einen weiteren Knoten, falls nötig, hinzu.

Falls  $|W_0 - \bigcup_{i=1}^k W_i| \geq 3$ , können wir die restlichen Knoten von  $W_0$  zu  $W'_0$  mit Hilfe der Liftungsvorschrift in Satz 20.1 (a) hinzufügen, und wir erhalten wiederum eine Facette.

Für jede der Zinken mit  $|W_i - W_0| \geq 2$  fügen wir zunächst mit Hilfe von Satz 20.1 (b) einen Knoten zu  $W'_i$  ( $|W'_i| = 1$ ) hinzu.

Die restlichen Knoten können aufgrund von Satz 20.1 (a) sukzessive hinzugefügt werden, bis alle Knoten aus  $W_i - W_0$  im gegenwärtigen Kamm enthalten sind. Satz 20.1 garantiert jeweils, daß die neu entstehenden Ungleichungen Facetten des entsprechenden Polytopen  $Q_T^{n'}$  sind.

Für jede der Zinken mit  $|W_i \cap W_0| \geq 2$  wenden wir jeweils einmal Satz 20.4 an und fügen alle restlichen Knoten aus  $W_i \cap W_0$  zum Kamm hinzu. Die Koeffizienten werden entsprechend Satz 20.4 gewählt.

Am Ende dieses sukzessiven Hinzufügens von Knoten zum Griff und zu den Zinken haben wir unsere ursprüngliche Kammungleichung rekonstruiert. Offensichtlich waren in jedem Schritt die Voraussetzungen der benutzten Sätze erfüllt. Die Liftungssätze 20.1 bis 20.4 haben damit ergeben, daß die vorgegebene Kammungleichung eine Facette von  $Q_T^n$  definiert.  $\square$

Lemma 23.8.

Die Knotenmengen  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$ ,  $W'_0, W'_1, \dots, W'_k \subset V$  mögen zwei verschiedene Käme im Sinne von Definition 22.10 definieren, dann gilt:

Die zugehörigen Kammungleichungen sind genau dann äquivalent, wenn  $k = l$ ,  $W'_0 = V - W_0$  und  $W'_i = W_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  gilt.

Beweis:

" $\implies$ ": Einige einfache aber längliche Überlegungen zeigen, daß für zwei Käme mit verschiedenen Zinken nicht dieselben Touren auf der zugehörigen Facette liegen können, sodann überlegt man sich, daß das gleiche gilt, wenn  $W'_0 \neq W_0$ ,  $W'_0 \neq V - W_0$ .

" $\Leftarrow$ ":

$$2 \sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq 2(|W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \langle \frac{k}{2} \rangle) = 2 \cdot s(C)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e + \sum_{v \in V - W_0} \sum_{e \in \omega(v)} x_e \leq 2 \cdot s(C) + 2|V - W_0|$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{e \in E(V - W_0)} x_e + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e + 2 \sum_{e \in E(W_0)} x_e + \sum_{e \in \omega(W_0)} x_e \leq 2 \cdot s(C) + 2|V - W_0|$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i')} x_e + \sum_{v \in W_0} \sum_{e \in \omega(v)} x_e \leq 2 \cdot s(C') + 2|W_0|$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i')} x_e \leq 2(|V - W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i'| - 1) - \langle \frac{k}{2} \rangle) = 2 \cdot s(C'). \quad \square$$

Aufgrund der bisher erzielten Ergebnisse können wir nun auch alle Facetten des 2-Matching Polytopen  $Q_{2M}^n$  hinsichtlich ihrer Eigenschaften bezüglich des Travelling Salesman Polytopen  $Q_T^n$  vollständig charakterisieren, und zwar gilt:

Satz 23.9.

- a) Alle Facetten des 2-Matching Polytopen  $Q_{2M}^n$  sind Facetten des Travelling Salesman Polytopen  $Q_T^n$  bis auf die 2-Matching Ungleichungen mit genau einer Zinke.
- b) Die 2-Matching Ungleichungen, die bezüglich  $Q_{2M}^n$  dieselbe Facette definieren, sind auch bezüglich  $Q_T^n$  äquivalent.
- c) Alle nicht-dominierten Chvátal-Kämme definieren Facetten von  $Q_T^n$ .

Beweis:

- a) Siehe Satz 15.9, 15.10, Satz 18.5, 18.6 und Satz 23.7.
- b) Siehe Lemma 15.5 und Lemma 23.8.
- c) Siehe Satz 22.9 und Satz 23.7.  $\square$

Mit den vorhergehenden Überlegungen haben wir die ersten Hauptziele dieser Arbeit erreicht. Zum einen haben wir die Facetten von  $Q_{ST}^n$  und  $Q_{2M}^n$ , diese Polytope stehen - wie wir uns in § 16 überlegt haben - in enger Verwandtschaft zum symmetrischen Travelling Salesman Problem, hinsichtlich ihrer Eigenschaften in bezug auf den Polytopen  $Q_T^n$  vollständig klassifiziert (siehe Satz 23.5, Satz 23.9); wir wissen also, welche der Facetten von  $Q_{ST}^n$  und  $Q_{2M}^n$  sich auf  $Q_T^n$  "vererben". Zum anderen haben wir - wie wir glauben - eine "recht gute",

das heißt einerseits umfangreiche (siehe auch Satz 24.5) und andererseits nicht redundante, partielle lineare Charakterisierung des symmetrischen Travelling Salesman Polytopen gefunden, und zwar gilt:

Satz 23.10.

Sei  $n \geq 6$ . Sei  $\mathcal{W} \in \mathcal{P}(V)$  mit  $W \in \mathcal{W} : \iff V-W \notin \mathcal{W}$ . Dann ist das folgende System von Ungleichungen ein nicht redundantes System von Facetten des symmetrischen Travelling Salesman Polytopen  $Q_T^n$ .

(1)  $x_e \geq 0 \quad \forall e \in E.$

(2)  $x_e \leq 1 \quad \forall e \in E.$

(3) Kurzzzyklusbedingungen:

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \in \mathcal{W} \text{ mit } 3 \leq |W| \leq n-3.$$

(4) Kammungleichungen:

$$\sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle$$

$\forall W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$  mit

(a)  $|W_0 \cap W_i| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k$

(b)  $|W_i - W_0| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k$

(c)  $W_i \cap W_j = \emptyset \quad 1 \leq i < j \leq k$

(d)  $k \geq 3$ , ungerade

(e)  $W_0 \in \mathcal{W}$ .

Weiterhin gilt: aff  $Q_T^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \sum_{e \in w(w)} x_e = 2 \quad \forall w \in V\}$  bzw.

$$\text{aff } Q_T^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \sum_{e \in E(V-\{w\})} x_e = 2 \quad \forall w \in V\}.$$

und diese Darstellungen der affinen Hülle von  $Q_T^n$  sind minimal.

Beweis:

Die Behauptung ergibt sich aus den folgenden Sätzen: 17.3, 18.5, 18.6, 23.2, 23.3, 23.4, 23.5 (e), 23.7, 23.8, wobei lediglich noch zu zeigen ist, daß keine Kurzzzyklusbedingung äquivalent zu einer Kammungleichung ist, was jedoch unmittelbar einleuchtet.  $\square$

Die hier gefundene lineare Beschreibung von  $Q_T^n$  ist für "größeres n" sicherlich nicht vollständig; wir glauben jedoch, daß der in Satz 23.10 definierte Polytop

bereits eine sehr gute Approximation von  $Q_T^n$  ist und bei der Lösung von Travelling Salesman Problemen hilfreich sein kann (siehe Teil 4). Daß jedoch  $Q_T^n$  noch recht "unangenehme" Facetten haben kann, werden wir uns in § 25 überlegen.

Bemerkung 23.11.

*Der historischen Vollständigkeit halber möchten wir noch einmal auf den Abstract von Z. Norman [1955] hinweisen, der eine vollständige und nicht redundante Beschreibung der Polytope  $Q_T^5$ ,  $Q_T^6$ ,  $Q_T^7$  angibt. Der Abstract lautet:*

"In the symmetric traveling salesman problem, a tour (cyclic arrangement of  $1, \dots, n$ ) need not be distinguished from its opposite (the same arrangement in opposite order). Both tours can be represented by a triangular array of elements  $t = (t_{ij})$  of an  $n \times n$  matrix for which  $i < j$ , in which  $t_{ij}$  is 0 or 1 and in which for all  $j$ ,  $\sum_{i < j} t_{ij} + \sum_{i > j} t_{ji} = 2$ . The tours are thus points in an  $((n^2 - 3n)/2)$ -dimensional manifold of an  $((n^2 - n)/2)$ -dimensional Euclidean space. Let  $C_n$  denote the convex hull of these points. A face of  $C_n$ , an intersection of  $C_n$  with a supporting hyperplane, can be described by means of the corresponding supporting half space. For  $n = 5$ , as is already known, there are two classes of these face-defining supporting half-spaces, I :  $x_{ij} \geq 0$  and II :  $x_{ij} \leq 1$ ; each having 10 half-spaces. For  $n = 6$  there are 15 half-spaces in each of class I and class II, 10 in class III :  $x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} \leq 2$ , and 60 in class IV :  $x_{ij} + x_{jk} + x_{ik} + x_{il} + x_{im} + x_{kn} \leq 4$ . For  $n = 7$  there are 21 in each of the first two classes, 35 in class III, 840 in class IV, and 1260 in class V :  $x_{ij} + x_{jk} + x_{ik} + x_{km} + x_{kn} + x_{mn} + x_{mp} + x_{nq} \leq 5$ . These supporting half-spaces were found independently by Dantzig and Johnson. The proof that the faces corresponding to these sets of half-spaces give an irredundant description of the convex sets  $C_n$  is in part the same as Kuhn's proof of the corresponding statement for the convex of all tours (see Abstract 799), and follows in part from a graph-theoretic argument. (Received July 18, 1955.)"

Anscheinend ist bei der Angabe der Ungleichungen der Klasse IV ein Druckfehler unterlaufen, da diese redundant sind. Ersetzen wir  $x_{im}$  durch  $x_{jm}$ , so gibt die Klasse IV gerade die Kammgleichungen für  $W_0 = \{i, j, k\}$ ,  $W_1 = \{i, l\}$ ,  $W_2 = \{j, m\}$ ,  $W_3 = \{k, n\}$  an, also die Klasse von Kämmen mit 3-elementigem Griff und drei 2-elementigen Zinken. Die Klasse V sind unsere Kammgleichungen mit  $W_0 = \{k, n, m\}$ ,  $W_1 = \{i, j, k\}$ ,  $W_2 = \{n, q\}$ ,  $W_3 = \{m, p\}$ , also die Käme mit einem 3-elementigen Griff, zwei 2-elementigen Zinken und einer 3-elementigen Zinke. Folglich ist die Beschreibung von  $Q_T^6$  und  $Q_T^7$  in Satz 23.10, wenn man  $\mathcal{W} \subset \{W \in V \mid |W| \leq 3\}$  wählt, nach [Norman, 1955] vollständig und nicht redundant.  $Q_T^5$  wurde bereits in Beispiel 18.8 angegeben.  $\square$

#### § 24. Facetten von $\tilde{Q}_T^n$

In § 18 haben wir bereits vermittels sequentieller Liftung von Primimplikanten gezeigt, daß alle Kurzzyklusbedingungen abgesehen von  $\sum_{e \in E} x_e \leq n-1$  Facetten des monotonen Travelling Salesman Polytopen  $\tilde{Q}_T^n$  sind (siehe Satz 18.3). Ein zweiter Beweis dieser Tatsache mit Hilfe von Satz 21.1 verläuft analog zu Satz 23.1 wie folgt:

In Satz 18.1 haben wir bewiesen, daß die Ungleichungen  $x_e \leq 1$ ,  $e \in E$ , Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  für alle  $n \geq 3$  definieren. Ist nun  $W \in V$ , sagen wir  $W = \{1, 2, n-k, \dots, n\}$ , so ist  $x_{12} \leq 1$  Facette von  $\tilde{Q}_T^m$ ,  $m = n-k-1 \geq 3$ . Da für  $x_{12} \leq 1$  alle Voraussetzungen von Satz 21.1 (a) erfüllt sind ( $\tilde{W} = W = \{1, 2\}$ ), ist  $x_{12} + x_{1, n-k} + x_{2, n-k} \leq 2$  eine Facette von  $\tilde{Q}_T^{m+1}$ . Diese Facette erfüllt ebenfalls alle Voraussetzungen von Satz 21.1 (a). Wir wiederholen diese Prozedur unter Anwendung von Satz 21.1 (a)  $k$ -mal und erhalten schließlich, daß  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  Facette von  $\tilde{Q}_T^n$  ist.

Damit können wir bereits die Beziehungen zwischen dem Forest Polytopen und dem monotonen Travelling Salesman Polytopen vollständig beschreiben.

##### Satz 24.1.

Alle Facetten des Forest Polytopen  $\tilde{Q}_{ST}^n$  - bis auf  $\sum_{e \in E} x_e \leq n-1$  - sind Facetten des monotonen Travelling Salesman Polytopen  $\tilde{Q}_T^n$ .

##### Beweis:

Folgt aus Folgerung 10.4, Satz 18.1, Satz 18.3.  $\square$

Um die Liftungssätze für  $\tilde{Q}_T^n$  bezüglich der Kammungleichungen (siehe 22.11) anwenden zu können, müssen wir wie bei Satz 23.7 wissen, daß gewisse "kleine Kämmen" Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  liefern. Hierzu können wir Satz 14.4 über die Facetten des 2-Matching Polytopen heranziehen, in dem wir bereits (mit-) bewiesen haben, daß alle 2-Matching Ungleichungen, die Kammungleichungen im Sinne von 22.11 sind, Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  definieren (siehe auch Bemerkung 14.5). Wir können damit zeigen:

Satz 24.2.

Sei  $n \geq 6$ . Sei  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$ , und gelte

- (a)  $|W_0 \cap W_i| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k,$
- (b)  $|W_i - W_0| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k,$
- (c)  $W_i \cap W_j = \emptyset \quad 1 \leq i < j \leq k,$
- (d)  $k \geq 3$  und ungerade,

dann definiert die Kammungleichung

$$\sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle$$

eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$ .

Beweis:

In Satz 14.4 haben wir gezeigt, daß die 2-Matching Ungleichungen, die (a) - (d) erfüllen, Facetten von  $\tilde{Q}_{2M}^n$  sind. In Bemerkung 14.5 haben wir darauf hingewiesen, daß beim Beweis keine 2-Matchings benutzt wurden, die Kurzzyklen enthielten; folglich ist der Inzidenzvektor jeder dieser 2-Matchings eine Ecke von  $\tilde{Q}_T^n$ . Damit zeigt derselbe Beweis, daß diese 2-Matching Ungleichungen Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  definieren ( $\dim \tilde{Q}_T^n = \dim \tilde{Q}_{2M}^n$  !).

Der Beweis der Behauptung erfolgt durch sukzessives Liften.

Seien  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$  Knotenmengen, die (a) - (d) erfüllen. Wir entfernen zunächst alle bis auf einen Knoten aus  $W_i \cap W_0$  und erhalten Zinken  $W_i^!$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Dann entfernen wir alle bis auf einen Knoten aus  $W_i - W_0$  und erhalten Zinken  $W_i''$  mit  $|W_i''| = 2$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Der so konstruierte Kamm definiert eine 2-Matching Ungleichung bezüglich  $\tilde{Q}_T^m$ ,  $m = n - \sum_{i=1}^k |W_i| + |W_0| + k$ , und damit eine Facette von  $\tilde{Q}_T^m$ . Diese Facette erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 21.1 (b) bezüglich der Zinken  $W_i''$ , da  $[W_i'', E(W_i'')]$  eine maximale Clique ist. Zu jeder der Zinken können wir, falls  $|W_i^!| \geq 3$ , nun jeweils einen Knoten hinzufügen und wissen, daß nach Satz 21.1 (b) der neue Kamm eine Facette von  $\tilde{Q}_T^{n'}$  definiert. Falls  $|W_i^!| \geq 4$  ist, können wir auf die neu konstruierten Zinken

Satz 21.1 (a) anwenden und sukzessive die restlichen Knoten von  $W_i^!$  hinzufügen. In jedem Fall garantiert Satz 21.1 (a), daß der neue Kamm eine Facette definiert.

Falls  $|W_0 \cap W_i| \geq 2$ , so wenden wir Satz 21.2 bezüglich der maximalen Cliques  $[W_0, E(W_0)]$  und  $[W_i^!, E(W_i^!)]$  an und fügen in einem Schritt alle die Knoten aus  $W_0 \cap W_i$  hinzu, die vorher entfernt wurden. Aus Satz 21.2 folgt, daß nach jeder Anwendung des Verfahrens eine Facette erzeugt wird. Am Ende dieser Prozedur ist der ursprüngliche Kamm rekonstruiert worden, und wir sind fertig.  $\square$

Damit haben wir nun auch alle Beziehungen zwischen dem monotonen 2-Matching Polytopen  $\tilde{Q}_{2M}^n$  und dem monotonen Travelling Salesman Polytopen  $\tilde{Q}_T^n$  aufgeklärt.

Satz 24.3.

- a) Alle Facetten des monotonen 2-Matching Polytopen  $\tilde{Q}_{2M}^n$  sind Facetten des monotonen Travelling Salesman Polytopen  $\tilde{Q}_T^n$  bis auf die 2-Matching Ungleichungen mit nur einer Zinke.
- b) Alle nicht dominierten Chvátal-Kämme definieren Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$ .

Beweis:

- a) Siehe Satz 14.6, Satz 24.2, Satz 18.1 und 18.2.
- b) Siehe Satz 22.9 und Satz 24.2.  $\square$

Mit unseren bisherigen Resultaten haben wir also die "Verwandtschaftsbeziehungen" des monotonen Travelling Salesman Polytopen  $\tilde{Q}_T^n$  zum Forest Polytopen  $\tilde{Q}_{ST}^n$  und zum monotonen 2-Matching Polytopen  $\tilde{Q}_{2M}^n$  vollständig bestimmen können (siehe 24.1, 24.3), d.h. wir konnten angeben, welche der Facetten von  $\tilde{Q}_{ST}^n$  bzw.  $\tilde{Q}_{2M}^n$  Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  bleiben und welche nicht. Darüberhinaus konnten wir eine recht umfangreiche (jedoch partielle) lineare Charakterisierung von  $\tilde{Q}_T^n$  finden, und zwar gilt:

Satz 24.4.

Sei  $n \geq 4$ , dann ist das folgende System von Ungleichungen ein nicht redundantes System von Facetten des monotonen Travelling Salesman Polytopen  $\tilde{Q}_T^n$ .

$$(1) x_e \geq 0 \quad \forall e \in E.$$

$$(2) x_e \leq 1 \quad \forall e \in E.$$

(3) Kurzzyklusbedingungen:

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \subset V, 3 \leq |W| \leq n-1.$$

(4) Kammungleichungen:

$$\sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle,$$

$\forall W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$  mit

(a)  $|W_0 \cap W_i| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k,$

(b)  $|W_i - W_0| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k,$

(c)  $W_i \cap W_j = \emptyset \quad 1 \leq i < j \leq k,$

(d)  $k \geq 3$  und ungerade.

(5)  $\sum_{e \in \omega(v)} x_e \leq 2 \quad \forall v \in V.$

Beweis:

Folgt aus den Sätzen 18.1, 18.2, 18.3, 24.1, 24.2.  $\square$

Wie gewaltig die Anzahl der Kammfacetten (4) ist, zeigt

Satz 24.5.

Für  $n \geq 6$  ist die Anzahl der durch Kämme definierten Facetten von  $\mathcal{Q}_T^n$ :

$$\sum_{m=3}^{n-3} \binom{n}{m} \sum_{j=3}^{n-m} \binom{n-m}{j} \sum_{\substack{k=3 \\ \text{ungerade}}}^{\min\{j, m\}} A_k^j \left( \sum_{p=k}^m \frac{1}{k!} \binom{m}{p} A_k^p \right),$$

wobei

$$A_k^p = k^p + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^p \quad \text{gilt.}$$

Beweis:

Aus Satz 24.2 wissen wir, daß genau die Kämme Facetten definieren, die eine ungerade Anzahl von Zinken, mindestens 3 Zinken haben, und bei denen die Zinken disjunkt sind.

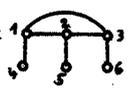
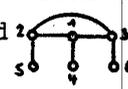
Für die Anzahl  $m$  der Elemente des Griffes  $W_0$  eines Kammes ergibt sich damit  $3 \leq m \leq n-3$ . Insgesamt können wir genau  $\binom{n}{m}$   $m$ -elementige Mengen in  $\{1, \dots, n\}$  auswählen.

Haben wir eine  $m$ -elementige Teilmenge  $W_0$  von  $\{1, \dots, n\}$  gewählt, so können wir aus den restlichen  $n-m$  Knoten die Teile der Zinken bilden, die nicht zu  $W_0$  gehören. Wir können dazu zwischen 3 und  $n-m$  Knoten verwenden. Unter den  $n-m$  verbleibenden Knoten haben wir genau  $\binom{n-m}{j}$  Möglichkeiten  $j$  Knoten auszuwählen.

Haben wir uns für  $j$  Knoten entschieden, so müssen wir diese in  $k$  Zinken aufteilen. Die Zinkenanzahl  $k$  muß  $\geq 3$  und ungerade sein. Sie kann höchstens  $j$  sein, d.h. jeder Knoten wird einer einzigen Zinke zugeschlagen,  $k$  kann aber auch nicht größer als  $m$  sein, da sich sonst einige Zinken im Griff  $W_0$  schneiden würden; somit können wir nur bis  $\min\{j, m\}$  summieren.

Haben wir also eine Menge von  $j$  Knoten gewählt, so gibt es genau  $A_k^j$  Möglichkeiten die  $j$  Knoten auf  $k$  Zinken zu verteilen, so daß kein Zinke leer bleibt, aber die Reihenfolge der Zinken berücksichtigt wird (siehe [Barnard, Child, 1952, S.496, Formel (2)]).

Haben wir nun eine solche Wahl getroffen, so müssen wir jede der  $k$  Zinken an eine nichtleere Teilmenge der  $m$  Knoten des Griffes  $W_0$  anhängen. Hier haben wir wiederum die Wahl,  $p$  Knoten aus  $W_0$  zum Anhängen der Zinken zur Verfügung zu stellen.  $p$  muß, da jede Zinke mit mindestens einem Knoten aus  $W_0$  verbunden sein muß, größer gleich  $k$  sein, kann natürlich aber nicht über  $m = |W_0|$  hinauswachsen.

Haben wir uns für  $p$  Knoten entschieden, so können wir diese auf  $\binom{m}{p}$  Arten aus  $W_0$  erhalten. Nun müssen wir diese  $p$  Knoten wiederum auf  $k$  Zinken verteilen, so daß jede Zinke mindestens einen Knoten enthält; dieses geht wie oben auf  $A_k^p$  verschiedene Weisen; da wir hier aber nicht mehr die Reihenfolge berücksichtigen dürfen, dies ist bereits bei den nicht in  $W_0$  liegenden Teilen der Zinken geschehen (sonst wären 1.  und 2.  verschiedene Kämme), müssen

wir diese Anzahl noch durch die Anzahl der möglichen Vertauschungen  $k!$  teilen.  $\square$

Um eine Vorstellung davon zu haben, wie groß diese Zahl ist, haben wir die Formel auf einem Computer berechnet. Dabei ergab sich folgendes:

n	Anzahl der Kammfacetten
6	120
7	4200
8	85680
9	1335600
10	17687880
15	3987422679240
20	$3 \cdot 10^{18}$
30	$3 \cdot 10^{31}$
40	$3 \cdot 10^{45}$
50	$2 \cdot 10^{60}$
59	$2 \cdot 10^{74}$

Ohne aufwendige Verfahren anzuwenden, konnte die Formel nicht weiter berechnet werden, da bei doppelt-genauer Speicherung Zahlen nur bis  $10^{75}$  dargestellt werden können (PL1, IBM 370/168). Für  $n = 60$  übersteigt also die Anzahl der Kammfacetten von  $\tilde{Q}_T^n$  bereits die normalen Darstellungsmöglichkeiten von Zahlen auf Rechnern.

Zusammen mit den Kurzzyklusbedingungen, von denen es  $\sum_{i=3}^{n-1} \binom{n}{i} = 2^n - \frac{n(n+1)}{2} - 2$  gibt, für  $n = 59$  sind das ungefähr  $5 \cdot 10^{17}$ , eine Zahl, die bei  $2 \cdot 10^{74}$  marginal ist, haben wir damit eine fast unvorstellbar große Anzahl von Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  gefunden.

Aus Satz 23.10 geht hervor, daß wir zu einer vollständigen nicht redundanten Beschreibung von  $Q_T^n$  auf jeden Fall die Hälfte aller Kammgleichungen benötigen. Für  $n = 59$  sind das immer noch  $10^{74}$ , was also keine Änderung in der Größenordnung hervorruft.

Aufgrund dieser Ergebnisse ist damit klar, daß selbst für 8-Städte Probleme, die man fast durch Hinschauen lösen kann, niemals ein lineares Programm mit einer explizit angegebenen vollständigen Beschreibung von  $Q_T^8$  gerechnet werden kann.

Hat der zu einem kombinatorischen Problem gehörige Polytop eine exponentiell (abhängig von der Problemgröße, z.B. Knotenzahl) wachsende Zahl von Facetten, so bedeutet das andererseits noch längst nicht, daß das Problem nicht mit einem guten Algorithmus gelöst werden kann. Der Forest Polytop  $Q_{ST}^n$  für den vollständigen Graphen  $K_n$  hat zum Beispiel (siehe Folgerung 10.4)  $2^n + \frac{1}{2}n(n-3) - 1$  Facetten; trotzdem kann man einen optimalen Wald (spannenden Baum) in  $O(n^2)$  Rechenschritten finden [Prim,1957].

Nicht nur die Tatsache, daß es für solche Probleme "gute" Algorithmen gibt, ist bemerkenswert, sondern vielmehr, daß sich fast alle der bekannten "guten" Algorithmen für kombinatorische Optimierungsprobleme als Verfahren der linearen Programmierung interpretieren lassen, zum Beispiel der Matching Algorithmus [Edmonds,1965], b-Matching Algorithmus [Pulleyblank,1973], Greedy Algorithmus [Edmonds,1971], Matroid Intersection Algorithmus [Lawler,1975], Branching Algorithmus [Edmonds,1968]. Dabei haben die zu diesen Problemen gehörigen Polytope i.a. eine von der Problemgröße abhängig exponentiell wachsende Anzahl von Facetten, was eine explizite Speicherung der Restriktionen unmöglich macht. Der "Trick", der diese Probleme trotzdem lösbar macht, besteht darin, daß man sich das zugrundeliegende Gleichungs- und Ungleichungssystem kombinatorisch merkt und kombinatorisch überprüft, ob alle Restriktionen erfüllt sind.

Falls dies im Verlauf des Verfahrens nicht mehr der Fall ist, werden verletzte Restriktionen aktiviert und Maßnahmen getroffen, die garantieren, daß die gegenwärtigen Lösungen wieder primal zulässig werden. Damit Verfahren dieser Art polynombeschränkt sind, muß gewährleistet sein, daß die kombinatorische Überprüfung der Zulässigkeit auf einfache Weise möglich ist und daß diese Überprüfungen nur in polynombeschränkter Anzahl erfolgen.

Wie Edmonds bemerkt hat, besteht häufig dann die Möglichkeit, ein kombinatorisches Problem vermittelt eines speziellen LP-Verfahrens in polynombeschränkter Zeit zu lösen, wenn die konvexe Hülle der zulässigen Inzidenzvektoren des Problems "might be describable in some combinatorially pleasant way" [Edmonds, 1971, S. 132].

Die bisher gefundenen Facetten von  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  sind aufgrund ihrer durch wenige Parameter beschreibbaren Struktur durchaus "combinatorially pleasant".

Es erscheint sehr wahrscheinlich, daß mit einem guten Verfahren überprüft werden kann, ob alle diese Ungleichungen erfüllt sind oder nicht. Die Vermutung jedoch, daß alle Facetten der Travelling Salesman Polytope diese schöne Eigenschaft haben, werden wir im nächsten Paragraphen widerlegen und zeigen, daß  $\tilde{Q}_T^n$  auch Facetten besitzt, deren Struktur "combinatorially unpleasant" ist.

Alle Kamm- und Kurzzyklus-Facetten haben außerdem die folgende angenehme Eigenschaft: Definiert ein spezieller Kamm-Typ oder Kurzzyklus-Typ eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$ , dann definiert derselbe Typ auch eine Facette von  $\tilde{Q}_T^{n+m}$ ,  $m \geq 1$ . Speziell bedeutet dies, daß alle trivialen Liftungen, d.h. alle neuen Kanten erhalten den Koeffizienten Null, die rechte Seite und die alten Kanten behalten ihren Wert, Facetten von höherdimensionalen Problemen liefern. Man könnte also weiterhin vermuten, daß dies immer so ist, daß also  $\tilde{Q}_T^{n+1}$  alle Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  übernimmt (trivial geliftet) und nur einige neue Facetten hinzukommen. Daß auch diese Vermutung falsch ist und daß  $\tilde{Q}_T^n$  kombinatorisch komplizierte Facetten besitzt, die sich nicht trivial liften lassen, werden wir im nächsten Paragraphen nachweisen.

#### § 25. Hypohamiltonsche, hypokettenhamiltonsche Graphen und die Komplexität der Facettialstruktur von $\tilde{Q}_T^n$

In diesem Paragraphen bezeichne  $V$  immer eine  $n$ -elementige Knotenmenge, und  $E_n$  sei die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $V$ , d.h.  $K_n = [V, E_n]$ . Wir schließen in diesem Paragraphen die Existenz von parallelen Kanten aus.

Ein Graph heißt hamiltonsch bzw. kettenhamiltonsch (englisch: traceable), wenn er einen hamiltonschen Zyklus bzw. eine hamiltonsche Kette enthält.

Ein Graph  $G = [V, E]$  heißt hypohamiltonsch bzw. hypokettenhamiltonsch (englisch: hypo-traceable), wenn  $G$  nicht hamiltonsch bzw. kettenhamiltonsch ist, aber jeder der Graphen  $G-v$ ,  $\forall v \in V$ , hamiltonsch bzw. kettenhamiltonsch ist.

Bereits vor etwa 40 Jahren sind von Sousselier die ersten Ergebnisse über hypohamiltonsche Graphen erzielt worden (siehe [Chvátal, 1973b]). Durch eine Aufgabe von C. Berge in der Serie "Problèmes plaisants et délectables" der Revue Française de Recherche Opérationnelle 7, 1963, S. 405 - 406, probl. 29, ist die Untersuchung hypohamiltonscher Graphen erneut populär geworden. Eine Reihe von Arbeiten über Existenz und Eigenschaften hypohamiltonscher Graphen, siehe etwa [Herz et al., 1964, 1967], [Lindgren, 1967], [Bondy, 1972], [Chvátal, 1973b], [Thomassen, 1974a, 1974b, 1976], [Doyen, Van Diest, 1975], haben etliche Klassen dieser Graphen und interessante Ergebnisse über ihre Eigenschaften zu Tage gebracht. Viele der geäußerten Vermutungen haben sich als falsch erwiesen, und viele der offenen Probleme, siehe z.B. [Thomassen, 1976], scheinen sich nicht so ohne weiteres beantworten zu lassen.

Kapoor, Kronk und Lick [1968] erwähnen in ihrem Aufsatz, daß die Frage nach der Existenz hypokettenhamiltonscher Graphen noch ungelöst sei. Grünbaum [1973] berichtet, daß von J. Horton ein hypokettenhamiltonscher Graph mit 40 Knoten gefunden worden ist. Erst Thomassen [1974a] ist es gelungen, eine unendliche Klasse hypokettenhamiltonscher Graphen zu konstruieren.

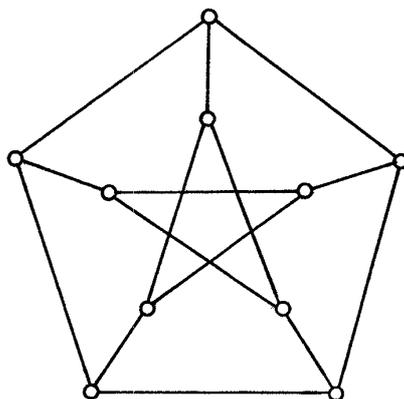
Den derzeitigen Wissensstand über hypohamiltonsche und hypokettenhamiltonsche Graphen zusammenfassend möchten wir behaupten:

- (a) Es ist schwierig, hypo- (ketten-) hamiltonsche Graphen anzugeben.
- (b) Es ist sehr schwierig, alle hypo- (ketten-) hamiltonschen Graphen für eine gegebene Knotenzahl zu charakterisieren.
- (c) Es ist fast unmöglich, in einem Computer alle hypo- (ketten-) hamiltonschen Graphen auf eine einfache Weise darzustellen und gegebenenfalls auf gewisse Eigenschaften hin zu untersuchen.

Chvátal [1973a] hat als erster eine Beziehung hypohamiltonscher Graphen zur konvexen Hülle der "schwach hamiltonschen Funktionen" erkannt, und zwar hat er gezeigt: Ist

$$E(P) := \text{conv} \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \in \{0,1\}, \sum_{e \in w(v)} x_e \leq 2, \forall v \in V, \\ \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1, \emptyset \neq W \subseteq V\},$$

wobei  $G = [V, E]$  ein beliebiger Graph ist, der den Petersen-Graphen als induzierten Untergraphen enthält, dann induziert der Petersen Graph eine Facette von  $E(P)$ . Der Petersen Graph ist ein hypohamiltonscher Graph, und zwar ist er - wie Sousselier bereits bewiesen hat - der kleinste hypohamiltonsche Graph.



Petersen Graph

Wir werden im folgenden zeigen, daß "sehr viele" hypohamiltonsche und hypokettenhamiltonsche Graphen Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  induzieren und darüber hinaus, daß alle Facetten, die durch hypohamiltonsche Graphen mit  $n$  Knoten definiert werden, ausschließlich Facetten der Polytope  $\tilde{Q}_T^n$  sind und ihre trivialen Liftungen keine Facetten von  $\tilde{Q}_T^m$ ,  $m > n$ , definieren.

Einige Eigenschaften hypohamiltonscher und hypokettenhamiltonscher Graphen sind unmittelbar einsichtig, z.B. muß jeder Knoten mindestens den Grad 3 haben, drei Knoten des Grades 3 können nie einen Zyklus der Länge 3 bilden. Für spätere Konstruktionen benötigen wir eine neue, relativ technische Eigenschaft, die wohl kaum einen tieferen mathematischen Sinn hat, die aber die meisten der bekannten Graphen dieser Art besitzen und die ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die Eigenschaft hypohamiltonscher und hypokettenhamiltonscher Graphen ist, Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  zu induzieren.

Definition 25.1.

Ein Knoten  $v \in V$  in einem hypohamiltonschen (hypokettenhamiltonschen) Graphen  $G = [V, E]$  hat die Eigenschaft  $\Delta$ , wenn für je zwei Knoten  $v_1, v_2 \in N(v)$  eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- (a)  $G - v_1$  enthält eine(n) hamiltonsche(n) Zyklus (Kette), der (die) die Kante  $\{v, v_2\}$  enthält.
- (b)  $G - v_2$  enthält eine(n) hamiltonsche(n) Zyklus (Kette), der (die) die Kante  $\{v, v_1\}$  enthält.
- (c) Es gibt einen Knoten  $v_3 \in N(v)$ , so daß  $G - v_1$  und  $G - v_2$  eine(n) hamiltonsche(n) Zyklus (Kette) enthalten, der (die)  $\{v, v_3\}$  enthält.

$G$  hat die Eigenschaft  $\Delta$ , wenn jeder Knoten  $v \in V$  die Eigenschaft  $\Delta$  hat.  $\square$

Lemma 25.2.

Jeder Knoten  $v \in V$  mit  $d(v) \leq 5$  hat die Eigenschaft  $\Delta$ .

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung für Knoten des Grades 5. Für Knoten des Grades 3 oder 4 folgt die Behauptung auf einfachere Weise analog.

a) Sei  $G = [V, E]$  hypohamiltonsch und  $v \in V$ . Sei  $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ .

O.B.d.A. zeigen wir, daß für die Knoten  $v_1, v_i \in N(v)$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ , eine der Bedingungen (a), (b), (c) von 25.1 erfüllt ist.

a<sub>1</sub>) Da  $G$  hypohamiltonsch ist, gibt es in  $G - v_1$  einen hamiltonschen Zyklus  $Z$ , o.B.d.A. möge dieser die Kette  $[v_2, v, v_3]$  enthalten. Für die Paare  $v_1, v_2 \in N(v)$  und  $v_1, v_3 \in N(v)$  ist damit die Bedingung (a) von 25.1 erfüllt, da  $Z$  die Kanten  $\{v, v_2\}$  und  $\{v, v_3\}$  enthält.

a<sub>2</sub>) Enthält  $G - v_1$  (bzw.  $G - v_4$ ) einen Zyklus, der die Kante  $\{v, v_4\}$  (bzw.  $\{v, v_1\}$ ) enthält, so ist bezüglich des Paares  $v_1, v_4 \in N(v)$  die Bedingung (a) (bzw. (b)) von 25.1 erfüllt. Falls das nicht der Fall ist, gibt es in jedem hamiltonschen Zyklus  $Z$  in  $G - v_4$  eine Kette  $[v_i, v, v_j]$  mit  $i \neq 1 \neq j$ . Einer dieser Nachbarn von  $v$  in  $Z$  muß zwangsläufig ( $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ) einer der Knoten  $v_2$  oder  $v_3$  - sagen wir  $v_3$  - sein. Folglich ist  $v_3 \in N(v)$  ein Knoten, so daß  $G - v_1$  und  $G - v_4$  einen hamiltonschen Zyklus enthalten, der  $\{v, v_3\}$  enthält. Das heißt, die Bedingung (c) von 25.1 ist erfüllt.

a<sub>3</sub>) Ersetzen wir in Beweisteil a<sub>2</sub>) den Knoten  $v_4$  durch  $v_5$ , so folgt die Behauptung für das Knotenpaar  $v_1, v_5 \in N(v)$ .

Damit haben wir alle Fälle erledigt.

b) Sei  $G$  hypokettenhamiltonsch und  $v \in V$ .

Ist  $v_1 \in N(v)$ , dann kann keine der hamiltonschen Ketten  $K$  in  $G - v_1$  in  $v$  enden, andernfalls wäre  $K \cup \{v, v_1\}$  eine hamiltonsche Kette in  $G$ . Deshalb enthält jede hamiltonsche Kette in  $G - v_1$  eine Kette  $[v_i, v, v_j]$  mit  $v_i, v_j \in N(v)$ . Aufgrund dieser Tatsache folgt die Behauptung für hypokettenhamiltonsche Graphen völlig analog zu a).  $\square$

Daß die Eigenschaft  $\Delta$  nicht völlig "weltfremd" ist, zeigen die folgenden Beispiele.

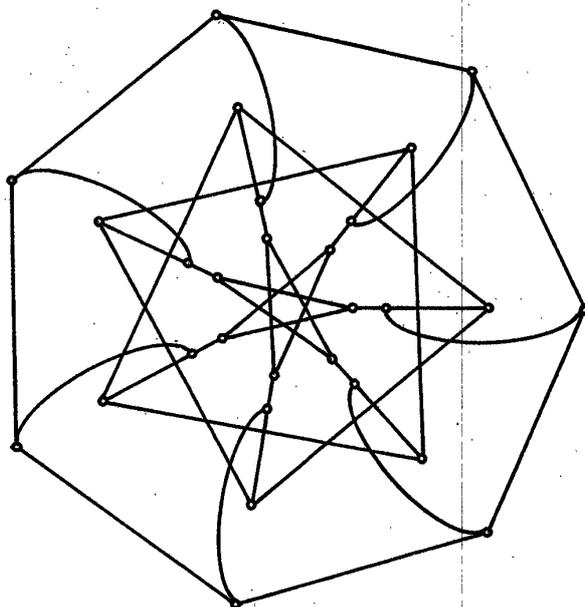
Beispiel 25.3.

Chvátal [1973b] hat eine unendliche Klasse hypohamiltonscher Graphen angegeben, die aus sogenannten Flip-Flops konstruiert werden. Jeder auf diese Art konstruierbare hypohamiltonsche Graph hat nur Knoten, deren Grad kleiner oder

gleich 5 ist. Nach Lemma 25.2 haben diese Flip-Flop-hypohamiltonschen Graphen die Eigenschaft  $\Delta$ . Ein spezieller Graph dieses Typs ist der Petersen Graph.  $\square$

Beispiel 25.4.

Bondy [1972] gab eine unendliche Klasse kubischer hypohamiltonscher Graphen an, das sind Graphen, in denen alle Knoten den Grad 3 haben. Darüberhinaus zeigte er, daß der Coxeter Graph - ein kubischer Graph mit 28 Knoten - hypohamiltonsch ist. Lemma 25.2 liefert, daß diese Graphen die Eigenschaft  $\Delta$  besitzen.  $\square$



Coxeter Graph

Beispiel 25.5.

Doyen und van Diest [1975] konnten weitere neue Klassen hypohamiltonscher Graphen finden.

a)  $G_3(m)$ -Graphen.

Diese sind wie folgt definiert: Sei  $m \geq 2$ ,  $V = \{a_1, a_2, \dots, a_{3m}, u_1, u_2, u_3, b\}$ , d.h.  $|V| = 3(m+1) + 1 \geq 10$ . E enthalte folgende Kanten:

$$\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots, \{a_{3m-1}, a_{3m}\}, \{a_{3m}, a_1\},$$

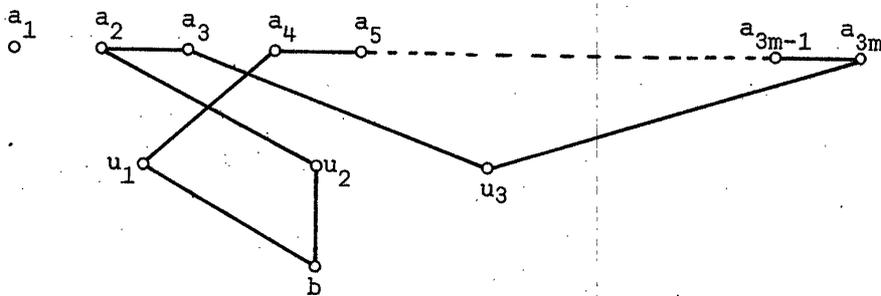
$$\{u_1, a_{1+3i}\}, \{u_2, a_{2+3i}\}, \{u_3, a_{3+3i}\}, i = 0, \dots, m-1,$$

$$\{u_1, b\}, \{u_2, b\}, \{u_3, b\}.$$

$G_3(2)$  ist wiederum der Petersen Graph. Nach Definition gilt  $d(a_i) = 3$ ,  $i = 1, \dots, 3m$ ,  $d(b) = 3$ . Zu zeigen ist noch, daß die Knoten  $u_1, u_2, u_3$  die Eigenschaft  $\Delta$  haben. Aufgrund der Symmetrie des Graphen genügt es zu zeigen, daß  $u_1$  die Eigenschaft  $\Delta$  hat. Hierzu genügt es zu zeigen, daß

$G-a_1$  einen hamiltonschen Zyklus enthält, der  $\{u_1, b\}$  und  $\{u_1, a_4\}$  enthält. Die Existenz eines solchen Hamiltonzyklus impliziert, daß bezüglich  $a_1, a_4 \in N(u_1)$  und bezüglich  $a_1, b \in N(u_1)$  die Eigenschaft (a) von 25.1 erfüllt ist. Ist  $a_{1+3i} \in N(u_1)$ ,  $i \geq 2$ , so existiert aus Symmetriegründen ein Hamiltonzyklus in  $G-a_{1+3i}$ , der  $\{u_1, b\}$  und  $\{u_1, a_4\}$  enthält. Folglich ist  $b \in N(u_1)$  ein Knoten, der die in (c) von 25.1 geforderten Eigenschaften bezüglich  $a_1, a_{1+3i} \in N(u_1)$  hat. Aus Symmetriegründen folgt, daß für alle Paare von Nachbarn von  $u_1$  eine der Bedingungen (a), (b), (c) von 25.1 erfüllt ist, d.h. daß  $u_1$  die Eigenschaft  $\Delta$  besitzt.

Ein Hamiltonzyklus mit der gesuchten Eigenschaft ist der folgende.



b)  $G_t(m, k)$ -Graphen.

Seien  $m \geq 1$ ,  $k \geq 1$ ,  $t \geq 3$ ,  $V := \{a_1, a_2, \dots, a_{tm}, u_1, u_2, \dots, u_t, b_1, b_2, \dots, b_{tk}\}$ , d.h.  $|V| = (m+k+1)t$ .  $E$  bestehe aus folgenden Kanten

$\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots, \{a_{m-1}, a_m\}, \{a_m, a_1\},$

$\{b_1, b_2\}, \{b_2, b_3\}, \dots, \{b_{k-1}, b_k\}, \{b_k, b_1\},$

$\{u_h, a_{h+it}\}, h = 1, 2, \dots, t; i = 0, 1, \dots, m-1,$

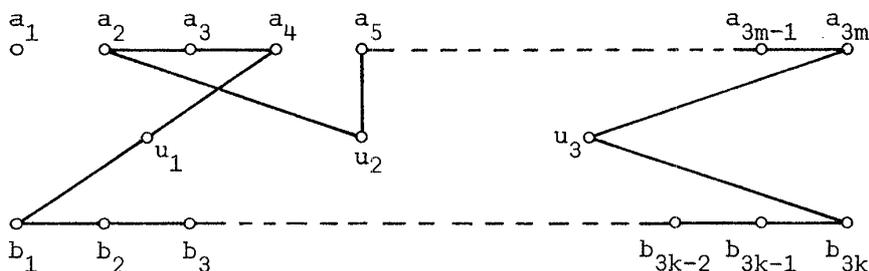
$\{u_h, b_{h+jt}\} h = 1, 2, \dots, t; i = 0, 1, \dots, k-1.$

Doyen und van Diest haben gezeigt, daß die Graphen  $G_3(m, k)$  mit  $m \geq 2$ ,  $k \geq 2$  und die Graphen  $G_5(m, k)$  mit  $m \geq 2$  oder  $k \geq 2$  hypohamiltonsch sind.

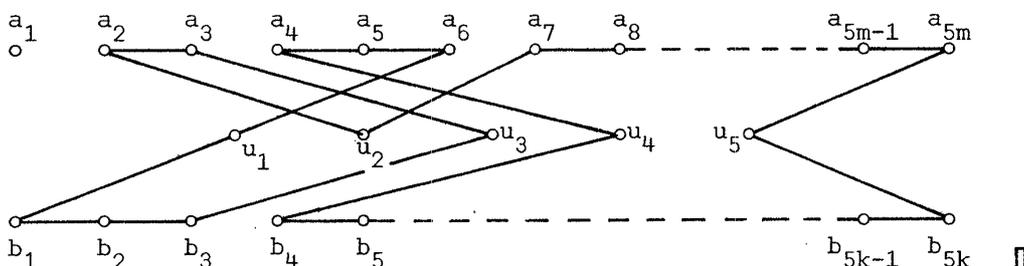
Nach Definition gilt in beiden Fällen

$d(a_i) = 3, i = 1, \dots, tm, d(b_j) = 3, j = 1, \dots, tk$ . Also haben diese Knoten nach Lemma 25.2 die Eigenschaft  $\Delta$ . Zu zeigen bleibt, daß auch die Knoten  $u_i$  die Eigenschaft  $\Delta$  haben.

b<sub>1</sub>) Aufgrund der Symmetrie von  $G_3(m, k)$  genügt es wie in a) zu zeigen, daß  $G_3(m, k) - a_1$  einen hamiltonschen Zyklus enthält, der die Kanten  $\{u_1, a_4\}, \{u_1, b_1\}$  enthält; ein solcher ist der folgende:



$b_2$ ) Desgleichen genügt es zu zeigen, daß  $G_5(m,k) - a_1$  einen hamiltonschen Zyklus enthält, der die Kanten  $\{u_1, a_6\}, \{u_1, b_1\}$  enthält. Der folgende hamiltonsche Zyklus leistet das Gewünschte:



Beispiel 25.6.

Ohne Beweis merken wir an, daß die von Lindgren [1967] und schon früher von Sousselier (siehe [Herz et. al., 1967]) gefundenen hypohamiltonschen Graphen ebenfalls die Eigenschaft  $\Delta$  haben.  $\square$

Beispiel 25.7.

Alle hypohamiltonschen Graphen, die mit dem Verfahren von Thomassen [1974a] aus kubischen hypohamiltonschen Graphen konstruiert werden können, haben Knoten, deren Grad kleiner oder gleich vier ist. Aus Lemma 25.2 folgt die Eigenschaft  $\Delta$ .  $\square$

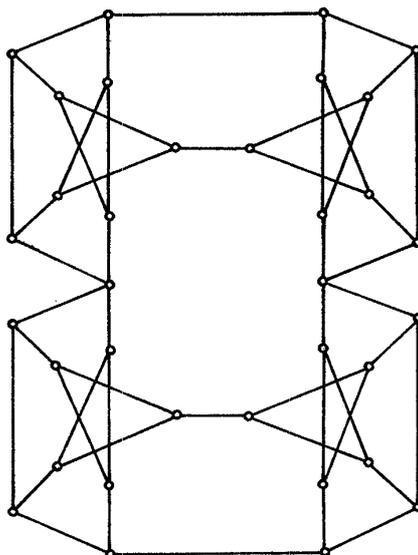
Beispiel 25.8.

Alle hypokettenhamiltonschen Graphen, die mit dem Verfahren von Thomassen [1974a] aus kubischen hypohamiltonschen Graphen konstruiert werden können, haben nur Knoten mit Grad kleiner oder gleich 4, d.h. haben die Eigenschaft  $\Delta$ .  $\square$

Beispiel 25.9.

Die von Thomassen [1976, Theorem 3.2] angegebene Klasse hypokettenhamiltonscher Graphen ist kubisch, besitzt also Eigenschaft  $\Delta$ .  $\square$

Der kleinste bekannte hypokettenhamiltonsche Graph hat 34 Knoten und kann mit den Verfahren von Thomassen [1974a] aus vier Petersen Graphen konstruiert werden. Er hat die Eigenschaft  $\Delta$ , da  $d(v) \leq 4 \quad \forall v \in V$ .



Thomassen Graph

Betrachten wir die hypohamiltonschen und hypokettenhamiltonschen Graphen  $G = [V, E]$ ,  $|V| = n$ , als Untergraphen des vollständigen Graphen  $K_m$ ,  $m \geq n$ , d.h. wir setzen  $V \subset \{1, 2, \dots, m\}$ , so können sie auf folgende Weise mit dem monotonen Travelling Salesman Polytopen  $\tilde{Q}_T^m$  in Verbindung gebracht werden.

Satz 25.10.

a) Ist  $G = [V, E]$  ein hypohamiltonscher Graph,  $|V| = n$ , dann ist die hypohamiltonsche Ungleichung

$$\sum_{e \in E} x_e \leq n-1$$

eine gültige Ungleichung für  $\tilde{Q}_T^m$ ,  $m \geq n$ .

b) Ist  $G = [V, E]$  ein hypokettenhamiltonscher Graph,  $|V| = n$ , dann ist die hypokettenhamiltonsche Ungleichung

$$\sum_{e \in E} x_e \leq n-2$$

eine gültige Ungleichung für  $\tilde{Q}_T^m$ ,  $m \geq n$ .

Beweis:

a) Sei  $T \in \tilde{T}_m$ , o.B.d.A. sei  $T$  eine Tour.  $\sum_{e \in E} x_e^T = n$  kann nur dann gelten, wenn  $n$  Kanten von  $T$  in  $E$  enthalten sind, das hieße,  $T$  würde einen Zyklus der

Länge  $n$  in  $G$  definieren, was nicht sein kann, da  $G$  nicht hamiltonsch ist.

- b) Sei  $T \in \tilde{T}_m$ , o.B.d.A. sei  $T$  eine Tour.  $\sum_{e \in E} x_e^T = n-1$  kann nur dann gelten, wenn  $T$   $n-1$  Kanten aus  $E$  enthält.  $T$  ist ein Zyklus, folglich muß  $T \cap E$ , da  $G$  hypokettenhamiltonsch ist, aus Ketten bestehen. Ist  $T \cap E$  eine Kette, so hat diese höchstens die Länge  $n-2$ , da  $G$  keine hamiltonsche Kette enthält. Enthält  $T \cap E$  zwei oder mehr disjunkte Ketten, so enthalten diese trivialerweise höchstens  $n-2$  Kanten aus  $E$ .  $\square$

Definition 25.11.

Ein hypohamiltonscher (hypokettenhamiltonscher) Graph  $G = [V, E]$  heißt maximal, wenn  $G + e$  hamiltonsch (kettenhamiltonsch) ist für alle  $e \in E_n - E$ .  $\square$

Offensichtlich ist jeder hypo- (ketten-) hamiltonsche Graph in einem maximalen hypo-(ketten-)hamiltonschen Graphen auf derselben Knotenmenge enthalten.

Wir erinnern daran, daß eine gültige Ungleichung bezüglich eines Polytopen maximal heißt, wenn keiner der Koeffizienten vergrößert werden kann, ohne die Gültigkeit zu zerstören.

Satz 25.12.

Sei  $G = [V, E]$ ,  $|V| = n$ , ein hypohamiltonscher Graph. Dann gilt:

$\sum_{e \in E} x_e \leq n-1$  ist maximal bezüglich  $\tilde{Q}_T^n$  genau dann, wenn  $G$  ein maximaler hypohamiltonscher Graph ist.

Beweis:

- a) Sei  $ax := \sum_{e \in E} x_e$ . Sei  $e = \{v, w\} \in E$ , dann gibt es in  $G-v$  einen hamiltonschen

Zyklus  $C$ . Dieser enthält eine Kante  $\{w, w'\}$ ,  $w' \in N_G(w)$ . Für

$C' := (C - \{\{w, w'\}\}) \cup \{e\}$  gilt dann  $ax^{C'} = n-1$ . Also kann keiner der

Koeffizienten  $a_e = 1$ ,  $e \in E$ , erhöht werden, ohne daß die hypohamiltonsche Ungleichung ungültig wird.

- b) Die hypohamiltonsche Ungleichung  $ax \leq n-1$  ist also genau dann nicht maximal, wenn es ein  $f \in E_n - E$  und  $b_f > 0$  gibt, so daß  $ax + b_f x_f \leq n-1$  gültig bezüglich  $\tilde{Q}_T^n$  ist. Das kann aber nur genau dann der Fall sein, wenn es ein  $f \in E_n - E$  gibt, so daß  $G + f$  keinen hamiltonschen Zyklus besitzt, was genau dann zutrifft, wenn  $G$  nicht maximal ist.  $\square$

Satz 25.13.

Sei  $G = [V, E]$ ,  $|V| = n$ , ein hypokettenhamiltonscher Graph. Dann gilt:

$\sum_{e \in E} x_e \leq n-2$  ist maximal bezüglich  $\tilde{Q}_T^m$  für alle  $m \geq n$  genau dann, wenn  $G$  ein maximaler hypokettenhamiltonscher Graph ist.

Beweis:

- a) Sei  $ax = \sum_{e \in E} x_e$ . Sei  $e = \{v, w\} \in E$ , dann enthält  $G-v$  eine hamiltonsche Kette  $K$ . Diese muß eine Kette  $[w', w, w'']$  enthalten, mit  $w', w'' \in N_G(w)$ . Sei  $K' := (K - \{\{w, w'\}\}) \cup \{e\}$ , dann ist  $x^{K'} \in \tilde{Q}_T^m$  und  $ax^{K'} = n-2$ . Keiner der Koeffizienten  $a_e = 1$ ,  $e \in E$ , kann also erhöht werden.
- b) Sei  $f \in E_m$  mit  $f \cap V = \emptyset$  und  $K'$  die in a) definierte Kette. Dann gilt für  $K'' := K' \cup \{f\}$  :  $x^{K''} \in \tilde{Q}_T^m$  und aufgrund der Gültigkeit der hypokettenhamiltonschen Ungleichung  $n-2 = ax^{K'} \leq ax^{K''} = ax^{K'} + a_f x_f \leq n-2$ , also folgt  $a_f = 0$ .
- c) Sei  $f = \{v, w\} \in E_m$  mit  $v \in V$ ,  $w \notin V$ .  $G-v$  enthält eine hamiltonsche Kette  $K$ , also  $ax^K = n-2$ . Sei  $K' = K \cup \{f\}$ , dann ist  $x^{K'} \in \tilde{Q}_T^m$  und  $n-2 = ax^K \leq ax^{K'} = ax^K + a_f x_f \leq n-2$ , folglich  $a_f = 0$ .
- d) Die hypokettenhamiltonsche Ungleichung  $ax \leq n-2$  ist also genau dann nicht maximal, wenn es eine Kante  $f \in E_m - E$ ,  $f \subset V$ , gibt und eine reelle Zahl  $b_f > 0$ , so daß  $ax + b_f x_f \leq n-2$  gültig bezüglich  $\tilde{Q}_T^m$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn es ein  $f \in E_m - E$ ,  $f \subset V$ , gibt, so daß  $G+f$  keine hamiltonsche Kette besitzt; ein solches  $f$  existiert genau dann, wenn  $G$  nicht maximal ist.  $\square$

Damit sind die wesentlichen Vorüberlegungen für den Beweis der zwei Hauptausagen dieses Paragraphen zusammengestellt. Zunächst zeigen wir, daß es zu jedem hypohamiltonschen Graphen mit  $n$  Knoten, der die Eigenschaft  $\Delta$  besitzt, mindestens einen hypohamiltonschen Graphen auf derselben Knotenmenge gibt, der eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$  induziert, und wir zeigen, daß sich diese Facette nicht trivial liften läßt.

Satz 25.14.

Sei  $G = [V, E]$ ,  $|V| = n$ , ein hypohamiltonscher Graph, der die Eigenschaft  $\Delta$  besitzt. Dann gilt für jeden maximalen hypohamiltonschen Graphen  $G' = [V, E']$  mit  $E \subset E'$ :

- (a)  $\sum_{e \in E'} x_e \leq n-1$  ist eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$ .
- (b)  $\sum_{e \in E'} x_e \leq n-1$  ist keine Facette von  $\tilde{Q}_T^m$  für alle  $m > n$ .

Beweis:

(a) a<sub>0</sub>) Sei  $ax := \sum_{e \in E'} x_e$ ,  $H_a := \{x \in \tilde{Q}_T^n \mid ax = n-1\}$ ,  $H := \{T \in \tilde{T}_n \mid ax^T = n-1\}$ .

Sei  $bx = b_0$  eine beliebige Hyperebene mit  $H_a \subset \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid bx = b_0\}$ .

Wenn wir zeigen können, daß  $b = \pi a$  ( $b_0 = \pi(n-1)$ ) gilt, sind wir wie üblich nach Satz 4.4 fertig.

a<sub>1</sub>) Wir zeigen zunächst  $b_e = \pi a_e \quad \forall e \in E'$ .

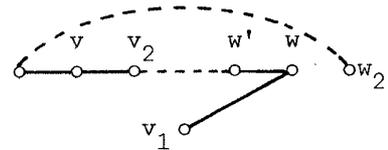
Dazu zeigen wir: Ist  $v \in V$  beliebig und sind  $v_1, v_2$  zwei beliebige Nachbarn von  $v$  in  $G'$ , dann gilt  $b_{vv_1} = b_{vv_2}$ . Aus dem Zusammenhang von  $G'$  folgt dann  $b_e = b_f \quad \forall e, f \in E'$ , denn sind  $e, f \in E'$ ,  $e = \{v, v_1\}$ ,  $f = \{w, w_1\}$ , dann existiert eine Kette in  $G'$   $[v, i_1, i_2, \dots, i_k, w]$ , die  $v$  und  $w$  verbindet. Es ist dann  $b_{vv_1} = b_{vi_1} = b_{i_1 i_2} = \dots = b_{i_k w} = b_{ww_1}$ .

a<sub>11</sub>) Sei  $v \in V$  beliebig und seien  $v_1, v_2 \in V$  mit  $\{v, v_1\}, \{v, v_2\} \in E$ .

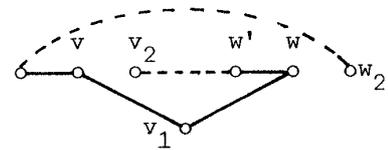
Nach Voraussetzung hat  $G = [V, E]$  die Eigenschaft  $\Delta$ , also hat nach Definition auch  $v$  in  $G$  die Eigenschaft  $\Delta$ , d.h. einer der drei folgenden Fälle muß eintreten.

1. Fall:  $G-v_1$  enthält einen hamiltonschen Zyklus  $C$ , der die Kante  $\{v, v_2\}$  enthält. Sei  $w \in V - \{v, v_1, v_2\}$  mit  $\{w, v_1\} \in E$  (wegen  $d(v_1) \geq 3$  existiert ein solcher Knoten), und  $C$  enthalte die Ketten  $[v', v, v_2]$  und  $[w', w, w_2]$ .  $v$  und  $w$  sind in  $C$  nicht benachbart, sonst wäre  $G$  hamiltonsch. Wir definieren die folgenden hamiltonschen Ketten in  $G$

$$C_1 = (C - \{w, w_2\}) \cup \{w, v_1\}$$



$$C_2 = (C - \{w, w_2\}, \{v, v_2\}) \cup \{w, v_1\}, \{v, v_1\}$$



Nach Konstruktion gilt  $C_1, C_2 \in H$ , also folgt

$$0 = b_0 - b_0 = bx^{C_1} - bx^{C_2} = b_{vv_2} - b_{vv_1}.$$

2. Fall:  $G-v_2$  enthält einen hamiltonschen Zyklus  $C$ , der die Kante  $\{v, v_1\}$  enthält.

Analog zu Fall 1!

3. Fall: Es gibt einen Knoten  $v_3 \in N_G(v)$ , so daß  $G-v_1$  und  $G-v_2$  je einen hamiltonschen Zyklus enthalten, der  $\{v, v_3\}$  enthält. Mit der Konstruktion

von Fall 1 können wir zeigen, daß  $b_{vv_1} = b_{vv_3}$  gilt, nach Fall 2 gilt

$b_{vv_2} = b_{vv_3}$  und damit  $b_{vv_1} = b_{vv_2}$ . Damit haben wir gezeigt:

$$b_e = \pi \quad \forall e \in E.$$

a<sub>12</sub>) Sei nun  $f \in E' - E$ ,  $f = \{i, j\}$ . Da  $G$  hypohamiltonsch ist, gibt es in  $G-j$  einen hamiltonschen Zyklus  $C$ . Dieser enthält eine Kante  $\{i, v\} \in E$ ,  $v \in N_G(i)$ . Sei  $w$  ein Nachbar von  $j$  in  $G$ . Mit derselben Konstruktion wie in a<sub>11</sub>) Fall 1 zeigen wir, daß  $b_{ij} = b_{iv}$  gilt und damit

$$b_e = \pi \quad \forall e \in E'.$$

a<sub>2</sub>) Sei  $f \in E_n - E'$ . Da  $G'$  maximal ist, enthält  $G'+f$  einen hamiltonschen Zyklus  $C$ , dieser muß zwangsläufig die Kante  $f$  und  $n-1$  Kanten aus  $E'$  enthalten. Damit gilt  $C \in H$  und  $C - \{f\} \in H$ , folglich  $0 = bx^C - bx^{C-\{f\}} = b_f$ , und wir erhalten

$$b_e = 0 \quad \forall e \in E_n - E'.$$

Damit haben wir gezeigt, daß  $b = \pi a$  gilt, und haben (a) erledigt.

(b) Es ist  $E' \subsetneq E(V)$ , und die Kurzzyklusbedingung  $\sum_{e \in E(V)} x_e \leq n-1 = |V| - 1$  ist nach Satz 18.3 eine Facette von  $\tilde{Q}_T^m$ ,  $m > n$ .

Folglich ist  $\sum_{e \in E'} x_e \leq n-1$  noch nicht einmal eine maximale Ungleichung bezüglich  $\tilde{Q}_T^m$  für alle  $m > n$ .  $\square$

Nun werden wir uns überlegen, daß eine ähnliche Aussage für hypokettenhamiltonsche Graphen gilt, und zwar gibt es wiederum zu jedem hypokettenhamiltonschen Graphen auf  $n$  Knoten, der die Eigenschaft  $\Delta$  besitzt, mindestens einen hypokettenhamiltonschen Graphen auf derselben Knotenmenge, der eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$  definiert; anders als im hypohamiltonschen Fall läßt sich jedoch die hypokettenhamiltonsche Facette trivial liften, d.h. dieselbe Ungleichung definiert auch eine Facette von  $\tilde{Q}_T^m$ ,  $m > n$ .

Satz 25.15.

Sei  $G = [V, E]$ ,  $|V| = n$ , ein hypokettenhamiltonscher Graph, der die Eigenschaft  $\Delta$  besitzt. Dann gilt für jeden maximalen hypokettenhamiltonschen Graphen  $G' = [V, E']$  mit  $E \subsetneq E'$ :

$\sum_{e \in E'} x_e \leq n-2$  ist eine Facette von  $\tilde{Q}_T^m$  für alle  $m \geq n$ .

Beweis:

a) Wir übernehmen alle Bezeichnungen des Beweisteils (a) a<sub>0</sub>) von Satz 25.14, wobei wir die hypohamiltonsche durch die hypokettenhamiltonsche Ungleichung ersetzen. Die Überlegungen in (a) a<sub>1</sub>) sind auch hier richtig.

a<sub>11</sub>) Sei  $v \in V$  beliebig, seien  $v_1, v_2 \in V$  mit  $\{v, v_1\}, \{v, v_2\} \in E$ .  $v$  hat nach Voraussetzung bezüglich  $G$  die Eigenschaft  $\Delta$ , damit können die folgenden drei Fälle eintreten.

1. Fall:  $G-v_1$  enthält eine hamiltonsche Kette  $K$ , die die Kante  $\{v, v_2\}$  enthält.  $K_1 := (K - \{\{v, v_2\}\}) \cup \{\{v, v_1\}\}$ ,  $K_1$  besteht aus 2 Ketten, d.h.  $x^{K_1}$  ist zulässig für  $\tilde{Q}_T^m$  und  $K, K_1 \in H$ ; folglich gilt  $0 = bx^{K_1} - bx^K = b_{vv_1} - b_{vv_2}$ .

2. Fall:  $G-v_2$  enthält eine hamiltonsche Kette, die  $\{v, v_1\}$  enthält. Analog zu Fall 1.

3. Fall: Es gibt einen Knoten  $v_3 \in V$  mit  $\{v, v_3\} \in E$ , so daß  $G-v_1$  und  $G-v_2$  je eine hamiltonsche Kette enthalten, die die Kante  $\{v, v_3\}$  enthält. Aus Fall 1 folgt  $b_{vv_1} = b_{vv_3}$ , aus Fall 2  $b_{vv_2} = b_{vv_3}$ , also  $b_{vv_1} = b_{vv_2}$ , also folgt

$$b_e = \pi \quad \forall e \in E.$$

a<sub>12</sub>) Sei  $f \in E' - E$ ,  $f = \{i, j\}$ , dann enthält  $G-j$  eine hamiltonsche Kette  $K$ , diese enthält eine Kante  $\{i, v\} \in E$ . Sei  $K_1 := (K - \{\{i, v\}\}) \cup \{\{i, j\}\}$ , dann ist  $K, K_1 \in H$ ; folglich  $0 = bx^{K_1} - bx^K = b_{iv} - b_{ij}$ . Also gilt

$$b_e = \pi \quad \forall e \in E'.$$

b) Sei  $f \in E_m - E'$ .

b<sub>1</sub>) Ist  $f \cap V = \emptyset$ , so ist trivialerweise  $b_f = 0$ .

b<sub>2</sub>) Sei  $f \cap V = \{v\}$ , dann enthält  $G-v$  eine hamiltonsche Kette  $K$ , also ist auch  $K \cup \{f\} \in H$ , folglich  $0 = bx^{K \cup \{f\}} - bx^K = b_f$ .

b<sub>3</sub>) Sei  $f \in E_n - E'$ . Da  $G'$  maximal ist, enthält  $G'+f$  eine hamiltonsche Kette  $K$ , die zwangsläufig  $f$  enthält;  $K$  und  $K - \{f\}$  sind dann aber aus  $H$ , somit  $0 = bx^K - bx^{K - \{f\}} = b_f$ .

Insgesamt folgt damit  $b = \pi a$ ,  $b_0 = \pi(n-2)$ , und wir sind fertig.  $\square$

Die Sätze 25.14 und 25.15 besagen also, daß es zu jedem der in den Beispielen 25.3 bis 25.9 angegebenen Graphen mindestens einen hypohamiltonschen bzw. hypokettenhamiltonschen Graphen gibt, der eine Facette von  $\tilde{Q}_T^n$  bzw.  $\tilde{Q}_T^m$ ,  $m \geq n$ , definiert. Bedenken wir, daß fast jede Umnummerierung der Knoten zu verschiedenen Untergraphen von  $K_n$  und damit zu verschiedenen Facetten führt, so ist die Anzahl der Facetten, die von diesen Graphen induziert werden, nicht gerade gering.

Betrachten wir speziell den Petersen Graphen, der ein maximaler hypo-hamiltonscher Graph ist und 10 Knoten hat, dann gibt es  $\frac{1}{2} \binom{10}{5} \frac{4!}{2} 5! = 181\,440$  verschiedene Facetten von  $\tilde{Q}_T^{10}$ , die von den verschiedenen Untergraphen von  $K_{10}$  induziert werden, die isomorph zum Petersen Graphen sind.

Um die Diskussion vom Ende des vorigen Paragraphen über gute Algorithmen und eine "schöne" Beschreibung von Polyedern wieder aufzunehmen, möchten wir kurz beschreiben, wie der Greedy Algorithmus für das Minimum Spanning Tree Problem funktioniert [Kruskal,1956]:

- (1) *Wähle unter den noch nicht ausgewählten Kanten diejenige Kante  $e$  mit der kleinsten Bewertung.*
- (2) *Falls  $e$  mit den bereits gewählten Kanten einen Zyklus bildet, entferne  $e$  aus dem Graphen.*  
*Gehe zu (1).*

Wenn der Algorithmus beendet ist, d.h. keine Kanten mehr zur Auswahl zur Verfügung stehen, bilden die ausgewählten Kanten einen minimalen spannenden Baum von  $G$ .

Die Schritte (1) und (2) sind typisch für die meisten Algorithmen in der kombinatorischen Optimierung. Schritt (1) gibt ein rechenstechnisch möglichst einfaches, heuristisches Auswahlverfahren an. Schritt (2) überprüft, ob Schritt (1) eine für das Problem zulässige Wahl getroffen hat. Falls ja, kann man weitermachen, falls nein, sind Sondervorkehrungen zu treffen.

Die Überprüfung der Zulässigkeit bedeutet im allgemeinen eine Untersuchung, ob alle Nebenbedingungen erfüllt sind. D.h. es muß - geometrisch gesehen - gesichert sein, daß keine der Facetten des zugehörigen Polytopen durchbrochen worden ist. Obwohl der Spanning Tree Polytop rund  $2^n$  Facetten hat, kann die Überprüfung auf Zulässigkeit kombinatorisch sehr einfach durchgeführt werden, man muß nur nachsehen, ob ein Zyklus entsteht, was in einer Rechenzeit, die unabhängig von der Größe des Graphen ist, geschehen kann. Desweiteren kann hier das Problem, was zu tun ist, falls eine unzulässige Wahl durchgeführt wurde, elegant durch Entfernen einer Kante gelöst werden. Geometrisch bedeutet eine unzulässige Wahl die Verletzung einer Nebenbedingung, in diesem Falle die Verletzung einer Kurzzyklusbedingung. In der linearen Programmierung würde man nun diese Nebenbedingung aktivieren und als Schnittebene zu den bisherigen Restriktionen hinzufügen. Durch die Elimination einer Kante kann man diesen Vorgang kombinatorisch realisieren. Weiterhin muß natürlich gesichert sein, daß die auf diese Weise erzeugte Lösung optimal ist, was beim Spanning Tree

Problem durch ein simples Lemma bewiesen werden kann.

Hat man kein Resultat zur Verfügung, das ein Vorgehen gestattet, bei dem in jedem Schritt Zulässigkeit und am Ende Optimalität gewährleistet ist, (innerer Algorithmus), so bietet sich natürlich ein Verfahren an, das in jedem Schritt Optimalität, jedoch nicht Zulässigkeit garantiert (äußerer Algorithmus). Beim Minimum Spanning Tree Problem sieht dies, wenn wir von einem zusammenhängenden Graphen  $G$  ausgehen, wie folgt aus.

- (1) Wähle unter den noch nicht ausgewählten Kanten diejenige Kante  $e$  mit größtem Gewicht.
- (2) Falls  $G-e$  zusammenhängend ist, entferne  $e$  aus  $G$  und gehe zu (1).

Falls keine Kante mehr aus dem Graphen entfernt werden kann, ohne daß der Zusammenhang zerstört wird, definiert die verbleibende Kantenmenge einen minimalen spannenden Bau.

Geometrisch betrachtet kann man diese Vorgehensweise wie folgt interpretieren. Ist  $P$  der zu dem betrachteten Problem gehörige Polytop, dann definieren wir einen Polytopen  $P_1$ , der  $P$  oder alle Optimallösungen von  $P$  enthält und über dem sich das betrachtete lineare Programm sehr schnell lösen läßt. Liegt die Optimallösung in  $P$ , so sind wir fertig, falls nicht, definieren wir einen Polytopen  $P_2$ , der die alte Optimallösung nicht enthält, für den jedoch  $P \subset P_2 \subset P_1$  gilt, und lösen das lineare Programm über  $P_2$  erneut. Ist garantiert, daß für irgendein  $k \in \mathbb{N}$   $P_k = P$  gilt, kann das zugrundeliegende Problem im Prinzip gelöst werden. Theoretisch kann man zu jedem Problem eine Folge von Polytopen  $P_i$  finden, so daß ein solches  $k$  existiert. Ist jedoch  $k$  sehr groß oder gar explizit kein solches  $k$  bekannt, dann wird diese Vorgehensweise fragwürdig. Darüber hinaus wird dieses Verfahren problematisch, wenn es etwa nur für die ersten Relaxierungen  $P_1, \dots, P_s$  von  $P$  einen schnellen Algorithmus gibt, während die weiteren Polytope  $P_{s+i}$  entweder sehr schwierig explizit zu finden sind oder die Lösung eines linearen Programms über  $P_{s+i}$  vom gleichen Schwierigkeitsgrad wie über  $P$  ist.

Wie wir uns im vorhergehenden überlegt haben, lassen sich also die meisten kombinatorischen Algorithmen auf natürliche Weise geometrisch deuten, wodurch wir eine Beziehung zwischen der kombinatorischen Beschreibung und Lösung eines Problems zu seiner geometrischen Beschreibung und Lösung (durch ein spezielles LP-Verfahren) herstellen können. Eine durchaus interessante (und noch ungeklärte) Frage ist, von welcher Art diese Beziehungen sind und ob ihnen eine tiefere Bedeutung innewohnt. Viele Ergebnisse der Komplexitätstheorie und der

"polyhedral combinatorics" deuten darauf hin. Erstaunlicherweise ist zu allen kombinatorischen Optimierungsproblemen, für die ein polynomialer Algorithmus existiert, auch eine schöne (combinatorially pleasant) lineare Charakterisierung des zugehörigen Polytopen bekannt. Umgekehrt gibt es kein NP-vollständiges kombinatorisches Optimierungsproblem, dessen Polytop vollständig bekannt wäre. Darüber hinaus ist für viele zu NP-vollständigen Problemen gehörige Polytope gezeigt worden, daß sie "sehr komplizierte" Facetten besitzen, siehe z.B. [Padberg,1973], [Nemhauser,Trotter,1974], [Padberg,1976]. Unsere Überlegungen zusammenfassend glauben wir, daß es lohnend sein wird, den Wahrheitsgehalt der folgenden Vermutung zu überprüfen.

*Ein kombinatorisches Optimierungsproblem ist genau dann schwierig (nicht polynombeschränkt, NP-vollständig), wenn der zugehörige Polytop sehr komplizierte Facetten besitzt und nicht explizit angegeben werden kann.*

Wir sind der Ansicht, daß die in diesem Paragraphen gefundenen hypohamiltonschen und hypokettenhamiltonschen Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  solche komplizierten Facetten sind. Da das Auffinden aller hypohamiltonschen und aller hypokettenhamiltonschen Graphen kein einfaches Problem zu sein scheint, liegt außerdem die Vermutung nahe, daß es kaum jemals möglich sein wird,  $\tilde{Q}_T^n$  explizit durch ein System von Ungleichungen vollständig zu beschreiben.

Für das symmetrische Travelling Salesman Problem sind recht erfolgreich äußere Algorithmen entwickelt worden, die auf dem Spanning Tree Problem oder dem 2-Matching Problem basieren. Es ist durchaus nicht unwahrscheinlich, daß es einen guten Algorithmus gibt, der überprüft, ob alle Kurzzyklusbedingungen und alle Kammungleichungen erfüllt sind. Wie aber soll man gewährleisten, daß auch alle hypokettenhamiltonschen und hypohamiltonschen Ungleichungen erfüllt sind, ohne diese explizit anzugeben?

### TEIL 3. DAS ASYMMETRISCHE TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

Der Unterschied zwischen dem symmetrischen und asymmetrischen Travelling Salesman Problem (ATSP) besteht darin, daß die Entfernung  $c_{ij}$  von der Stadt  $i$  zur Stadt  $j$  nicht gleich der Entfernung  $c_{ji}$  von der Stadt  $j$  zur Stadt  $i$  sein muß, das heißt, daß wir bei der Ermittlung des kürzesten Rundreiseweges auf die Richtung, in der wir eine Strecke durchlaufen, Rücksicht nehmen müssen.

Solche asymmetrischen Probleme treten häufig bei Umrüstproblemen (Walzstraßen, Mehrproduktpipelines, Reinigung von Lackierereien) auf, wo das Umstellen vom Typ A (etwa breites Walzprofil) auf Typ B (schmales Walzprofil) weniger Aufwand erfordert als der umgekehrte Arbeitsgang. Mathematisch bedeutet diese Änderung der Problemstellung einen Übergang in der Darstellung durch ungerichtete zur Darstellung durch gerichtete Graphen.

Eine zulässige Lösung des asymmetrischen TSP können wir also durch eine orientierte zyklische Permutation oder durch einen hamiltonschen Kreis in einem vollständigen Digraphen oder wie üblich durch einen Inzidenzvektor eines hamiltonschen Kreises darstellen. Da ein vollständiger Digraph doppelt so viele Bögen wie ein vollständiger Graph enthält, bedeutet das, daß sich auch die Anzahl der Variablen, mit der wir das asymmetrische TSP beschreiben müssen, verdoppelt. Einen Hamiltonkreis  $T$  in einem Digraphen bezeichnen wir im weiteren kurz als Tour, den Inzidenzvektor  $x^T \in \mathbb{R}^{n^2-n}$  einer Tour definieren wir wie üblich durch

$$x_{ij}^T := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (i,j) \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^{n^2-n}$  im weiteren wie folgt indiziert sein soll:

$$x = (x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{23}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n,n-1}).$$

Mit  $T_n$  bezeichnen wir die Menge aller Hamilton-Kreise im vollständigen Digraphen mit  $n$  Knoten und mit  $\tilde{T}_n$  die Menge aller Bogenmengen, die Teilmengen eines Hamilton-Kreises sind. Sei

$$\underline{P}_T^n := \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^{n^2-n} \mid T \in T_n\},$$

$$\underline{\tilde{P}}_T^n := \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^{n^2-n} \mid T \in \tilde{T}_n\}.$$

$\underline{P}_T^n$  heißt asymmetrischer Travelling Salesman Polytop und  $\underline{\tilde{P}}_T^n$  monotoner asymmetrischer Travelling Salesman Polytop.

Da  $\tilde{T}_n$  die Monotonisierung von  $T_n$  ist, werden einige Beziehungen zwischen dem monotonen Polytopen  $\tilde{P}_T^n$  und seiner Seitenfläche  $P_T^n$  durch Satz 6.6 wiedergegeben. Es wird sich zeigen, daß die Verwandtschaft zwischen  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  mit einigen Ausnahmen ähnlich wie die zwischen  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  ist; jedoch wird sich die Vermutung, daß die asymmetrischen Travelling Salesman Probleme einfach eine "Übersetzung" der symmetrischen Probleme in die Sprache der gerichteten Graphen sind, nicht bewahrheiten, sondern es werden sich einige Besonderheiten der asymmetrischen Probleme herauskristallisieren.

Das Ziel der Untersuchungen in Teil 3 ist, eine "möglichst gute" lineare Charakterisierung von  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  zu finden.

Eine Tour hat offensichtlich die Eigenschaft, daß aus jedem Knoten genau ein Bogen heraus und in jeden Knoten genau ein Bogen hineingeht; weiter kann eine Tour natürlich keine Kurzkreise (d.h. Kreise der Länge  $< |V|$ ) enthalten. Mit Problemen, die diesen Sachverhalt genauer beschreiben, wollen wir uns zunächst in den beiden folgenden Kapiteln beschäftigen.

#### *Kapitel 10. Das Zuordnungsproblem*

Das Zuordnungsproblem ist eines der "ältesten" Probleme der mathematischen Programmierung und wurde bereits 1939 von Kantorovich [1960] in seiner Studie über mathematische Methoden in der Organisation und Produktionsplanung betrachtet.

*Gegeben seien  $n$  Aufgaben und  $n$  Personen,  $c_{ij}$  sei der "Wert" der Zuordnung der  $i$ -ten Person zur  $j$ -ten Aufgabe. Gesucht ist eine Zuordnung, so daß jeder Person genau eine Aufgabe zugeteilt wird und die Summe der "Werte" optimal ist.*

Zur Lösung dieses Problems wurde einer der ersten guten Algorithmen - der sogenannte Ungarische Algorithmus [Kuhn,1955] - formuliert, welcher die Entwicklung weiterer guter Algorithmen (z.B. Matching Algorithmus [Edmonds,1965a], Matroid Intersection Algorithmus [Lawler,1975]) stark beeinflußt hat.

Wir wollen das Zuordnungsproblem in matroidaler Schreibweise darstellen und den zugehörigen Polytopen betrachten. Dazu untersuchen wir zunächst zwei mit dem Zuordnungsproblem verwandte Matroide auf einem Digraphen.

§ 26. *Partitions Matroide*

Sei  $E$  eine endliche Menge und  $B_1, \dots, B_n$  eine Partition von  $E$ , weiterhin seien  $d_1, \dots, d_n$  nichtnegative ganze Zahlen und

$$\mathcal{A} := \{I \subset E \mid |I \cap B_i| \leq d_i, i = 1, \dots, n\},$$

dann gilt

Satz 26.1.

$M = (E, \mathcal{A})$  ist ein Matroid.

Beweis:

Offensichtlich ist  $\emptyset \in \mathcal{A}$ . Ist  $I \in \mathcal{A}$  und  $J \subset I$ , dann gilt  $|J \cap B_i| \leq |I \cap B_i| \leq d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , also  $J \in \mathcal{A}$ , d.h.  $\mathcal{A}$  ist ein Unabhängigkeitssystem. Sei  $F \subset E$ , und  $B, B'$  seien maximale unabhängige Mengen von  $F$ . Gibt es einen Index

$i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $|B' \cap B_i| < |B \cap B_i| \leq d_i$ , dann gibt es  $e \in (B - B') \cap B_i$ .

Für  $B'' := B' \cup \{e\}$  gilt  $|B'' \cap B_j| \leq d_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , d.h.  $B''$  ist unabhängig und  $B' \subsetneq B''$ . Also ist  $B'$  nicht maximal. Widerspruch! Folglich haben alle maximalen unabhängigen Teilmengen von  $F$  die gleiche Kardinalität; d.h.

$M$  ist ein Matroid.  $\square$

Matroide dieses Typs wollen wir Partitions Matroide nennen. Zwei für uns wichtige Klassen von Partitions-Matroiden sind die folgenden:

Gegeben sei ein Digraph  $G = (V, E)$ , bei dem wir auch Schlingen, das sind Bögen des Typs  $(i, i)$ , und parallele Bögen zulassen; dann sind die Bogenmengen  $\omega^+(v) = \{(v, u) \in E, u \in V\} \quad \forall v \in V$  bzw.  $\omega^-(v) = \{(u, v) \in E, u \in V\} \quad \forall v \in V$  Partitionen der Bogenmenge  $E$  (falls es keinen Bogen  $(v, u)$  bzw.  $(u, v) \in E$  gibt, lassen wir die Menge  $\omega^+(v)$  bzw.  $\omega^-(v)$  weg). Wählen wir als Schranken  $d_v = 1 \quad \forall v \in V$ , so erhalten wir die folgenden Matroide

$$\underline{M^+ = (E, \mathcal{A}^+) : \mathcal{A}^+ := \{I \subset E \mid |\omega^+(v) \cap I| \leq 1 \quad \forall v \in V\},$$

$$\underline{M^- = (E, \mathcal{A}^-) : \mathcal{A}^- := \{I \subset E \mid |\omega^-(v) \cap I| \leq 1 \quad \forall v \in V\}.$$

Ist  $I \in \mathcal{A}^+$  ( $I \in \mathcal{A}^-$ ), so ist jeder Knoten  $v \in V$  Anfangsknoten (Endknoten) von höchstens einem Bogen aus  $I$ .

Um eine nicht redundante lineare Beschreibung der zu  $M^+$  und  $M^-$  gehörigen Polytope zu bekommen, müssen wir nach Satz 8.5 die abgeschlossenen und inseparablen Teilmengen von  $E$  charakterisieren.

Satz 26.2.

(a)  $\emptyset \neq F \subset E$  ist abgeschlossen und inseparabel bezüglich  $M^+$  genau dann, wenn  $F = \omega^+(v)$  für ein  $v \in V$  gilt.

(b)  $\emptyset \neq F \subset E$  ist abgeschlossen und inseparabel bezüglich  $M^-$  genau dann, wenn  $F = \omega^-(v)$  für ein  $v \in V$  gilt.

Beweis:

(a) Offensichtlich ist  $r(F) = |\{v \in V \mid \exists e \in F \text{ mit } e = (v, u)\}|$ . Ist  $r(F) \geq 2$ , dann setze  $F_v := F \cap \omega^+(v)$  für alle  $v$  mit  $\exists u \in V$  mit  $(v, u) \in F$ ; man sieht sofort, daß  $r(F) = \sum_v r(F_v)$  gilt. Also sind nur diejenigen nichtleeren Teilmengen  $F \subset E$  mit  $r(F) = 1$  inseparabel, das sind also solche mit  $F = \omega^+(v)$  für ein  $v \in V$ . Diese sind natürlich nur dann abgeschlossen, wenn  $F = \omega^+(v)$  gilt.

(b) analog.  $\square$

Ist  $G = (V, E)$  ein Digraph, und ordnen wir jedem Bogen  $e \in E$  eine Komponente  $x_e$  eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^{|E|}$  zu und jeder Teilmenge  $I \subset E$  einen Inzidenzvektor  $x^I$ , so können wir wie üblich definieren:

$$\tilde{P}_{M^+} := \text{conv} \{x^I \in \mathbb{R}^{|E|} \mid I \in \mathcal{A}^+\},$$

$$\tilde{P}_{M^-} := \text{conv} \{x^I \in \mathbb{R}^{|E|} \mid I \in \mathcal{A}^-\}.$$

Nach Satz 8.5 und Satz 26.2 gilt dann

Satz 26.3.

$$\tilde{P}_{M^+} := \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \text{ und } \sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \text{ mit } \omega^+(v) \neq \emptyset\},$$

$$\tilde{P}_{M^-} := \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \text{ und } \sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \text{ mit } \omega^-(v) \neq \emptyset\}.$$

Diese Darstellungen sind vollständig und nicht redundant.  $\square$

Betrachten wir die konvexen Hüllen der Basen von  $M^+$  bzw.  $M^-$ , d.h.

$$P_{M^+} := \text{conv} \{x^B \in \mathbb{R}^{|E|} \mid B \in \mathcal{A}^+, B \text{ maximal}\},$$

$$P_{M^-} := \text{conv} \{x^B \in \mathbb{R}^{|E|} \mid B \in \mathcal{A}^-, B \text{ maximal}\},$$

so erhalten wir aus Satz 9.9

Satz 26.4.

$$P_{M^+} = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \ \forall e = (v,u) \in E \text{ mit } |\omega^+(v)| \geq 2, \\ \sum_{e \in \omega^+(v)} x_e = 1 \ \forall v \in V \text{ mit } \omega^+(v) \neq \emptyset\},$$

$$P_{M^-} = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \ \forall e = (u,v) \in E \text{ mit } |\omega^-(v)| \geq 2, \\ \sum_{e \in \omega^-(v)} x_e = 1 \ \forall v \in V \text{ mit } \omega^-(v) \neq \emptyset\}.$$

Diese Darstellungen sind vollständig und nicht redundant.

Beweis:

Betrachten wir  $P_{M^+}$ . Ist  $B$  eine Basis von  $M^+$ , so muß zwangsläufig  $|B \cap \omega^+(v)| = 1 \ \forall v \in V$  gelten, wenn  $\omega^+(v) \neq \emptyset$ . Offensichtlich definieren die Bogenmengen  $\omega^+(v)$  gerade die minimale Separation von  $M^+$ . Jede der nicht trivialen Facetten von  $P_{M^+}$  enthält also den Polytopen  $P_{M^+}$  vollständig. Die Separationszahl von  $E - \{e\}$  ist genau dann niedriger als die von  $E$ , wenn es ein  $v \in V$  gibt mit  $\{e\} = \omega^+(v)$ . Also ist  $x_e \geq 0$  nur in diesem Fall keine Facette.

Für  $P_{M^-}$  verläuft der Beweis analog.  $\square$

### § 27. Die Zuordnungspolytope

Kehren wir nun zurück zu dem zu Beginn von Kapitel 10 formulierten Zuordnungsproblem. Mathematisch können wir dieses Problem durch einen Digraphen  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ , mit Gewichten  $c_e \in \mathbb{R} \ \forall e \in E$ , bei dem auch Schlingen  $(i, i)$  zugelassen sind, darstellen. Jeder Knoten repräsentiert dabei sowohl eine Person als auch eine Aufgabe. Jeder Bogen  $(i, j)$  repräsentiert die Möglichkeit, der Person  $i$  die Aufgabe  $j$  zuzuteilen; falls eine solche Zuteilung nicht möglich ist, ist der entsprechende Bogen im Digraphen nicht vorhanden; aus naheliegenden Gründen schließen wir aus, daß  $G$  isolierte Knoten enthält.

Von dieser Interpretation ausgehend definieren wir nun eine Zuordnung als eine Bogenmenge  $I \subset E$  mit der Eigenschaft  $|I \cap \omega^-(v)| \leq 1$  und  $|I \cap \omega^+(v)| \leq 1 \ \forall v \in V$ ; wir nennen eine Zuordnung  $I \subset E$  perfekt, wenn  $|I \cap \omega^-(v)| = 1$  und  $|I \cap \omega^+(v)| = 1 \ \forall v \in V$  gilt, d.h. jeder Knoten aus  $V$  ist Anfangs- und Endknoten von höchstens (genau) einem Bogen aus  $I$ . Sei

$$\tilde{Z} := \{I \subset E \mid I \text{ Zuordnung}\}, \\ Z := \{I \subset E \mid I \text{ perfekte Zuordnung}\},$$

$$\tilde{P}_Z^n := \text{conv} \{x^I \in \mathbb{R}^{|E|} \mid I \in \tilde{Z}\},$$

$$P_Z^n := \text{conv} \{x^I \in \mathbb{R}^{|E|} \mid I \in Z\}.$$

Die Polytope  $P_Z^n$  bzw.  $\tilde{P}_Z^n$  heißen Zuordnungspolytop bzw. monotoner Zuordnungspolytop.

Man überlegt sich leicht, daß

$$\tilde{Z} = \mathfrak{A}^+ \cap \mathfrak{A}^-$$

gilt, wobei  $\mathfrak{A}^+$  und  $\mathfrak{A}^-$  die Unabhängigkeitssysteme der in § 16 definierten Partitionsmatroide  $M^+$  und  $M^-$  sind. Entsprechend ist  $Z$  der Durchschnitt der Basen von  $\mathfrak{A}^+$  und  $\mathfrak{A}^-$ , falls jeder Knoten in  $G$  Anfangs- und Endknoten von mindestens einem Bogen aus  $E$  ist, was wir o.B.d.A. im weiteren annehmen wollen.

Aus Satz 8.6 folgt damit

$$\tilde{P}_Z^n = \tilde{P}_{M^+} \cap \tilde{P}_{M^-}, \quad P_Z^n = P_{M^+} \cap P_{M^-},$$

d.h. der monotone Zuordnungspolytop ist der Durchschnitt von zwei Matroid-Polytopen.

Aus den Sätzen 26.3 und 26.4 ergibt sich sodann

Satz 27.1.

$$(a) \tilde{P}_Z^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \begin{array}{l} x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \\ \sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \\ \sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \end{array}\},$$

$$(b) P_Z^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \begin{array}{l} x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \\ \sum_{e \in \omega^-(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V \\ \sum_{e \in \omega^+(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V \end{array}\}. \quad \square$$

In Verbindung mit dem asymmetrischen Travelling Salesman Problem wird uns speziell das Zuordnungsproblem auf dem vollständigen Digraphen  $K_n = (V, E)$  interessieren, d.h.  $|V| = n$  und  $E = \{(i, j) \in V \times V \mid i \neq j\}$ .

Eine quadratische Matrix heißt unimodular, wenn der Betrag ihrer Determinante eins ist. Eine Matrix heißt total unimodular, wenn jede reguläre quadratische Untermatrix unimodular ist. Ist  $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ,  $A$  total unimodular und  $b$  ein ganzzahliger Vektor, dann folgt aus Cramers Regel, daß  $P$  nur ganzzahlige Ecken hat.

Kürzen wir das Gleichungssystem

$$\sum_{e \in \omega^+(i)} x_e = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{e \in \omega^-(j)} x_e = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

durch  $Ax = 1$  ab, so sind die folgenden Eigenschaften von  $A$  wohlbekannt:

Satz 27.2.

(a)  $A$  ist total unimodular.

(b)  $\text{rg}(A) = 2n-1$ .

(c) Für beliebiges  $v \in \{1, 2, \dots, n\}$  ist die von den zu den Bögen  $(v, i)$ ,  $(i, v)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\} - \{v\}$  gehörigen Spalten und einer beliebigen weiteren Spalte sowie  $2n-1$  beliebigen Zeilen von  $A$  gebildete Untermatrix regulär.  $\square$

Aus diesen Eigenschaften von  $A$  und der in Satz 27.1 angegebenen linearen Darstellung von  $\tilde{P}_Z^n$  und  $P_Z^n$  folgt

Satz 27.3.

Sei  $K_n = (V, E)$  der vollständige Digraph auf  $n$  Knoten,  $n \geq 3$ ,  $P_Z^n$  und  $\tilde{P}_Z^n$  seien die Zuordnungspolytope auf  $K_n$ , dann gilt

(a)  $\dim \tilde{P}_Z^n = |E| = n(n-1)$ ,

(b)  $\dim P_Z^n = n(n-3) + 1$ ,

(c)  $\tilde{P}_Z^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, Ax \leq 1\}$ ,

(d)  $P_Z^n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, A'x = 1\}$ ,

wobei  $A'$  irgendeine Untermatrix von  $A$  ist, die genau eine Zeile weniger als  $A$  hat.

Die linearen Charakterisierungen von  $\tilde{P}_Z^n$  und  $P_Z^n$  in (c) und (d) sind vollständig und nicht redundant, im Falle (d) jedoch nur, wenn  $n \geq 4$  ist.

Beweis:

(a) Der Nullvektor und alle Einheitsvektoren sind in  $\tilde{P}_Z^n$  enthalten.

(b) Aufgrund von 27.2 (b) ist  $\dim P_Z^n \leq n(n-3) + 1$ . Da  $P_Z^n$  offensichtlich in keiner der Hyperebenen  $x_e = 0$  enthalten ist, folgt mit 27.1 (b) die Behauptung.

- (c)  $c_1$ ) Die Vollständigkeit der Darstellung von  $\tilde{P}_Z^n$  folgt aus 27.1 (a).  
 $c_2$ ) Der Nullvektor und alle Einheitsvektoren außer  $e_{ij}$  sind in der Seitenfläche  $x_{ij} = 0$  enthalten, also definiert diese, da sie  $\dim \tilde{P}_Z^n$  affin unabhängige Vektoren enthält, eine Facette.  
 $c_3$ ) Betrachten wir o.B.d.A.  $\sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1$ , so erfüllen die Inzidenzvektoren der Zuordnungen  $\{e\} \forall e \in \omega^+(v)$  und  $\{e, f\} \forall f \in E - \omega^+(v)$  und irgendein  $e \in \omega^+(v)$  die betrachtete Ungleichung mit Gleichheit. Diese Inzidenzvektoren sind offensichtlich linear unabhängig, woraus die Behauptung folgt.
- (d)  $d_1$ ) Die Vollständigkeit der Darstellung folgt aus 27.1 (b).  
 $d_2$ ) Daß das angegebene Gleichungssystem minimal ist, ergibt 27.2 (b), (c).  
 $d_3$ )  $P_Z^3$  enthält nur 2 Punkte, woraus die Redundanz in (d) unmittelbar folgt.

Die Inzidenzvektoren der folgenden aus Kreisen bestehenden perfekten Zuordnungen, die den Bogen (1,2) nicht enthalten, sind aus  $P_Z^4$  und linear unabhängig

$\langle 1,3,4,2 \rangle, \langle 1,3,2,4 \rangle, \langle 1,4,2,3 \rangle, \langle 1,4,3,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle \cup \langle 2,4 \rangle$ ,  
d.h. es gibt  $\dim P_Z^4 = 5$  linear unabhängige Vektoren aus  $P_Z^4$  in der Seitenfläche  $x_{12} = 0$ , woraus die Behauptung für  $n = 4$  folgt.

Für  $n \geq 5$  werden wir in Satz 33.6  $\dim P_Z^n = \dim P_T^n$  Touren, die ja perfekte Zuordnungen sind, angeben, die einen der Bögen  $(i,j) \in E$  nicht enthalten und deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Zuordnungspolytope sind in der Literatur schon recht intensiv untersucht worden. Im etwas allgemeineren Rahmen der Transportpolytope wurden sie von Klee und Witzgall [1968] behandelt. Die wichtigsten und geometrisch interessantesten Eigenschaften von  $P_Z^n$  finden sich in [Balinski, Russakoff, 1974]; auf diese Ergebnisse wollen wir hier jedoch nicht weiter eingehen.

### Kapitel 11. Das Optimum Branching Problem

Um die konvexe Hülle der Branchings eines Digraphen beschreiben zu können, benötigen wir einige Kenntnisse über eine spezielle Klasse von Digraphen. Diese Klasse von Digraphen soll daher zunächst im folgenden Paragraphen untersucht werden.

§ 28. *Minimale starke Blöcke*

In diesem Paragraphen schließen wir die Existenz von Schlingen in Digraphen aus, da diese für die betrachteten Konzepte ohne Bedeutung sind.

Ein Digraph  $G = (V, E)$  heißt stark zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten  $v, w$  in  $G$  einen Weg von  $v$  nach  $w$  und einen Weg von  $w$  nach  $v$  gibt, äquivalent dazu ist (siehe etwa [Berge, 1973]), daß jeder Bogen  $e \in E$  auf einem Kreis liegt, bzw. daß in  $G$  keine Cokreise existieren, das sind Bogenmengen des Typs

$\omega(W)$  mit  $W \subset V$ , für die gilt:

$$\omega(W) = \omega^-(W) \text{ oder } \omega(W) = \omega^+(W)$$

(woraus dann folgt  $\omega(V-W) = \omega^+(V-W)$  oder  $\omega(V-W) = \omega^-(V-W)$ ).

Ein Digraph heißt zweifach zusammenhängend, wenn je zwei Knoten oder äquivalent dazu je zwei Bögen auf einem gemeinsamen Zyklus liegen. Die maximalen zweifach zusammenhängenden Unterdigraphen eines Digraphen heißen Blöcke. Unterdigraphen eines Digraphen, die stark und zweifach zusammenhängend sind und bezüglich dieser Eigenschaft maximal sind, nennen wir starke Blöcke. Einen Digraphen, der stark und zweifach zusammenhängend ist, nennen wir ebenfalls einen starken Block. Ein starker Block  $G = (V, E)$  mit der Eigenschaft, daß  $G-e$  für alle  $e \in E$  kein starker Block ist, heißt minimaler starker Block, d.h. daß das Entfernen irgendeines Bogens aus  $G$  den starken oder den zweifachen Zusammenhang von  $G$  oder beides zerstört.

Minimale stark zusammenhängende Digraphen (d.h.  $G-e$  nicht stark zusammenhängend für alle  $e \in E$ ) und minimale zweifach zusammenhängende Graphen sind in der Literatur bereits intensiv untersucht worden, siehe [Berge, 1973, S. 28 ff] bzw. [Plummer, 1968] und [Dirac, 1967], während minimalen starken Blöcken bisher noch keine Aufmerksamkeit gewidmet wurde.

Nach einem Satz von Robbins [1939] kann jeder zweifach kantenzusammenhängende Graph so gerichtet werden, daß der entstehende Digraph stark zusammenhängend ist. Da zweifach zusammenhängende Graphen zweifach kantenzusammenhängend sind, kann jeder minimale zweifach zusammenhängende Graph so gerichtet werden, daß der entstehende Digraph stark zusammenhängend, somit also ein minimaler starker Block ist, womit eine große Klasse von Beispielen für minimale starke Blöcke gefunden ist.

Für recht viele Klassen von Graphen bzw. Digraphen gibt es eine konstruktive Charakterisierung der folgenden Art:

Man wähle einen gewissen Graphentyp als "Basis" (etwa Kreis, Zyklus, Baum), dann füge man gewisse Ketten oder Wege (sogenannte Ohren) auf eine bestimmte Art zur Basis bzw. zum bereits konstruierten Graphen hinzu.

Die Zerlegung bzw. den konstruktiven Aufbau eines Graphen durch dieses Verfahren nennt man Ohrendekomposition. Es ist bekannt, daß z.B. alle zusammenhängenden, zweifach zusammenhängenden, stark zusammenhängenden Graphen bzw. Digraphen eine Ohrendekomposition besitzen. Für diesen Hinweis und die Idee, eine Ohrendekomposition von starken Blöcken anzugeben, bin ich L. Lovász dankbar. Das hier gefundene Ohrendekompositionsverfahren für starke Blöcke hat die früheren Beweise einiger der nachfolgenden Sätze wesentlich vereinfacht. Auf folgende sehr einfache Weise kann man starke Blöcke konstruieren:

- (1) Wähle einen Kreis mit Bogenmenge  $C$  und setze  $E := C$ .
- (2) Wähle einen Weg  $W$ , dessen Endpunkte zwei verschiedene Knoten von  $V(E)$  sind und der sonst keine Knoten mit  $V(E)$  gemeinsam hat. Füge  $W$  zu  $E$  hinzu.

Der Digraph  $G = (V(E), E)$ , der nach mehrfacher Wiederholung des Schrittes (2) entstanden ist, ist offensichtlich ein starker Block, da ein Kreis ein starker Block ist und da nach jeder Anwendung von Schritt (2) der starke und zweifache Zusammenhang erhalten bleiben. Die Frage, ob man mit diesem Verfahren alle starken Blöcke konstruieren kann, beantwortet der folgende

Satz 28.1.

*Jeder starke Block besitzt eine Ohrendekomposition.*

*Genauer: Sei ein Digraph  $G = (V, E)$  und folgendes Verfahren gegeben:*

- (1) *Wähle irgendeinen Kreis  $C$  in  $G$ .  $F := C$ .*
- (2) *Wähle irgendeinen Weg  $W \not\subseteq F$  in  $G$ , dessen Anfangs- und Endknoten voneinander verschieden und die einzigen Knoten aus  $V(F)$  sind. Füge  $W$  zu  $F$  hinzu.*
- (3) *Wiederhole (2) bis es keinen Weg des in Schritt (2) verlangten Typs mehr gibt.*

*Nach Beendigung des Verfahrens gilt  $E = F$  (und damit  $V = V(F)$ ) genau dann, wenn  $G$  ein starker Block ist.*

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Offensichtlich liefert das angegebene Verfahren starke Blöcke. Ist also  $E = F$ , dann ist  $G$  ein starker Block.

" $\Leftarrow$ ": Sei nun  $G$  ein starker Block. Wir nehmen an, daß nach Beendigung des Algorithmus  $E \neq F$  gilt.

Aufgrund des starken Zusammenhangs von  $G$  gibt es einen Bogen  $(v, w) \in E - F$  mit  $v \in V(F)$ , desgleichen gibt es einen Bogen  $(u, v) \in F$ , d.h.  $u \in V(F) - \{v\}$ . Der zweifache Zusammenhang von  $G$  impliziert die Existenz eines Zyklus  $Z'$  in  $G$ ,

der die Bögen  $(u,v)$  und  $(v,w)$  enthält. Sei  $v'$  derjenige Knoten des Zyklus  $Z'$ , der aus  $V(F)$  ist und beim Durchlaufen von  $Z'$  in Richtung  $(v,w)$  als erster erreicht wird. Wegen  $u \not\vdash v$  ist  $v' \not\vdash v$ .

Da  $(V(F),F)$  aufgrund der Konstruktion stark zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $W$  von  $v'$  nach  $v$  mit Bögen aus  $F$ .

Sei  $Z$  der Zyklus in  $G$ , der aus dem Weg  $W$  von  $v'$  nach  $v$  und der Kette in  $Z'$  von  $v$  über  $w$  nach  $v'$  besteht. Alle Bögen des Zyklus  $Z$ , die auf  $Z$  dieselbe Richtung wie  $(v,w)$  haben, nennen wir positiv orientiert, alle anderen Bögen von  $Z$  negativ orientiert. Nach Konstruktion sind alle Bögen von  $Z$ , die in  $F$  sind, positiv orientiert. Jeder negativ orientierte Bogen  $e \in Z$  ist aus  $E-F$  und liegt, da  $G$  stark zusammenhängend ist, auf einem Kreis  $C_e$  in  $G$ .

a) Enthält einer der Kreise  $C_e$ ,  $e \in Z$  negativ orientiert, einen Bogen  $(x,y) \in F$ , dann sei  $v_1$  derjenige Knoten auf  $C_e$ , der am nächsten zu  $e$  entgegen der Richtung von  $e$  gelegen und aus  $V(F)$  ist, und  $v_2$  sei derjenige Knoten aus  $C_e$ , der am nächsten zu  $e$  in Richtung von  $e$  gelegen und aus  $V(F)$  ist. Wegen  $x \not\vdash y$  gilt  $v_1 \not\vdash v_2$ , das heißt der Weg von  $v_1$  nach  $v_2$  entlang  $C_e$  ist ein Weg des Typs (2), folglich gilt  $e \in F$ . Widerspruch!

b) Enthaltet keiner der Kreise  $C_e$ ,  $e$  negativ orientiert, einen Bogen  $(x,y) \in F$ . Sei  $C$  diejenige Bogenmenge, die aus allen positiv orientierten Bögen von  $Z$  und allen Bogenmengen  $C_e - e$ ,  $e \in Z$ ,  $e$  negativ orientiert, besteht.  $C$  ist ein "Pseudokreis", d.h. ein "Kreis", bei dem Knoten und Bögen mehrfach durchlaufen werden können. Sei  $x$  derjenige Knoten aus  $V(F) - \{v\}$ , der bei Durchwanderung von  $C$  von  $v$  aus in Richtung  $(v,w)$  als erster auftritt. Sei  $P$  die Menge der von  $v$  nach  $x$  entlang  $C$  durchwanderten Bögen.  $P$  ist ein "Pseudoweg" und enthält, wie man sofort sieht, einen Weg  $Q$  von  $v$  nach  $x$ . Dieser Weg  $Q$  enthält außer dem Anfangsknoten  $v$  und dem Endknoten  $x$  nach Konstruktion nur Knoten, die in  $V - V(F)$  liegen, und nur Bögen (mindestens einen) aus  $E-F$ .  $Q$  erfüllt aber damit alle Voraussetzungen von Schritt (2), folglich muß  $e \in F$  für alle  $e \in Q$  gelten. Widerspruch!  $\square$

Die Existenz einer Ohrendekomposition von starken Blöcken wird uns im folgenden eine wichtige Hilfe zum Beweis gewisser Eigenschaften dieser Digraphen sein.

Lemma 28.2.

*Jeder starke Block mit mindestens 3 Knoten enthält einen Kreis, der mindestens die Länge 3 hat.*

Beweis: Trivial.  $\square$

Satz 28.3.

$G = (V, E)$  sei ein starker Block. Dann gilt:

$G$  ist minimal genau dann, wenn es keine Ohrendekomposition von  $G$  gibt, bei der in irgendeinem der Schritte (2) ein Weg der Länge 1 hinzugefügt wird.

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Sei  $G = (V, E)$  ein starker Block, so daß bei einer Ohrendekomposition in irgendeinem der Schritte (2) genau ein Bogen  $(u, v) \in E - F$  zur bereits konstruierten Bogenmenge  $F$  hinzugefügt wird.

a) Seien  $x, y \in V$ , und sei  $W$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ , der den Bogen  $(u, v)$  enthält. Da  $(V(F), F)$  nach Konstruktion stark zusammenhängend ist, gibt es in  $(V(F), F)$  einen Weg von  $u$  nach  $v$ . Folglich gibt es in  $G$  einen Weg von  $x$  nach  $y$ , der  $(u, v)$  nicht benutzt. Mithin ist  $G - (u, v)$  stark zusammenhängend.

b) Seien  $x, y \in V$  und  $Z$  sei ein Zyklus, der die Knoten  $x, y$  und den Bogen  $(u, v)$  enthält. Da  $(V(F), F)$  zweifach zusammenhängend ist, gibt es in  $(V(F), F)$  einen Zyklus  $Z'$ , der  $u$  und  $v$  aber nicht  $(u, v)$  enthält.  $Z \cup Z' - \{(u, v)\}$  enthält offensichtlich einen Zyklus, der  $x$  und  $y$  enthält. Folglich ist  $G - (u, v)$  zweifach zusammenhängend.

Aus a) und b) folgt, daß  $G - (u, v)$  ein starker Block, also  $G$  nicht minimal ist.

" $\Leftarrow$ ": Ist  $G$  nicht minimal, dann gibt es einen Bogen  $e \in E$ , so daß  $G - e$  ein starker Block ist. Wir führen eine Ohrendekomposition von  $G - e$  durch. Zuletzt fügen wir den Bogen  $e$  hinzu und erhalten die gesuchte Ohrendekomposition von  $G$ .  $\square$

Satz 28.4.

Sei  $G = (V, E)$ ,  $|V| \geq 3$ , ein minimaler starker Block, dann gilt:

- (a)  $G$  enthält keine parallelen Bögen.
- (b)  $G$  enthält keine antiparallelen Bögen.
- (c) Kein Kreis in  $G$  enthält eine Diagonale.
- (d)  $G$  enthält mindestens einen Knoten mit Innen- und Außengrad 1.

Beweis:

(a) Trivial.

(b) Nach Lemma 28.2 gibt es in  $G$  einen Kreis  $C$ , der mindestens die Länge 3 hat. Beginnen wir die Ohrendekomposition von  $G$  mit  $C$  in Schritt (1), so kann nach Lemma 28.3 in Schritt (2) kein einzelner Bogen hinzugefügt werden. Da die in (2) hinzugefügten Wege nur Anfangs- und Endknoten mit dem bereits konstruierten Digraphen gemeinsam haben, kann  $G$  keine antiparallelen Bögen enthalten.

(c) Eine Diagonale eines Kreises kann man entfernen, ohne den starken oder zweifachen Zusammenhang zu zerstören.

(d) Bei der letzten Durchführung des Schrittes (2) wird ein Weg der Länge mindestens drei hinzugefügt. Dieser und somit auch  $G$  enthält mindestens einen Knoten mit Innen- und Außengrad 1.  $\square$

Die Eigenschaft 28.4 (d) impliziert, daß kein minimaler starker Block  $k$ -fach zusammenhängend sein kann für  $k \geq 3$ , da die Zusammenhangszahl immer kleiner oder gleich dem minimalen Grad eines Knotens ist, darüber hinaus wird sich 28.4 (d) als sehr nützlich für die Charakterisierung des Branching Polytopen zeigen.

Satz 28.5.

*Sei  $G \doteq (V, E)$  ein minimaler starker Block, dann ist kein induzierter Unterdigraph von  $G$  (als Graph betrachtet) isomorph zum vollständigen Graphen  $K_4$ .*

Beweis:

Angenommen, es gibt einen Unterdigraphen von  $G$ , der (als Graph) isomorph zu  $K_4$  ist. Wir bezeichnen dessen Knoten mit  $1, 2, 3, 4$  und zeigen, daß die Kanten dieses Graphen nicht so gerichtet werden können, daß  $G$  minimal ist.  $d^+(v)$ ,  $d^-(v)$  bezeichne Innen- und Außengrad von  $v \in \{1, 2, 3, 4\}$  in dem zu  $K_4$  isomorphen Digraphen, nicht den Grad in  $G$ . Nach Annahme ist  $d^+(v) + d^-(v) = 3$ ,  $v = 1, 2, 3, 4$ .

a)  $d^+(1) = 3$ . In  $G$  gibt es einen Weg  $W$  von 2 nach 1. Enthält dieser einen der Knoten 3, 4, dann ist einer der Bögen  $(1, 3)$ ,  $(1, 4)$  Diagonale des Kreises  $\langle 2, W, 1 \rangle$ . Widerspruch zu Satz 28.4 (c)!

Ist  $(3, 2) \in E$ , dann ist  $\langle 1, 3, 2, W \rangle$  ein Kreis mit Diagonale  $(1, 2)$ , folglich  $(3, 2) \notin E$ .

In  $G$  gibt es außerdem einen Weg  $W'$  von 3 nach 1. Enthält  $W'$  die Knoten 2 oder 4, dann folgt ein Widerspruch wie vorher. Andernfalls ist  $\langle 1, 2, 3, W' \rangle$  ein Kreis mit Diagonale  $(1, 3)$ . Widerspruch! Also gilt  $(2, 3) \notin E$ .

Wegen  $(2, 3), (3, 2) \notin E$ , kann der von  $\{1, 2, 3, 4\}$  induzierte Unterdigraph nicht isomorph zu  $K_4$  sein.

b)  $d^-(1) = 3$ ; analog zu a).

c)  $d^+(1) = 2$ ,  $d^-(1) = 1$ , o.B.d.A. sei  $(1, 2), (1, 3), (4, 1) \in E$ . Falls  $d^+(4) = 3$ , folgt ein Widerspruch wie in a). Sei o.B.d.A.  $(4, 2), (3, 4) \in E$ . Da  $d^-(2) < 3$  sein muß, sonst Widerspruch wie in a), muß  $(2, 3) \in E$  gelten. Damit ist  $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$  ein Kreis mit den Diagonalen  $(1, 3), (4, 2)$ . Widerspruch!

Alle anderen Fälle werden analog erledigt.  $\square$

Unter Zuhilfenahme der Ohrendekomposition können wir die maximale Bogenzahl minimaler starker Blöcke abschätzen.

Satz 28.6.

Ist  $G = (V, E)$ ,  $|V| \geq 3$ , ein minimaler starker Block, dann gilt:

$$|V| \leq |E| \leq 2|V| - 3.$$

Diese Schranken sind bestmöglich.

Beweis:

Sei  $C$  ein Kreis in  $G$ . Nach Satz 28.4 (b) hat  $C$  eine Länge  $k_0 \geq 3$ . Nach Satz 28.1 können wir  $G$  mit  $C$  beginnend durch sukzessives Hinzufügen von Wegen rekonstruieren. Diese Wege enthalten genau 2 Knoten aus dem bereits konstruierten Graphen und wegen Lemma 28.3 mindestens einen neuen Knoten. Sei  $m$  die Anzahl der hinzugefügten Wege und  $k_i \geq 2$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ihre Länge. Da jeder Weg einen neuen Knoten enthält, können höchstens  $|V| - 3$  Wege hinzugefügt werden, also  $m \leq |V| - 3$ . Es folgt:

$$|E| = \sum_{i=0}^m k_i \text{ und } |V| = k_0 + \sum_{i=1}^m (k_i - 1) = \sum_{i=0}^m k_i - m = |E| - m,$$

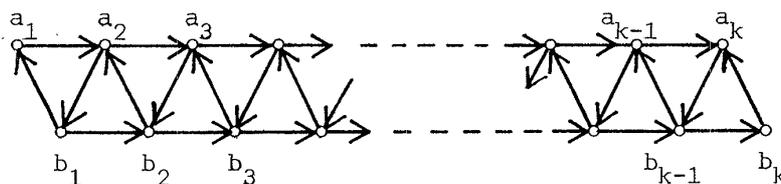
und damit  $|E| \leq 2|V| - 3$ .

Ein Digraph mit weniger als  $|V|$  Bögen kann nicht zweifach und nicht stark zusammenhängend sein. Ein Hamiltonkreis hat  $|V|$  Bögen und ist ein minimaler starker Block. Daß die obere Schranke angenommen wird, zeigen die Beispiele 28.7 und 28.8.  $\square$

Beispiel 28.7.

Sei  $V := \{a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_j\}$  mit  $k \geq 2$  und  $j \in \{k, k-1\}$ ,

$$E := \left\{ \begin{array}{ll} (a_i, a_{i+1}) & i = 1, \dots, k-1 \\ (b_i, b_{i+1}) & i = 1, \dots, j-1 \\ (a_i, b_{i-1}) & i = 2, \dots, k \\ (b_i, a_i) & i = 1, \dots, j \end{array} \right\}.$$

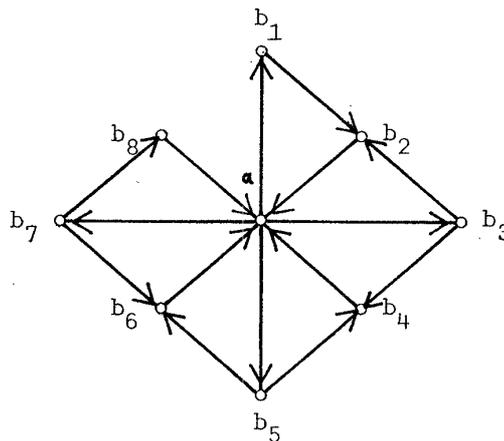


Die Bögen  $(a_i, a_{i+1}), (b_i, b_{i+1})$  zerstören bei Herausnahme aus  $E$  den zweifachen Zusammenhang, die übrigen Bögen den starken Zusammenhang.  $(V, E)$  ist ein minimaler starker Block mit  $2|V| - 3$  Bögen und 2 Knoten mit Innen- und Außengrad 1.  $\square$

Beispiel 28.8.

Sei  $V := \{a, b_1, b_2, \dots, b_k\}$ ,  $k \geq 2$ .

$$E := \left\{ \begin{array}{ll} (a, b_i) & 1 \leq i \leq k \text{ und } i \text{ ungerade} \\ (b_i, a) & 1 \leq i \leq k \text{ und } i \text{ gerade} \\ (b_i, b_{i+1}) & 1 \leq i < k \text{ und } i \text{ ungerade} \\ (b_i, b_{i-1}) & 1 < i \leq k \text{ und } i \text{ ungerade} \end{array} \right\}$$



Die Bögen  $(a, b_i), (b_i, a)$  zerstören bei Herausnahme aus  $E$  den starken Zusammenhang, alle anderen den zweifachen Zusammenhang.  $G = (V, E)$  ist ein minimaler starker Block mit  $2|V| - 3$  Bögen und 2 Knoten des Innen- und Außengrades 1.  $a$  hat den nach Satz 28.4 (a),(b) maximal möglichen Grad  $|V| - 1$ .  $\square$

Ein Satz von Plummer [1968] besagt, daß jeder minimale zweifach zusammenhängende Graph mindestens zwei Knoten des Grades 2 enthält. Berge [1973, S.31] hat bewiesen, daß jeder minimale stark zusammenhängende Graph mindestens zwei Knoten mit Innen- und Außengrad 1 besitzt. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß sich diese Eigenschaft auch für minimale starke Blöcke zeigen und daß sich damit Satz 28.4 (d) verschärfen läßt. Die zwei folgenden Lemmata werden uns zur Beweisidee führen.

Lemma 28.9.

Ist  $G = (V, E)$  stark zusammenhängend,  $|V| \geq 2$ , dann gilt:

- (a) Jeder Bogen  $e \in E$  ist in genau einem Block von  $G$  enthalten.
- (b) Jeder Block von  $G$  ist ein starker Block.
- (c) Ist  $G$  ein minimaler starker Block,  $G-e$  stark aber nicht zweifach zusammenhängend, dann ist jeder Block von  $G-e$  ein minimaler starker Block.

Beweis:

- (a) Aufgrund des starken Zusammenhangs von  $G$  ist jeder Bogen in einem Kreis enthalten, folglich auch in einem Block. Die Eigenschaft, einem Block anzugehören, ist eine Äquivalenzrelation (bei stark zusammenhängenden Digraphen), d.h. jeder Bogen liegt in genau einem Block.
- (b) Ist  $B$  ein Block von  $G$  und  $f$  ein Bogen aus  $B$ , dann liegt  $f$  auf einem Kreis in  $G$ . Dieser Kreis ist zweifach zusammenhängend, muß also in einem Block - und zwar  $B$  - enthalten sein.
- (c) Ist einer der Blöcke von  $G-e$  nicht minimal, dann offensichtlich auch nicht  $G$ .  $\square$

Lemma 28.10.

Sei  $G = (V, E)$  ein starker Block und  $G-e$  stark aber nicht zweifach zusammenhängend für ein  $e \in E$ . Sei  $C$  ein Kreis, der  $e$  enthält, und seien  $B_i$ ,

$i = 1, \dots, k$ , die starken Blöcke von  $G-e$ , dann gilt:

Bei jeder beliebigen Ohrendekomposition von  $G$ , die mit dem Kreis  $C$  in Schritt (1) beginnt, gilt für jeden der in Schritt (2) hinzugefügten Wege  $W$ :  $W \subset B_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Beweis:

Seien  $v, w$  Knoten eines in Schritt (2) hinzugefügten Weges  $W$ . Seien  $x$  und  $y$  die Endknoten von  $W$ , dann gibt es im bereits konstruierten Digraphen einen Zyklus, der  $x$  und  $y$  enthält, folglich gibt es in diesem eine Kette  $K$  von  $x$  nach  $y$ , die  $e$  nicht enthält.  $K \cup W$  ist ein Zyklus, der  $v$  und  $w$  enthält, aber nicht  $e$ , also gehören  $v$  und  $w$  demselben Block in  $G-e$  an und damit auch alle Bögen von  $W$ .  $\square$

Wir können nun zeigen:

Satz 28.11.

Jeder minimale starke Block enthält mindestens zwei Knoten mit Innen- und Außengrad 1.

Beweis:

Sei  $G = (V, E)$  ein minimaler starker Block. Ist  $G$  bereits ein minimaler stark zusammenhängender Digraph, so folgt die Behauptung aus dem in [Berge, 1973, S. 31] gezeigten Satz.

Sei also  $G$  ein minimaler starker Block, der nicht minimal stark zusammenhgd. ist. Sei  $e \in E$ , so daß  $G-e$  stark zusammenhängend ist; aufgrund der Minimalität von  $G$  ist  $G-e$  dann nicht zweifach zusammenhängend. Sei  $C$  ein Kreis in  $G$ , der  $e$  enthält; dieser hat mindestens die Länge 3, da  $G$  nach Lemma 28.4 (b) keine antiparallelen Bögen enthält. Führen wir eine Ohrendekomposition von  $G$  durch, die mit dem Kreis  $C$  in Schritt (1) beginnt, dann muß nach Lemma 28.10 jeder der in Schritt (2) hinzugefügten Wege in genau einem der nach Lemma 28.9 (c) minimalen starken Blöcke von  $G-e$  liegen. Jeder in Schritt (2) hinzugefügte Weg hat nach Satz 28.3 mindestens die Länge 2, enthält also einen Knoten mit Innen- und Außengrad 1.

In jedem der verschiedenen Blöcke von  $G$  wird irgendwann im Verlaufe des Ohrendekompositionsverfahrens ein letzter Weg hinzugefügt. Jeder dieser "letzten" Wege erzeugt also in  $G$  einen Knoten mit Innen- und Außengrad 1. Da  $G-e$  mindestens zwei Blöcke besitzt, enthält  $G$  mindestens zwei Knoten mit Innen- und Außengrad 1.  $\square$

Die Beispiele 28.7 und 28.8 zeigen, daß es zu jedem  $n \geq 3$  ( $n = 2$  trivial) minimale starke Blöcke gibt, die genau 2 Knoten mit Innen- und Außengrad 1 enthalten. Aus dem Beweis von Satz 28.11 folgt jedoch sofort, daß das folgende schärfere Resultat richtig ist.

Satz 28.12.

Sei  $G = (V, E)$  ein minimaler starker Block, und sei  $S := \{e \in E \mid G-e \text{ ist stark zusammenhängend}\}$ . Sei

$$k_0 := \begin{cases} \max_{e \in S} \{k \mid G-e \text{ enthält } k \text{ Blöcke}\}, & \text{falls } S \neq \emptyset, \\ 2, & \text{falls } S = \emptyset. \end{cases}$$

Dann enthält  $G$  mindestens  $k_0$  Knoten mit Innen- und Außengrad 1.  $\square$

§ 29. *Der Branching Polytop*

Wir wissen, daß jede Tour T die Eigenschaft hat, daß sie keine Kurzzyklen enthält und daß jeder Knoten Anfangs- und Endpunkt eines Bogens aus T ist.

In § 26 haben wir die konvexe Hülle derjenigen Inzidenzvektoren von Bogenmengen I eines Digraphen vollständig beschrieben, die die Eigenschaft haben, daß jeder Knoten Endpunkt bzw. daß jeder Knoten Anfangspunkt von höchstens bzw. genau einem Bogen aus I ist (Satz 26.3, Satz 26.4). In § 27 haben wir die konvexe Hülle des Durchschnitts dieser Bogenmengen (Zuordnungspolytop) charakterisiert (Satz 27.3).

Aus § 10 kennen wir die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren von Wäldern, das sind Bogenmengen, die keine Zyklen enthalten (Satz 10.3). Wir wollen nun untersuchen, wie die vollständige, nicht redundante lineare Beschreibung des Durchschnitts des Forest Polytopen mit jeweils einem der Partitions-Matroid-Polytope aus § 26 aussieht.

Die in diesem und dem folgenden Paragraphen betrachteten Digraphen sollen schlingenfrei sein, dürfen aber parallele Bögen enthalten.

Sei  $G = (V, E)$  ein Digraph, dann heißt ein Unterdigraph  $(V, B)$ ,  $B \subset E$ , Branching, wenn B keinen Zyklus enthält und jeder Knoten Endpunkt von höchstens einem Bogen aus B ist. Ein zusammenhängendes Branching (also ein spannender Baum) heißt Arboreszenz. Wir nennen einen Unterdigraphen  $(V, A)$ ,  $A \subset E$ , ein Antibranching, wenn A keinen Zyklus enthält und jeder Knoten Anfangspunkt von höchstens einem Bogen aus A ist. Ein zusammenhängendes Antibranching heißt Antiarboreszenz. Die oben definierten Unterdigraphen  $(V, B)$  (Branchings etc.) identifizieren wir im weiteren mit ihren Bogenmengen B. Aufgrund der Definition sieht man sofort, daß jedes Branching (Antibranching) mindestens eine Wurzel (Antiwurzel) hat, das ist ein Knoten, der Endpunkt (Anfangspunkt) von keinem Bogen des Branchings (Antibranchings) ist. Arboreszenzen (Antiarboreszenzen) haben genau eine Wurzel (Antiwurzel).

Im folgenden sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger aber fest gewählter Digraph.

$$\begin{aligned} \text{Ist } \mathcal{B}^+ &= \{I \subset E \mid |\omega^+(v) \cap I| \leq 1 \quad \forall v \in V\}, \\ \mathcal{B}^- &= \{I \subset E \mid |\omega^-(v) \cap I| \leq 1 \quad \forall v \in V\} \text{ und} \\ \mathcal{B}_F &= \{F \subset E \mid F \text{ Wald}\}, \end{aligned}$$

dann gilt offensichtlich

$$\mathcal{B}_F \cap \mathcal{B}^- = \{B \subset E \mid B \text{ Branching}\},$$

$$\mathcal{B}_F \cap \mathcal{B}^+ = \{A \subset E \mid A \text{ Antibranching}\}.$$

Wir definieren die konvexen Hüllen der Inzidenzvektoren von Branchings bzw. Antibranchings wie üblich:

$$\tilde{P}_{B^-} := \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid B \text{ Branching}\},$$

$$\tilde{P}_{B^+} := \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid A \text{ Antibranching}\}.$$

$\tilde{P}_{B^-}$  wollen wir Branching-Polytop und  $\tilde{P}_{B^+}$  Antibranching-Polytop nennen. Es ist sofort einsichtig, daß  $(\tilde{Q}_{ST}$  ist der Forest Polytop auf  $G$ )

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{B^-} &\subset \tilde{P}_{M^-} \cap \tilde{Q}_{ST} \\ \tilde{P}_{B^+} &\subset \tilde{P}_{M^+} \cap \tilde{Q}_{ST}. \end{aligned}$$

Da  $\tilde{P}_{M^-}$ ,  $\tilde{P}_{M^+}$ ,  $\tilde{Q}_{ST}$ , wie wir gezeigt haben, Matroid Polytope sind, folgt aus Satz 8.6 [Edmonds,1970], daß bei obigen Inklusionsbeziehungen Gleichheit gilt. Mit Hilfe von Satz 8.7 [Giles,1975] kann man unter Benutzung der Matroid- bzw. Polymatroid-Theorie die Facetten von  $\tilde{P}_{B^-}$  bzw.  $\tilde{P}_{B^+}$  charakterisieren. Dies ist für  $\tilde{P}_{B^-}$  in [Giles,1975] durchgeführt worden, erfordert jedoch etwa den gleichen Aufwand wie die nachfolgende Betrachtung.

Unabhängig von matroid-theoretischen Überlegungen hat Edmonds [1968] eine vollständige lineare Charakterisierung des Branching Polytopen angegeben, und zwar gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{B^-} = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid &x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ &\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V, \\ &\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \subset V, |W| \geq 2\}. \end{aligned}$$

Es ist unmittelbar klar, daß sich die Edmonds'schen Überlegungen sofort auf den Antibranching-Polytopen übertragen lassen, d.h.

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{B^+} = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid &x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ &\sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V, \\ &\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \subset V, |W| \geq 2\}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun untersuchen, welche der angegebenen Ungleichungen nicht redundant sind.

Da jeder einzelne Bogen und die leere Bogenmenge ein Branching bzw. Antibranching definieren, sind  $\tilde{P}_{B^+}$  und  $\tilde{P}_{B^-}$  volldimensionale Polytope, aus Satz 6.2 folgt dann

Satz 29.1.

Für alle  $e \in E$  ist  $x_e \geq 0$  Facette von  $\tilde{P}_{B^-}$  und  $\tilde{P}_{B^+}$ .  $\square$

Sei  $V^- := \{v \in V \mid \text{Es gibt einen Knoten } w \in V \text{ mit } N^-(v) = \{w\} \text{ und } (v,w) \in E\}$   
 $U = \{v \in V \mid \omega^-(v) = \emptyset\},$   
 $V^+ := \{v \in V \mid \text{Es gibt einen Knoten } w \in V \text{ mit } N^+(v) = \{w\} \text{ und } (w,v) \in E\}$   
 $U = \{v \in V \mid \omega^+(v) = \emptyset\},$

dann sieht man recht schnell

Satz 29.2.

(a)  $\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1$  ist Facette von  $\tilde{P}_{B^-}$  genau dann, wenn  $v \in V - V^-$ .

(b)  $\sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1$  ist Facette von  $\tilde{P}_{B^+}$  genau dann, wenn  $v \in V - V^+$ .

Beweis:

(a) Ist  $\omega^-(v) = \emptyset$ , dann ist  $\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e = 0 \cdot x \leq 1$  natürlich keine Facette.

Ist  $v \in V^-$  und  $\omega^-(v) \neq \emptyset$ , dann gibt es nach Definition ein  $w \in W$  mit  $e = (w,v) \forall e \in \omega^-(v)$ , wegen  $(v,w) \in E$  ist  $\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq \sum_{e \in E(\{v,w\})} x_e \leq 1$ , d.h.

$\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1$  wird dominiert, ist also keine Facette.

Sei  $v \in V - V^-$ . Jeder Bogen  $e \in \omega^-(v)$  definiert ein Branching, und dessen Inzidenzvektor erfüllt die betrachtete Ungleichung mit Gleichheit. Für jeden anderen Bogen  $e \in E - \omega^-(v)$  gibt es wegen  $v \notin V^-$  einen Bogen  $f \in \omega^-(v)$ , so daß  $(V, \{e,f\})$  ein Branching ist. Die Inzidenzvektoren dieser  $|E|$  Branchings erfüllen die Ungleichung mit Gleichheit und sind offensichtlich linear unabhängig. Mithin ist  $\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1$  eine Facette von  $\tilde{P}_{B^-}$ .

(b) Analog.  $\square$

Korollar 28.4 (d) bzw. Satz 28.11 erlauben uns, die übrigen Facetten von  $\tilde{P}_{B^-}$  und  $\tilde{P}_{B^+}$  zu bestimmen. Zunächst zeigen wir

Satz 29.3.

Sei  $(W, F)$  ein starker Block, dann gilt:

- (a)  $(W, F)$  enthält  $|F|$  Arboreszenzen, deren Inzidenzvektoren voneinander linear unabhängig sind.
- (b)  $(W, F)$  enthält  $|F|$  Antiarboreszenzen, deren Inzidenzvektoren voneinander linear unabhängig sind.

Beweis:

(a) Wir zeigen über Induktion nach  $|F|$ , daß  $(W, F)$   $|F|$  Arboreszenzen enthält, deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind. Für Antiarboreszenzen geht der Beweis analog.

- 1) Ist  $|W| = 2$ , und  $(W, F)$  ein starker Block, dann ist jeder Bogen  $e \in F$  eine Arboreszenz, also ist die Behauptung für alle starken Blöcke mit zwei Knoten und damit für alle starken Blöcke mit zwei Bögen richtig.
- 2) Wir nehmen an, daß die Behauptung für alle starken Blöcke mit  $m$  Bögen bewiesen ist. Wir wollen zeigen, daß sie dann auch für starke Blöcke mit  $m+1$  Bögen gilt.
- 3) Sei  $(W, F)$  ein starker Block mit  $n \geq 3$  Knoten und  $m+1$  Bögen. Sei  $f \in F$  ein Bogen, so daß  $(W, F - \{f\})$  ebenfalls ein starker Block ist. Nach Induktionsannahme enthält  $(W, F - \{f\})$   $m$  linear unabhängige Arboreszenzen, diese sind auch Arboreszenzen von  $(W, F)$ . Aufgrund des starken Zusammenhangs existiert in  $(W, F)$  eine Arboreszenz  $A$ , die  $f$  enthält; der Inzidenzvektor von  $A$  ist linear unabhängig von den bereits gefundenen, da keine der Arboreszenzen von  $(W, F - \{f\})$  den Bogen  $f$  enthält.
- 4) Gibt es keinen Bogen  $f \in F$ , so daß  $(W, F - \{f\})$  ein starker Block ist, dann ist nach Definition  $(W, F)$  minimal. Nach Satz 28.4 (d) bzw. Satz 28.11 gibt es einen Knoten  $v \in W$  mit  $d^+(v) = d^-(v) = 1$ . Seien  $(u, v)$ ,  $(v, w)$  die beiden Bögen aus  $F$ , die  $v$  enthalten.  
Sei  $G' := (W - \{v\}, (F - \{(u, v), (v, w)\}) \cup \{(u, w)\})$ ,  $G'$  ist offensichtlich ein starker Block mit  $m$  Bögen.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Menge  $\mathcal{A}'$  von  $m = |F| - 1$  Arboreszenzen in  $G'$ , deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind. Enthält  $A' \in \mathcal{A}'$  den Bogen  $(u, w)$ , dann definieren wir eine Arboreszenz von  $G$  durch  $A := (A' - \{(u, w)\}) \cup \{(u, v), (v, w)\}$ , andernfalls setzen wir  $A := A' \cup \{(u, v)\}$ . Sei  $\mathcal{A}$  die so definierte Menge von Arboreszenzen in  $G$ .

Seien  $a^1, \dots, a^m$  die Inzidenzvektoren der Arboreszenzen aus  $\mathcal{A}$ ; diese sind nach Konstruktion linear unabhängig und enthalten alle in der zum Bogen  $(u,v)$  gehörenden Komponente eine Eins. Da  $G$  stark zusammenhängend ist, gibt es in  $G$  eine Arboreszenz  $A_{m+1}$  mit Wurzel  $v$ , diese enthält zwangsläufig den Bogen  $(u,v)$  nicht. Sei  $a^{m+1}$  der Inzidenzvektor von  $A_{m+1}$ .

Angenommen  $a^{m+1}$  ist linear abhängig von  $a^1, \dots, a^m$ , d.h. es existieren  $\lambda^i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  mit

$$a^{m+1} = \sum_{i=1}^m \lambda^i a^i.$$

Speziell gilt für die zum Bogen  $(u,v)$  gehörende Komponente von  $a^{m+1}$

$$0 = a_{uv}^{m+1} = \sum_{i=1}^m \lambda^i a_{uv}^i = \sum_{i=1}^m \lambda^i.$$

Da alle  $A_i$  Arboreszenzen von  $G$  sind, gilt natürlich

$$|W| - 1 = \sum_{e \in F} a_e^{m+1} = \sum_{e \in F} \sum_{i=1}^m \lambda^i a_e^i = \sum_{i=1}^m \lambda^i \sum_{e \in F} a_e^i = \sum_{i=1}^m \lambda^i (|W| - 1).$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^m \lambda^i = 1.$$

Widerspruch!

Damit haben wir die gesuchten  $m+1$  linear unabhängigen Arboreszenzen von  $G$  gefunden.  $\square$

Aus Satz 10.3 wissen wir, daß nur solche Ungleichungen  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  als Facetten von  $\tilde{P}_{B^-}$  und  $\tilde{P}_{B^+}$  in Frage kommen, für die gilt, daß  $(W, E(W))$  zweifach zusammenhängend ist. Damit jedoch eine solche Facette des Forest Polytopen  $\tilde{Q}_{ST}$  eine Facette von  $\tilde{P}_{B^-}$  bzw.  $\tilde{P}_{B^+}$  ist, ist, wie sich in Satz 29.3 bereits andeutet, eine weitere "gerichtete" Eigenschaft notwendig.

Satz 29.4.

Sei  $G = (V, E)$  ein Digraph und  $W \subset V$ ,  $|W| \geq 2$ , dann gilt:

$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  ist Facette von  $\tilde{P}_{B^-}$  bzw.  $\tilde{P}_{B^+}$  genau dann, wenn  $(W, E(W))$  stark und zweifach zusammenhängend ist.

Beweis:

Wir führen den Beweis für  $\tilde{P}_{B^-}$ , für  $\tilde{P}_{B^+}$  kann dieser fast wörtlich übertragen werden. Mit (\*) bezeichnen wir die Ungleichung  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$ .

" $\Rightarrow$ ": Wegen  $\tilde{P}_{B^-} \subset \tilde{Q}_{ST}$  kann nur eine Ungleichung (\*), für die  $(W, E(W))$  zweifach zusammenhängend ist, nach Satz 10.3 eine Facette von  $\tilde{P}_{B^-}$  sein.

Angenommen  $(W, E(W))$  ist nicht stark zusammenhängend, dann gibt es eine Knotenmenge  $\emptyset \neq A \subsetneq W$ , so daß  $\omega_W(A)$  ein Cokreis in  $(W, E(W))$  ist. Sei  $A$  so gewählt, daß  $\omega_W(A) = \omega_W^-(A)$  gilt. Es ist dann

$$E(W) \subset \bigcup_{v \in A} \omega^-(v) \cup E(W-A).$$

Daraus folgt

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq \sum_{v \in A} \sum_{e \in \omega^-(v)} x_e + \sum_{e \in E(W-A)} x_e \leq |A| + |W-A| - 1 = |W| - 1.$$

Mithin ist (\*) nach Satz 4.5 (c) keine Facette.

" $\Leftarrow$ ": Ist  $(W, E(W))$  stark und zweifach zusammenhängend, dann enthält  $(W, E(W))$  nach Satz 29.4  $|E(W)|$  Arboreszenzen, die ja Branchings von  $G$  sind, deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind und (\*) mit Gleichheit erfüllen.

Sei  $(u, v) \in E-E(W)$ .

Ist  $v \notin W$ , dann ist  $\{(u, v)\} \cup A$  für jede Arboreszenz  $A$  von  $(W, E(W))$  ein Branching von  $G$ , dessen Inzidenzvektor (\*) mit Gleichheit erfüllt.

Ist  $v \in W$ , dann gibt es aufgrund des zweifachen Zusammenhangs von  $(W, E(W))$  eine Arboreszenz  $A$  von  $(W, E(W))$  mit Wurzel  $v$ .  $A \cup \{(u, v)\}$  ist dann ein Branching von  $G$ , dessen Inzidenzvektor (\*) mit Gleichheit erfüllt.

Die Inzidenzvektoren der so konstruierten  $|E-E(W)|$  Branchings von  $G$  sind offensichtlich untereinander und von den bereits konstruierten  $|E(W)|$  Branchings linear unabhängig. Folglich ist (\*) eine Facette von  $\tilde{P}_{B^-}$ .  $\square$

Aus dem Satz von Edmonds [1968], der eine vollständige Beschreibung von  $\tilde{P}_{B^-}$  gibt, und den Sätzen 29.1, 29.2 und 29.4 folgt damit

Satz 29.5.

Sei  $G = (V, E)$  ein Digraph und  $\mathcal{L}$  die Menge der knoteninduzierten Unterdigraphen von  $G$ , die stark und zweifach zusammenhängend sind, dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{B^-} = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ & \sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V-V^-, \\ & \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \subset V \text{ mit } (W, E(W)) \in \mathcal{L}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{B^+} = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ & \sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V-V^+, \\ & \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \subset V \text{ mit } (W, E(W)) \in \mathcal{L}\}. \end{aligned}$$

Diese linearen Darstellungen des Branching und des Antibranching Polytopen sind vollständig und nicht redundant.  $\square$

Folgerung 29.6.

Ist  $K_n = (V, E)$  ein vollständiger Digraph, dann sind die folgenden Charakterisierungen von  $\tilde{P}_{B^-}$  und  $\tilde{P}_{B^+}$  vollständig und nicht redundant.

$$\tilde{P}_{B^-} = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \begin{aligned} &x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ &\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V, \\ &\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \subset V, |W| \geq 2, \end{aligned}\}$$

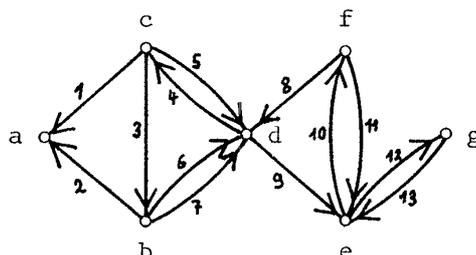
$$\tilde{P}_{B^+} = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \begin{aligned} &x_e \geq 0 \quad \forall e \in E, \\ &\sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V, \\ &\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall W \subset V, |W| \geq 2\}. \quad \square \end{aligned}$$

Aus Satz 29.5 ersehen wir, daß im allgemeinen nicht alle Ungleichungen, die Facetten von  $\tilde{Q}_{ST}$  und  $\tilde{P}_M^-$  definieren, auch Facetten von  $\tilde{P}_{B^-}$  liefern, sondern daß einige von diesen redundant werden. Wichtig ist jedoch die Tatsache, daß im Falle des Durchschnitts von zwei Matroid-Polytopen keine neuen Facetten auftreten, was - wie wir sehen werden - im Falle des Durchschnitts von drei und mehr Matroid-Polytopen immer falsch ist.

Nachzuprüfen, ob  $\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1$  eine Facette von  $\tilde{P}_{B^-}$  ist, ist eine triviale Aufgabe. Es ist jedoch interessant zu wissen, daß der Nachweis, daß  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  für ein beliebiges  $W \subset V$ ,  $|W| \geq 2$ , eine Facette ist, nicht wesentlich komplizierter ist. Nach Satz 29.5 ist lediglich zu zeigen, daß  $(W, E(W))$  zweifach und stark zusammenhängend ist. Tarjan [1972] hat einen Algorithmus angegeben, der die starken Zusammenhangskomponenten eines Digraphen  $G = (V, E)$  in  $\mathcal{O}(\text{Max}\{|V|, |E|\})$  Schritten berechnet, desgleichen einen Algorithmus, der alle Blöcke eines Digraphen in  $\mathcal{O}(|E|)$  Schritten findet. Das bedeutet, daß es einen guten Algorithmus gibt, der entscheidet, ob  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  eine Facette von  $\tilde{P}_{B^-}$  bzw.  $\tilde{P}_{B^+}$  ist oder nicht.

Beispiel 29.7.

Sei folgender Digraph gegeben:



Dann beschreibt nach Satz 29.5 das folgende Ungleichungssystem den Branching Polytopen  $\tilde{P}_{B^-}$  bezüglich dieses Digraphen vollständig und nicht redundant.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
1	1	1												$< 1$	$\omega_-(a)$
2			1											$< 1$	$\omega_-(b)$
3				1	1	1	1							$< 1$	$\omega_-(d)$
4									1	1				$< 1$	$\omega_-(e)$
5				1	1									$< 1$	$\{c,d\}$
6										1	1			$< 1$	$\{e,f\}$
7												1	1	$< 1$	$\{e,g\}$
8			1	1	1	1	1							$< 2$	$\{b,c,d\}$
9								1	1	1	1			$< 2$	$\{d,e,f\}$

$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 13 \quad \square$

§ 30. Der Polytop der Arboreszenzen

In § 29 haben wir eine vollständige und nicht redundante lineare Charakterisierung von  $\tilde{P}_{B^-}$  und  $\tilde{P}_{B^+}$  ermittelt. Betrachten wir nun statt der konvexen Hülle der Inzidenzvektoren der Branchings (Antibranchings) eines Digraphen  $G = (V,E)$  die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der Arboreszenzen (Antiarboreszenzen) von  $G$ , d.h.

$$P_{B^-} := \text{conv} \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid B \subset E \text{ ist Arboreszenz}\},$$

$$P_{B^+} := \text{conv} \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid B \subset E \text{ ist Antiarboreszenz}\},$$

so ist offensichtlich  $P_{B^-}$  ( $P_{B^+}$ ) eine Seitenfläche von  $\tilde{P}_{B^-}$  ( $\tilde{P}_{B^+}$ ), und mit einer vollständigen Beschreibung von  $\tilde{P}_{B^-}$  ( $\tilde{P}_{B^+}$ ) ist unmittelbar eine vollständige Beschreibung von  $P_{B^-}$  ( $P_{B^+}$ ) gegeben.

$P_{B^-}$  nennen wir Polytop der Arboreszenzen,  $P_{B^+}$  Polytop der Antiarboreszenzen.

Ist  $G = (V,E)$  ein Digraph, der nicht zusammenhängend ist, dann enthält  $G$  keine Arboreszenz, d.h.  $P_{B^-}$  ist leer. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit in diesem Paragraphen voraussetzen, daß  $G$  zusammenhängend ist.

Die Ungleichung  $\sum_{e \in E} x_e \leq |V| - 1$  muß natürlich bezüglich  $P_{B^-}$  bzw.  $P_{B^+}$  mit Gleichheit erfüllt sein, da eine Arboreszenz (Antiarboreszenz) genau  $|V| - 1$  Bögen enthält; darüber hinaus werden im allgemeinen einige weitere bezüglich  $\tilde{P}_{B^-}$  ( $\tilde{P}_{B^+}$ ) gültige Ungleichungen bezüglich  $P_{B^-}$  ( $P_{B^+}$ ) immer mit Gleichheit erfüllt sein müssen, was natürlich von dem zugrundeliegenden Digraphen abhängt. Desgleichen ist zu vermuten, daß manche der Facetten von  $\tilde{P}_{B^-}$  ( $\tilde{P}_{B^+}$ ) redundant bezüglich  $P_{B^-}$  ( $P_{B^+}$ ) werden.

Zunächst wollen wir einige graphentheoretische Fragen untersuchen, die mit der linearen Charakterisierung von  $P_{B^+}$  und  $P_{B^-}$  in engem Zusammenhang stehen.

Lemma 30.1.

Sei  $G = (V, E)$  ein Digraph. Seien  $W_1, W_2 \subset V$  mit  $\omega(W_1) = \omega^-(W_1)$ ,  $\omega(W_2) = \omega^-(W_2)$ , dann gilt

$$\omega(W_1 \cup W_2) = \omega^-(W_1 \cup W_2).$$

Beweis:

Angenommen es existiert ein Bogen  $(u, v) \in \omega^+(W_1 \cup W_2)$ , d.h.  $v \in V - (W_1 \cup W_2)$ ,  $u \in W_1 \cup W_2$ . Sei o.B.d.A.  $u \in W_1$ , dann ist  $v \in V - W_1$ , folglich  $(u, v) \in \omega^+(W_1)$ . Widerspruch zu  $\omega^+(W_1) = \emptyset$ !  $\square$

Ein Digraph  $G = (V, E)$  heißt quasi-stark zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten  $v, w \in V$  einen Knoten  $u$  (abhängig von  $v$  und  $w$ ) gibt, von dem aus es einen Weg nach  $v$  und einen Weg nach  $w$  gibt. Bekanntlich [Berge, 1973, S.32ff.] ist ein Digraph genau dann quasi-stark zusammenhängend, wenn er eine Arboreszenz enthält. Wir wollen eine neue Charakterisierung dieser Eigenschaft angeben.

Seien  $W_1, \dots, W_k \subset V$  alle Knotenmengen eines zusammenhängenden Digraphen mit der Eigenschaft  $\omega(W_i) = \omega^-(W_i) \neq \emptyset$ , d.h.  $\omega(W_i)$  ist ein Cokreis, dann definieren wir

$$\underline{V}_- := \bigcup_{i=1}^k W_i.$$

Ist  $G$  stark zusammenhängend, dann ist  $\underline{V}_- = \emptyset$ , da  $G$  keine Cokreise enthält.

Satz 30.2.

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Digraph, dann gilt:

$G$  ist quasi-stark zusammenhängend  $\iff V \neq \underline{V}_-$ .

Beweis:

" $\Leftarrow$ ": Ist  $G$  nicht quasi-stark zusammenhängend, dann gibt es zu jedem Knoten  $u \in V$  einen Knoten  $v \in V$ , so daß kein Weg von  $u$  nach  $v$  existiert, andernfalls wäre  $u$  die Wurzel einer Arboreszenz. Sei  $U$  die Menge der Knoten, die von  $u$  aus auf einem Weg erreichbar sind. Angenommen es gibt einen Bogen  $(x, y) \in \omega^+(U)$ , dann ist nach Definition  $y \in U$ , also  $(x, y) \notin \omega^+(U)$ . Widerspruch! Da nach Annahme  $V - U \neq \emptyset$  und  $G$  nach Voraussetzung zusammenhängend ist, gilt  $\omega(U) = \omega^-(U) \neq \emptyset$ . Folglich ist  $u \in \underline{V}_- \forall u \in V$ , also  $V = \underline{V}_-$ . Widerspruch!

" $\Rightarrow$ ": Ist  $G$  quasi-stark zusammenhängend, dann enthält  $G$  eine Arboreszenz  $A$ . Sei  $u$  die Wurzel von  $A$ . Sei  $W \subset V$  mit  $u \in W$  und  $\omega(W) \neq \emptyset$ . Ist  $v \in V - W$ , dann gibt es, da  $u$  Wurzel einer Arboreszenz ist, einen Weg von  $u$  nach  $v$ .

Folglich gilt  $\omega^+(W) \neq \emptyset$ . Das bedeutet  $\omega(W) \neq \omega^-(W)$  für alle  $W \subset V$  mit  $u \in W$ ,  $\omega(W) \neq \emptyset$ . Daraus folgt  $u \in V-V_-$ .  $\square$

Satz 30.3.

Sei  $G = (V, E)$  ein quasi-stark zusammenhängender Digraph, dann gilt:

(a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Knotenmenge maximaler Kardinalität  $W \subset V$  mit  $\omega(W) = \omega^-(W) \neq \emptyset$ , und zwar gilt

$$W = V_-.$$

(b) Der Digraph  $G-V_-$  ist stark zusammenhängend.

(c) Ist  $B$  eine Arboreszenz in  $G$ , dann liegt ihre Wurzel in  $V-V_-$ .

Beweis:

(a) Folgt sofort aus Lemma 30.1 und Satz 30.2.

(b) Sei  $G' = G-V_-$ . Enthält  $G'$  nur einen Knoten, ist nichts zu zeigen. Enthälte also  $G'$  mindestens zwei Knoten. Nehmen wir an, daß  $G'$  nicht stark zusammenhängend ist, d.h. daß es einen Cokreis in  $G'$  gibt. Sei  $W \subset V-V_-$  mit  $\omega_{G'}(W) = \omega_G^-(W) \neq \emptyset$ . Der Cozyklus  $\omega(W \cup V_-)$  in  $G$  ist nicht leer, da  $\omega_{G'}(W) \neq \emptyset$ . Gibt es einen Bogen  $(u, v) \in \omega^+(W \cup V_-)$ , dann gilt entweder  $(u, v) \in \omega_G^+(W)$  oder  $(u, v) \in \omega^+(V_-)$ . Da diese beiden Mengen leer sind, folgt  $\omega^+(W \cup V_-) = \emptyset$ , also  $\omega(W \cup V_-) = \omega^-(W \cup V_-) \neq \emptyset$ . Das aber widerspricht der Maximalität von  $V_-$ .

(c) Offensichtlich.  $\square$

Für unsere weiteren Überlegungen mögen Blöcke stets mindestens 2 Knoten enthalten. Isolierte Knoten betrachten wir nicht als Blöcke.

Lemma 30.4.

Ist  $G = (V, E)$  ein quasi-stark zusammenhängender Digraph, dann gilt:

(a) Jeder Bogen aus  $G-V_-$  ist in genau einem Block von  $G-V_-$  enthalten.

(b) Jeder Block von  $G-V_-$  ist ein starker Block.

(c) Ist  $B = (W, F)$  ein starker Block von  $G-V_-$  und  $A$  eine Arboreszenz von  $G$ , dann ist  $A \cap F$  eine Arboreszenz von  $B$ .

Beweis:

(a) Folgt aus Satz 30.3 (b) und Lemma 28.9 (a).

(b) Folgt aus Satz 30.3 (b) und Lemma 28.9 (b).

(c) Offensichtlich.  $\square$

Ist  $G$  zusammenhängend aber nicht quasi-stark zusammenhängend, dann enthält  $G$  keine Arboreszenz, folglich gilt  $P_{B^-} = \emptyset$ . Diese Digraphen können wir also ebenfalls bei unseren weiteren Betrachtungen außer acht lassen.

In einem quasi-stark zusammenhängenden Digraphen  $G$  kann es Bögen geben, die in keiner Arboreszenz von  $G$  enthalten sind. Man überlegt sich leicht, daß diese Bögen nicht in  $G-V_-$  liegen können, da  $G-V_-$  stark zusammenhängend ist, alle Arboreszenzen von  $G$  ihre Wurzel in  $V-V_-$  haben und Arboreszenzen von  $G-V_-$  definieren.

Wir können nun zeigen:

Satz 30.5. \*)

Sei  $G = (V, E)$  ein quasi-stark zusammenhängender Digraph,  $|V| \geq 2$ .

Sei  $V_-$  die Knotenmenge maximaler Kardinalität von  $G$  mit  $\omega(V_-) = \omega^-(V_-)$ .

Sei  $E_0 \subset E(V_-)$  die Menge der Bögen, die in keiner Arboreszenz von  $G$  enthalten sind. Ist  $|V-V_-| \geq 2$ , dann sei  $\beta$  die Anzahl der Blöcke von  $G-V_-$ , andernfalls sei  $\beta = 0$ . Dann gilt:

$$\dim P_{B^-} = |E| - |V_-| - \beta - |E_0|.$$

Beweis:

a) Sei  $A$  eine beliebige Arboreszenz in  $G$ .

Nach 30.3 (c) liegt die Wurzel von  $A$  in  $V-V_-$ . Folglich ist jeder Knoten von  $V_-$  Endpunkt eines Bogens von  $A$ , d.h.

$$\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e^A = 1 \quad \forall v \in V_-.$$

Ist  $e \in E_0$ , dann gilt offensichtlich

$$x_e^A = 0 \quad \forall e \in E_0.$$

Ist  $B = (W, E(W))$  ein starker Block (mit mindestens zwei Knoten) von  $G-V_-$ , dann ist nach 30.4(c)  $A \cap E(W)$  eine Arboreszenz von  $B$ , mithin gilt

$$\sum_{e \in E(W)} x_e^A = |W| - 1 \quad \text{für alle starken Blöcke } (W, E(W)) \text{ von } G-V_-.$$

Offensichtlich hat das obige System von  $|V_-| + \beta + |E_0|$  Gleichungen vollen Rang, und  $P_{B^-}$  ist in der Lösungsmenge dieses Gleichungssystems enthalten, d.h.

$$\dim P_{B^-} \leq |E| - |V_-| - \beta - |E_0|.$$

b) Sei  $bx = b_0$  eine Hyperebene, die  $P_{B^-}$  enthält. Wir werden zeigen, daß  $bx = b_0$  als Linearkombination der in a) angegebenen Gleichungen dargestellt werden kann. Das bedeutet, daß  $\dim P_{B^-} \geq |E| - |V_-| - \beta - |E_0|$  gilt, und wir sind fertig.

\*) Ich bin Rick Giles für den Hinweis auf einen Fehler in einer früheren Formulierung dieses Satzes dankbar.

b<sub>1</sub>) Seien  $v \in V_-$  und  $(i,v), (j,v) \in \omega^-(v) - E_0$ . Sei A eine Arboreszenz von G, die  $(i,v)$  enthält, und A' eine Arboreszenz, die  $(j,v)$  enthält. Enthält A keinen Weg von v nach j, dann ist  $A_1 := (A - \{(i,v)\}) \cup \{(j,v)\}$  eine Arboreszenz von G, folglich gilt

$$0 = b_0 - b_0 = bx^A - bx^{A_1} = b_{iv} - b_{jv}.$$

Das gleiche folgt, wenn A' keinen Weg von v nach i enthält.

Enthält sowohl A einen Weg von v nach j als auch A' einen Weg von v nach i, dann gilt wegen  $v \in V_-$  nach Definition  $i, j \in V_-$ , und es ist einfach, in  $A \cup A'$  eine Arboreszenz A'' zu finden, die  $(i,v)$  aber keinen Weg von v nach j enthält. Analog folgt dann  $b_{iv} = b_{jv}$ . Wir erhalten damit

$$b_e = \lambda_v \quad \forall e \in \omega^-(v) - E_0.$$

b<sub>2</sub>) Ist  $e = (u,v) \in E_0$ , dann setzen wir

$$\lambda_e = b_e - \lambda_v.$$

b<sub>3</sub>) Sei  $B_i = (V_i, E_i)$  einer der starken Blöcke von  $G - V_-$ ,  $|V_i| \geq 2$ , und A eine Arboreszenz von G mit Wurzel in  $B_i$ . Sei  $C := A - E_i$ . Für jede Arboreszenz D von  $B_i$  ist dann  $D \cup C$  eine Arboreszenz von G. Definieren wir

$$b_0^i := b_0 - \sum_{e \in C} b_e \quad \text{und} \quad b^i \in \mathbb{R}^{|E_i|} \quad \text{durch} \quad b_e^i := b_e \quad \forall e \in E_i, \quad \text{dann gilt}$$

$$b_x^{i,D} = b_0^i \quad \text{für alle Arboreszenzen D von } B_i,$$

denn aus  $b_x^{i,D} \neq b_0^i$  folgt  $b_0 = bx^{D \cup C} \neq b_0^i + \sum_{e \in C} b_e = b_0$ . Widerspruch!

Nach Satz 29.3 enthält  $B_i$  genau  $|E_i|$  linear unabhängige Arboreszenzen, da  $B_i$  ein starker Block ist. Die Dimension des Polytops der Arboreszenzen von  $B_i$  ist damit  $|E_i| - 1$ . Jede Arboreszenz von  $B_i$  erfüllt die Gleichung  $ax := \sum_{e \in E_i} x_e = |V_i| - 1$ . Folglich muß jede andere Hyperebene, die diesen

Polytopen<sup>i</sup> enthält, ein Vielfaches von  $ax = |V_i| - 1$  sein, daraus ergibt sich

$$b^i = \lambda_i a, \quad b_0^i = \lambda_i (|V_i| - 1).$$

Für alle starken Blöcke  $(V_i, E_i)$ ,  $i = 1, \dots, \beta$  von  $G - V_-$  gilt daher

$$b_e = \lambda_i \quad \forall e \in E_i.$$

Daraus folgt nun, daß  $bx = b_0$  als Linearkombination der in a) angegebenen Gleichungen dargestellt werden kann.  $\square$

Mit einer vollständigen nicht redundanten Beschreibung des Spanning Tree Polytopen  $Q_{ST}$  auf  $G = (V, E)$  (siehe Satz 11.2) und durch die Kenntnis des Partitionsmatroid Polytopen  $\tilde{P}_M^-$  (siehe Satz 26.3) ist uns natürlich eine vollständige Beschreibung des Polytops der Arboreszenzen gegeben, denn offensichtlich gilt

$$P_{B^-} = \tilde{P}_M^- \cap Q_{ST},$$

da die Arboreszenzen gerade die spannenden Bäume von  $G$  sind, die die Eigenschaft haben, daß jeder Knoten Endknoten von höchstens einem Bogen ist. Leider ist uns bisher noch keine vollständige und nicht redundante Charakterisierung von  $P_{B^-}$  gelungen, was aber hoffentlich in nächster Zukunft der Fall sein wird.

Man sieht ohne Schwierigkeiten, daß sich alle Überlegungen in diesem Paragraphen auch auf den Polytopen der Antiarboreszenzen  $P_{B^+}$  übertragen lassen. Man muß die Begriffsbildungen nur analog übertragen; statt quasi-stark zusammenhängend definiere man etwa: Ein Digraph heißt anti-quasi-stark zusammenhängend (ein häßliches Wort, das allerdings den Vorteil hat, in der "Sprache" zu bleiben), wenn zu je zwei Knoten  $v, w \in V$  ein Knoten  $u \in V$  existiert, so daß es von  $v$  und  $w$  einen Weg nach  $u$  gibt. Statt der Cokreise  $\omega(W) = \omega^-(W)$  betrachte man Knotenmengen mit  $\omega(W) = \omega^+(W)$ ; desgleichen definiere man  $V_+$  analog zu  $V_-$ . Die angegebenen Resultate gelten dann analog.

## Kapitel 12. Erste Resultate über die Struktur der asymmetrischen Travelling Salesman Polytope

### § 31. Die "gutartigen" Verwandten

Wie man das symmetrische TSP als Durchschnitt eines modifizierten 2-Matching Problems mit dem Spanning Tree Problem oder als Durchschnitt eines 2-Matching Problems mit einem modifizierten Spanning Tree Problem darstellen kann (siehe § 16), so ist das asymmetrische TSP als Durchschnitt von drei Matroid Problemen darstellbar. Wie üblich ist dazu ein kleiner Trick erforderlich.

Ist uns ein asymmetrisches  $n$ -Städte Travelling Salesman Problem vorgegeben mit Entfernungen  $c_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , so interpretieren wir dieses normalerweise als die Aufgabe, einen kürzesten Hamilton-Kreis im gewichteten vollständigen Digraphen  $K_n = (V, E)$ ,  $c_e \in \mathbb{R}$  für alle  $e \in E$ , zu finden. Wir ordnen dem ATSP nun einen weiteren "fast vollständigen" gewichteten Digraphen  $K'_{n+1} = (V', E')$  auf  $n+1$  Knoten wie folgt zu:

$$\begin{aligned} V' &:= V \cup \{n+1\} = \{1, \dots, n+1\}, \\ E' &:= \{(i, j) \mid i, j \in \{2, \dots, n\}, i \neq j\} \\ &\quad \cup \{(1, j) \mid j \in \{2, \dots, n\}\} \\ &\quad \cup \{(i, n+1) \mid i \in \{2, \dots, n\}\}, \end{aligned}$$

mit Entfernungen

$$c'_{ij} := c_{ij} \quad \text{für alle } (i,j) \in E' \text{ mit } i,j \in \{1,2,\dots,n\},$$

$$c'_{i,n+1} := c_{i1} \quad i = 2,\dots,n.$$

Aufgrund dieser Definition ist unmittelbar klar, daß jedem Hamilton-Kreis (Tour) in  $K_n$  ein Hamilton-Weg in  $K'_{n+1}$  mit Anfangsknoten 1 und Endknoten  $n+1$  entspricht. Da dies die einzigen Hamilton-Wege in  $K'_{n+1}$  sind, gibt es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Touren in  $K_n$  und den Hamilton-Wege in  $K'_{n+1}$ . Darüberhinaus haben eine Tour in  $K_n$  und der ihr zugeordnete Hamilton-Weg in  $K'_{n+1}$  aufgrund der Definition der Entfernungsfunktion  $c'$  die gleiche "Länge".

Sei  $\tilde{T}'_{n+1}$  die Menge aller Bogenmengen in  $K'_{n+1}$ , die Teilmengen der Hamilton-Wege von  $K'_{n+1}$  sind. Definieren wir nun die Partitions Matroide  $M^+ = (E', \mathcal{A}^+)$  und  $M^- = (E', \mathcal{A}^-)$  (siehe § 26) sowie das Forest Matroid  $M^F = (E', \mathcal{A}^F)$  (siehe Anfang von Kapitel 5) auf  $K'_{n+1}$ , dann sieht man sofort, daß

$$\tilde{T}'_{n+1} = \mathcal{A}^F \cap \mathcal{A}^+ \cap \mathcal{A}^-$$

gilt. Jede maximale Teilmenge von  $\tilde{T}'_{n+1}$  (das sind die Hamilton-Wege) ist offensichtlich eine Basis von jedem der drei Matroide. Ist also  $T'_{n+1}$  die Menge der Hamilton-Wege von  $K'_{n+1}$ , und sind  $\mathcal{A}_B^F, \mathcal{A}_B^+, \mathcal{A}_B^-$  die Mengen der Basen der Matroide  $M^F, M^+, M^-$ , dann gilt:

$$T'_{n+1} = \mathcal{A}_B^F \cap \mathcal{A}_B^+ \cap \mathcal{A}_B^-.$$

Sind nun  $\tilde{P}'_{M^+}, P'_{M^+}, \tilde{P}'_{M^-}, P'_{M^-}$  die Polytope der Partitionsmatroide bzw. der Basen der Partitionsmatroide auf  $K'_{n+1}$ , so kennen wir nach Satz 26.3 und Satz 26.4 eine vollständige und nicht redundante Beschreibung von diesen. Desgleichen ist durch Satz 10.3 bzw. Satz 11.2 eine vollständige und nicht redundante Charakterisierung des Forest Polytopen  $\tilde{Q}'_{ST}$  bzw. des Spanning Tree Polytopen  $Q'_{ST}$  auf  $K'_{n+1}$  gegeben. Ebenso kennen wir aus Satz 29.5 eine vollständige und nicht redundante lineare Beschreibung des Branching Polytopen  $\tilde{P}'_{B^-}$  und des Antibranching Polytopen  $\tilde{P}'_{B^+}$  auf  $K'_{n+1}$ , und wir verfügen über eine vollständige Charakterisierung des Polytops der Arboreszenzen  $P'_{B^-}$  und des Polytops der Antiarboreszenzen  $P'_{B^+}$  auf  $K'_{n+1}$  (siehe § 30).

Wegen  $|E| = |E'|$  können wir die asymmetrischen Travelling Salesman Polytope  $\tilde{P}_T^n, \tilde{P}_T^n$  als Polytope über  $K'_{n+1}$  interpretieren, indem wir die zu den Bögen  $(i,1) \in E, i = 2,\dots,n$ , gehörigen Komponenten von  $\mathbb{R}^{|E|}$  als zu den Bögen  $(i,n+1) \in E'$  gehörig interpretieren. Bezeichnen wir die so uminterpretierten asymmetrischen Travelling Salesman Polytope mit  $P_T^{n'}$  und  $\tilde{P}_T^{n'}$ , die als Teilmengen des  $\mathbb{R}^{|E|}$  identisch mit  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  sind, dann gilt aufgrund der vorhergehenden

Überlegungen

$$\begin{aligned}\tilde{P}_T^{n'} &\subset Q_{ST}' \cap \tilde{P}_{M+}' \cap \tilde{P}_{M-}' \\ &= P_{B+}' \cap \tilde{P}_{M-}' \\ &= \tilde{P}_{B-}' \cap \tilde{P}_{M+}'\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}P_T^{n'} &\subset Q_{ST}' \cap P_{M+}' \cap P_{M-}' \\ &= P_{B+}' \cap P_{M-}' \\ &= P_{B-}' \cap P_{M+}' .\end{aligned}$$

Ohne diesen "Uminterpretationstrick" können wir jedoch auch wohlbekannte Polytope finden, die  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  enthalten.

Seien  $\tilde{P}_{M+}$ ,  $P_{M+}$ ,  $\tilde{P}_{M-}$ ,  $P_{M-}$  die Polytope der Partitionsmatroide bzw. der Basen der Partitionsmatroide auf dem vollständigen Digraphen  $K_n = (V, E)$  (siehe Satz 26.3, Satz 26.4), und seien  $P_Z^n$  bzw.  $\tilde{P}_Z^n$  der Zuordnungspolytop bzw. der monotone Zuordnungspolytop auf  $K_n$ . Aufgrund von Satz 27.3 (c) und (d) ist uns eine vollständige, nicht redundante lineare Beschreibung von  $\tilde{P}_Z^n$  und  $P_Z^n$  bekannt. Darüber hinaus sei  $Q_S^n$  die in 16.1 definierte Relaxation des Forest Polytopen  $Q_{ST}^n$  auf dem vollständigen Digraphen  $K_n = (V, E)$ , d.h.  $Q_S^n$  ist der Polytop, der entsteht, wenn wir im Restriktionensystem von  $Q_{ST}^n$  die Ungleichung  $\sum_{e \in E} x_e \leq |V| - 1$  weglassen. Der Inzidenzvektor einer jeden Tour bzw. Teilmenge einer Tour ist Ecke von  $Q_S^n$ , desgleichen ist der Inzidenzvektor jeder Tour Ecke von  $P_{M+}$ ,  $P_{M-}$  und  $P_Z^n$  und der Inzidenzvektor jeder Teilmenge einer Tour Ecke von  $\tilde{P}_{M+}$ ,  $\tilde{P}_{M-}$ ,  $\tilde{P}_Z^n$ . Folglich gilt

$$\begin{aligned}\tilde{P}_T^n &\subset Q_S^n \cap \tilde{P}_{M-} \cap \tilde{P}_{M+} \\ &= Q_S^n \cap \tilde{P}_Z^n\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}P_T^n &\subset Q_S^n \cap P_{M-} \cap P_{M+} \\ &= Q_S^n \cap P_Z^n .\end{aligned}$$

Wir haben damit eine Fülle von Polytopen gefunden, die wir alle aufgrund früherer Untersuchungen vollständig kennen und die die Eigenschaft haben, die asymmetrischen Travelling Salesman Polytope zu enthalten.

Wir konnten bisher die dem ATSP auf natürliche Weise zugehörigen Matroid Polytope vollständig und nicht redundant beschreiben, ebenso die Polytope, die Durchschnitt von zweien dieser drei Matroid Polytope sind (Branching Polytop, Antibranching Polytop, monotoner Zuordnungspolytop); desgleichen haben wir die Polytope der Basen der drei Matroide und die Durchschnitte von jeweils zweien

von ihnen untersucht. Daher haben wir bereits eine recht gute Kenntnis von Polytopen, die die Polytope  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  enthalten, und somit von Ungleichungen, die gültig bezüglich  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  sind.

Ließe sich Satz 8.6 (siehe Diskussion am Ende von §8) auf den Durchschnitt von drei Matroiden verallgemeinern, wären wir bereits fertig. So aber müssen wir versuchen, durch Spezialuntersuchungen die besonderen Eigenschaften der asymmetrischen Travelling Salesman Polytope herauszufinden.

Analog zum symmetrischen Problem werden wir untersuchen, welche der Facetten der Polytope der "gutartigen" Verwandten des asymmetrischen TSP auch Facetten von  $P_T^n$  bzw.  $\tilde{P}_T^n$  sind, und wir werden versuchen, weitere Facetten zu finden, um eine "möglichst gute" lineare Beschreibung der asymmetrischen Travelling Salesman Polytope zu erhalten.

### § 32. Die Dimension von $P_T^n$ und $\tilde{P}_T^n$

Wie immer steht die Frage nach der Dimension der zu betrachtenden Polytope am Anfang der Untersuchungen über die Facettialstruktur.

$\tilde{P}_T^n$  enthält den Nullvektor und jeden Einheitsvektor, folglich gilt

Satz 32.1.

$$\dim \tilde{P}_T^n = n(n-1) = |E|, \quad n \geq 2. \quad \square$$

Die Dimension des Polytops der Basen eines Unabhängigkeitssystems ist wie üblich nicht ganz so einfach zu bestimmen. Für  $n = 2$  ist  $P_T^n$  ein Punkt, also uninteressant. Sei  $n \geq 3$ , kürzen wir das Gleichungssystem

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} = \sum_{e \in \omega^-(j)} x_e = 1 \quad \forall j \in V,$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} = \sum_{e \in \omega^+(i)} x_e = 1 \quad \forall i \in V$$

durch  $Ax = 1$  ab, so wissen wir aus Satz 27.2 (b), daß  $A$  den Rang  $2n-1$  hat.

Da jede Tour jede dieser Gleichungen erfüllen muß, gilt

$$\dim P_T^n \leq n(n-3) + 1.$$

Wir wollen jedoch zeigen, daß in dieser Ungleichung Gleichheit gilt.

Satz 32.2.

$$\dim P_T^n = n(n-3) + 1 \quad \text{für } n \geq 3.$$

1. Beweis:

Im Beweis von Satz 17.3 haben wir ein Verfahren angegeben, mit dem wir  $\frac{1}{2}(n-3)n+1$  linear unabhängige Touren des symmetrischen TSP konstruiert haben. Geben wir jeder dieser Touren zwei Orientierungen, so bedeutet das, daß wir  $n(n-3)+2$  Touren des asymmetrischen Problems erhalten und die Matrix  $M'$ , die auf diese Weise entsteht, bei geeigneter Anordnung der Zeilen und Spalten in der Form  $M' = \begin{pmatrix} M & O \\ O & M \end{pmatrix}$  schreiben können, wobei  $M$  die in Satz 17.3 konstruierte Matrix ist.  $M'$  ist folglich regulär, und  $n(n-3)+2$  linear unabhängige Touren sind gefunden.  $\square$

Wir geben nun ein weiteres Verfahren an, mit dem wir aus einer vorgegebenen Tour  $n(n-3)+2$  linear unabhängige Touren konstruieren können.

2. Beweis:

Sei  $n \geq 7$  und  $d_n := n(n-3)+1$ . Zu zeigen ist:  $\dim P_T^n \geq d_n$ . Wenn wir  $d_n+1$  affin unabhängige Touren angeben können, ist damit die Behauptung des Satzes bewiesen. Der Beweis verläuft wie folgt: Aus der Menge aller Touren wählen wir  $d_n+1$  Touren aus, stellen diese als Vektoren des  $\mathbb{R}^{n^2-n}$  dar und fassen sie zu einer  $(d_n+1, n^2-n)$ -Matrix  $M_0$  zusammen. Wir zeigen, daß  $M_0$  eine reguläre  $(d_n+1, d_n+1)$ -Untermatrix  $N_0$  enthält, woraus folgt, daß der Rang von  $M_0$  gleich  $d_n+1$  ist, also die ausgewählten Touren linear (damit auch affin) unabhängig sind. Zur Auswahl der Touren geben wir ein Verfahren an, das wir Ringschiftverfahren nennen wollen; dabei merken wir uns zu jeder konstruierten Tour auch einen Spaltenindex  $(i,j)$  (wir erinnern daran, daß die Spaltenindizes gerade die Tupel  $(i,j)$ ,  $1 \leq i,j \leq n$ ,  $i \neq j$ , sind), der uns zur Konstruktion der Untermatrix  $N_0$  von  $M_0$  dienen wird.

a) Ringschiftverfahren:

Touren  $T$  im vollständigen Digraphen mit  $n$  Knoten stellen wir wie üblich durch  $\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle$  dar.

Schritt 1): Wir beginnen mit einer beliebigen Tour  $\langle i_1, i_2, i_3, \dots, i_n \rangle$  und merken uns den Spaltenindex  $(i_1, i_2)$ . Das Verfahren besteht nun darin, daß das an der Position 1 stehende Element  $i_1$  festgehalten wird und die an den Positionen 2, ...,  $n$  stehenden Elemente zyklisch vertauscht werden, d.h. das Element, das an Position 2 steht, rückt an die Position  $n$ , alle anderen Elemente (außer  $i_1$ ) rücken um eine Position vor. Wir merken uns dabei jeweils die Spaltenindizes  $(i_1, i_j)$ ,  $j = 2, \dots, n$ . Auf diese Weise erhalten wir die folgenden  $n-1$  Touren bzw. Spalten:

$$\begin{array}{ll}
 \langle i_1, i_2, i_3, \dots, i_n \rangle & (i_1, i_2) \\
 \langle i_1, i_3, i_4, \dots, i_n, i_2 \rangle & (i_1, i_3) \\
 \vdots & \vdots \\
 \langle i_1, i_n, i_2, i_3, \dots, i_{n-1} \rangle & (i_1, i_n).
 \end{array}$$

Schritt 2): Beginnend mit einer in Schritt 1) konstruierten Tour

$\langle i_1, i_j, i_{j+1}, \dots, i_n, i_2, \dots, i_{j-1} \rangle$ ,  $j = 2, \dots, n$ , erzeugen wir jeweils  $n-3$  neue Touren dadurch, daß wir die Elemente an den Positionen 1 und 2, also  $i_1, i_j$  festhalten und die restlichen  $n-2$  Elemente zyklisch vertauschen. Als Spaltenindex der zu konstruierenden Matrix  $N_0$  merken wir uns jeweils das Paar  $(i_j, i_k)$ ,  $k \in \{2, \dots, n\} - \{j, j+1\}$ , bzw.  $k \in \{3, \dots, n-1\}$  für  $j = n$ . Auf diese Weise erhalten wir  $(n-1) \cdot (n-3)$  Touren und Spalten der folgenden Form:

$$\begin{array}{ll}
 \langle i_1, i_j, i_{j+2}, i_{j+3}, \dots, i_n, i_2, \dots, i_{j-1}, i_{j+1} \rangle & (i_j, i_{j+2}) \\
 \langle i_1, i_j, i_{j+3}, \dots, i_n, i_2, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, i_{j+2} \rangle & (i_j, i_{j+3}) \\
 \vdots & \vdots \\
 \langle i_1, i_j, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_n, i_2, \dots, i_{j-2} \rangle & (i_j, i_{j-1}).
 \end{array}$$

b) Insgesamt haben wir somit  $n-1 + (n-1) \cdot (n-3) = d_n + 1$  Touren und Spalten angegeben. Wir listen nun die Touren in der Reihenfolge ihrer Konstruktion untereinander auf und erhalten die Matrix  $M_0$ . Wir streichen in  $M_0$  die Spalten  $(i_j, i_{j+1})$ ,  $(i_j, i_1)$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ , und die Spalten  $(i_n, i_1)$ ,  $(i_n, i_2)$ . Es verbleiben  $d_n + 1$  Spalten. Diese ordnen wir so um, daß der zur  $k$ -ten Tour gehörige Spaltenindex die  $k$ -te Spalte bezeichnet. Wir nehmen nun noch eine Änderung vor und zwar tauschen wir die Tour  $\langle i_1, i_n, i_3, i_4, \dots, i_{n-1}, i_2 \rangle$  gegen die Tour  $\langle i_1, i_2, i_4, i_5, \dots, i_{n-3}, i_{n-1}, i_{n-2}, i_n, i_3 \rangle$  aus. Die zu dieser Tour gehörige Spalte  $(i_n, i_3)$  wird nicht ausgewechselt. Mit  $N_0$  bezeichnen wir die auf diese Weise erhaltene Matrix. Die neue Tour wollen wir Ausnahmetour nennen. Die Ausnahmetour kommt unter den in Schritt 1 und 2 konstruierten Touren offensichtlich nicht vor und ist erst für  $n \geq 7$  wohldefiniert.

c) Die Matrix  $N_0$  hat nach Konstruktion folgendes Aussehen:

i) Alle Hauptdiagonalelemente sind 1, da zur  $k$ -ten Tour  $T$  ( $k$ -te Zeile) der  $k$ -te Spaltenindex  $(i, j)$  gehört und dieser gerade so gewählt wurde, daß der Inzidenzvektor von  $T$  in der Komponente  $(i, j)$  eine 1 enthält.

ii) Die ersten  $n-1$  Zeilen, das sind die Touren, die im Schritt 1) konstruiert werden, enthalten jeweils nur ein Einselement (und zwar auf der

Hauptdiagonalen von  $N_0$ ). Das liegt daran, daß die Spalten  $(i,j)$ , in denen die Inzidenzvektoren dieser Touren Einselemente enthalten, beim Übergang von  $M_0$  zu  $N_0$  gestrichen wurden.

- iii) Nur die Spalten  $(i_j, i_{j+2})$ ,  $j = 2, \dots, n-2$ ,  
 $(i_1, i_j)$ ,  $n = 2, \dots, n$ ,  
 $(i_{n-1}, i_2), (i_{n-1}, i_{n-2}), (i_n, i_3)$   
 enthalten nach Konstruktion mehr als ein Einselement. Alle anderen Spalten enthalten genau eine 1 (auf der Hauptdiagonalen).

d) Wir zeigen nun, daß die Determinante von  $N_0$  von Null verschieden ist.

Zunächst können wir aufgrund des Determinantenentwicklungssatzes und der Überlegungen in Teil c) alle Spalten und Zeilen von  $N_0$  streichen, bis auf die Spalten

$$(i_j, i_{j+2}), j = 2, \dots, n-2 \text{ sowie } (i_{n-1}, i_2), (i_{n-1}, i_{n-2}), (i_n, i_3)$$

und die dazugehörigen Zeilen, die zu den Touren

$$\langle i_1, i_j, i_{j+2}, i_{j+3}, \dots, i_n, i_2, \dots, i_{j-1}, i_{j+1} \rangle, j = 2, \dots, n-2,$$

$$\langle i_1, i_{n-1}, i_2, i_3, \dots, i_{n-2}, i_n \rangle,$$

$$\langle i_1, i_{n-1}, i_{n-2}, i_n, i_2, i_3, \dots, i_{n-3} \rangle$$

sowie der Ausnahmetour gehören. Es bleibt eine  $(n,n)$ -Matrix  $L_0$  übrig, die dieselbe Determinante wie  $N_0$  hat.  $L_0$  sieht nach Konstruktion wie folgt aus:

$$L_0 = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

wobei  $P$  die  $(n-5, n-5)$ -Bandmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen, Einsen auf der unteren Nebendiagonalen und Nullen sonst ist;  $Q$  ist eine  $(n-5, 5)$ -Matrix mit einer Eins auf der Position  $(1, 5)$  und Nullen sonst;  $R$  ist eine  $(5, n-5)$ -Matrix mit einer Eins auf den Positionen  $(1, n-5)$  und  $(5, 1)$ , Nullen sonst; und schließlich ist  $S$  eine  $(5, 5)$ -Matrix der Form

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da  $|P| = 1$ , folgt für die Determinante von  $L_0$ :

$$|L_0| = \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} = |P| \cdot |S - RP^{-1}Q| = |S - RP^{-1}Q|.$$

Setzen wir  $\delta = (-1)^n$ , so folgt (die Inverse  $P^{-1}$  kann einfach explizit berechnet werden), daß

$$|S - RP^{-1}Q| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \delta \geq 1,$$

gilt, und damit, daß die wie oben konstruierten Ringschiffs unter Hinzunahme der Ausnahmetour  $d_n + 1$  linear unabhängige Touren liefern.

Zum Abschluß des Beweises des Satzes 32.2 fehlt noch die Betrachtung der Fälle  $n = 3, 4, 5, 6$ :

Falls  $n = 3$ , gibt es nur zwei Touren.

Falls  $n = 4$ , gibt es 6 Touren, diese sind alle voneinander linear unabhängig.

Falls  $n = 5$ , konstruieren wir alle Touren wie im obigen Beweis und tauschen die Tour  $\langle i_1, i_5, i_3, i_4, i_2 \rangle$  gegen  $\langle i_1, i_5, i_3, i_2, i_4 \rangle$  aus.

Falls  $n = 6$ , wählen wir alle im obigen Beweis konstruierten Ringschiffs und tauschen nicht aus. Die lineare Unabhängigkeit dieser Touren zeigt man durch einfaches Ausrechnen.

Damit ist der Satz 32.2 für alle  $n \geq 3$  bewiesen.  $\square$

### Bemerkung 32.3.

Wie es sich im Fall  $n = 4$ , 6 bereits andeutet, ist die Hinzunahme der Ausnahmetour für gerades  $n$  nicht nötig. Es ist schon die allein durch Ringschiffs konstruierte Matrix  $N_0$  regulär, was sich auch einfacher als im obigen Beweis zeigen läßt. Im Falle "n ungerade" muß diese Austauschprozedur durchgeführt werden, die den Beweis etwas weniger durchsichtig macht, aber dafür in allen Fällen das gewünschte Ergebnis liefert. Der Beweis von Satz 32.2 zeigt, daß man nun mit jeder beliebigen Tour  $T$  beginnend mit Hilfe des Ringschiffverfahrens  $d_n + 1$  linear unabhängige Touren konstruieren kann. Im weiteren werden wir dieses Konstruktionsverfahren häufig anwenden und einfach sagen: Wir konstruieren die zu  $T$  gehörigen  $d_n + 1$  linear unabhängigen Touren oder die zu  $T$  gehörigen  $d_n + 1$  Ringschiffs. Dabei soll natürlich auch die Ausnahmetour eingeschlossen sein. Benötigen wir nur die in Schritt 1) des Ringschiffverfahrens konstruierten Touren, so nennen wir diese  $n-1$  Touren die zu  $T$  gehörenden Ringschiffs des Typs 1.  $\square$

Aus historischen Gründen und der Vollständigkeit halber sei noch angemerkt, daß die Behauptung des Satzes 32.2 erstmals von Heller [1953] und Kuhn [1955] aufgestellt worden ist. Bei diesen Veröffentlichungen handelt es sich jedoch um sehr kurze Abstracts, die keinerlei Beweise oder Beweisideen enthalten.

§ 33. Primimplikanten - triviale Facetten

Sei in diesem Paragraphen  $T_n$  die Menge aller Inzidenzvektoren von Touren des vollständigen Digraphen  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten und  $\tilde{T}_n$  die Menge der Inzidenzvektoren aller Teilmengen von Touren. Es ist dann  $T_n, \tilde{T}_n \subset \mathbb{B}^{|E|} = \{0,1\}^{|E|}$ , und  $\tilde{T}_n$  ist eine monotone Menge. Seien  $\rho$  und  $\tilde{\rho}$  die Resolventen von  $T_n$  und  $\tilde{T}_n$ , d.h.

$$\begin{aligned} \rho(x) = 0 &\iff x \in T_n \\ \tilde{\rho}(x) = 0 &\iff x \in \tilde{T}_n. \end{aligned}$$

Wir wollen die Primimplikanten von  $\rho$  und  $\tilde{\rho}$  bestimmen.

Eine Tour darf keine Kreise der Länge  $< n$  enthalten, aber jeder Weg kann zu einer Tour ergänzt werden, folglich ist jede der Konjunktionen

$$x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_3} \dots x_{i_{k-1} i_k} x_{i_k i_1}$$

ein Primimplikant von  $\rho$  und  $\tilde{\rho}$ , wenn  $\langle i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k \rangle$  ein Kreis in  $G$  ist, der keine Tour ist.

In einer Teilmenge einer Tour ist jeder Knoten Anfangsknoten von höchstens einem Bogen und Endknoten von höchstens einem Bogen, deshalb ist klar, daß jede der Konjunktionen

$$\left. \begin{aligned} &x_{ij_1} x_{ij_2} \\ &x_{j_1 i} x_{j_2 i} \end{aligned} \right\} \quad i \neq j_1 \neq j_2 \neq i$$

Primimplikant von  $\rho$  und  $\tilde{\rho}$  ist.

Man überlegt sich leicht, daß die Vereinigung der gefundenen Primimplikanten dieselbe Lösungsmenge wie  $\tilde{\rho}$  hat, d.h.

$$\tilde{\rho} = \bigvee_{k=2, \langle i_1, \dots, i_k \rangle \text{ Kreis}}^{n-1} \left( \bigvee x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_3} \dots x_{i_k i_1} \right) \vee \bigvee_{i, j, k \in V} (x_{ij} x_{ik} \vee x_{ji} x_{ki})$$

Da  $\tilde{\rho}$  monoton ist, sind damit alle Primimplikanten gefunden, und die Beschreibung ist irredundant und eindeutig.

In einer Tour ist jeder Knoten Anfangs- bzw. Endknoten von genau einem Bogen, deshalb sind für jeden Knoten  $i \in V$  die Konjunktionen

$$\left. \begin{aligned} &\bar{x}_{ij_1} \dots \bar{x}_{ij_{n-1}} \\ &\bar{x}_{j_1 i} \dots \bar{x}_{j_{n-1} i} \end{aligned} \right\} \quad \{j_1, \dots, j_{n-1}\} = V - \{i\}$$

Primimplikanten von  $\rho$ . Wiederum sieht man sofort, daß damit  $\rho$  vollständig bestimmt ist, d.h.

$$\rho = \tilde{\rho} \vee \bigvee_{i \in V} (\bar{x}_{ij_1} \dots \bar{x}_{ij_{n-1}} \vee \bar{x}_{j_1 i} \dots \bar{x}_{j_{n-1} i})$$

Damit sind jedoch nicht alle Primimplikanten von  $\rho$  bekannt; diese könnten etwa mit der Consensus-Methode berechnet werden, was allerdings alles andere als einfach ist.

Um die lineare Struktur von  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  bestimmen zu können, werden wir uns der Informationen, die wir mit Hilfe der Booleschen Algebra erhalten haben, bedienen. Zunächst betrachten wir den einfachsten Fall  $n = 2$ . Ohne Mühe sieht man, daß

$$P_T^2 = \{(1,1)\},$$

$$\tilde{P}_T^2 = \text{Einheitsquadrat}$$

gilt. Für unsere weiteren Untersuchungen wollen wir daher immer  $n \geq 3$  annehmen.

Da  $\tilde{T}_n$  monoton ist, also auch  $\tilde{P}_T^n = \text{conv} \{x \in \tilde{T}_n\}$ , gilt nach Satz 6.2 a):

Satz 33.1.

Für alle  $(i,j) \in E$  definiert

$$x_{ij} \geq 0$$

eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 3$ .  $\square$

Da jeder Bogen  $(i,j)$  in einem Primimplikanten der Länge 2, etwa  $x_{ij}x_{ik}$ ,  $i \neq j \neq k \neq i$ , enthalten ist, sind die Ungleichungen  $x_{ij} \leq 1$  nach Satz 6.2 keine Facetten.

Jeder der Primimplikanten von  $\tilde{\rho}$  liefert nach Satz 6.5 eine Facette des Polytopes, der aus  $\tilde{P}_T^n$  entsteht, wenn man alle Komponenten streicht, die nicht als Index des Primimplikanten vorkommen. Mit Hilfe des Padbergschen Liftungsverfahrens kann man dann aus den Facetten

$$\sum_{(i,j) \in I} x_{ij} \leq |I| - 1$$

dieses Polytopes Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  machen.

Nehmen wir einen der Primimplikanten  $x_{ij_1}x_{ij_2}$ ; die Primimplikanten-Ungleichung ist dann

$$x_{ij_1} + x_{ij_2} \leq 1.$$

Ist  $(v,w)$  ein Bogen mit  $v \neq i$  und o.B.d.A.  $w \neq j_1$ , dann gibt es eine Tour,

die  $(i, j_1)$  und  $(v, w)$  enthält, folglich ist

$$x_{ij_1} + x_{ij_2} + a_{vw} x_{vw} \leq 1$$

für positives  $a_{vw}$  keine gültige Gleichung. Für den Liftungskoeffizienten gilt also  $a_{vw} = 0$  (siehe Satz 6.4). Für jeden Bogen  $(i, j)$  mit  $j \notin \{i, j_1, j_2\}$  ist  $a_{ij} x_{ij} + x_{ij_1} + x_{ij_2} \leq 1$  gültig, wenn  $a_{ij} \leq 1$  und ungültig, falls  $a_{ij} > 1$ . Folglich ist der Liftungskoeffizient 1. Für jeden weiteren Bogen mit Anfangsknoten  $i$  können wir nun sequentiell den Liftungskoeffizienten bestimmen; wie man unschwer sieht, ist dieser in jedem Fall 1. Alle  $\binom{n-1}{2}$  Primimplikanten  $x_{ij_1} x_{ij_2}$  liefern auf diese Weise dieselbe Facette, d.h. es gilt

Satz 33.2.

Für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $n \geq 3$ , ist

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{ij} \leq 1$$

Facette von  $\tilde{P}_T^n$ .  $\square$

Völlig analog erhält man durch sequentielles Liften

Satz 33.3.

Für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $n \geq 3$ , ist

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} \leq 1$$

Facette von  $\tilde{P}_T^n$ .  $\square$

Satz 33.4.

Alle Facetten des monotonen Zuordnungspolytops  $\tilde{P}_Z^n$  auf dem vollständigen Digraphen mit  $n \geq 3$  Knoten sind auch Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

Folgt aus den Sätzen 33.1, 33.2, 33.3 mit Satz 27.3 (c).  $\square$

Die Primimplikanten-Ungleichungen

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_3} + \dots + x_{i_{k-1} i_k} + x_{i_k i_1} \leq k-1$$

ließen sich im Falle des symmetrischen TSP sequentiell zu den Kurzzyklusbedingungen liften, woraus dann folgte, daß die Kurzzyklusbedingungen Facetten von  $\tilde{Q}_T^n$  sind. Im asymmetrischen Falle läßt sich das jedoch nicht durch sequentielles Liften erreichen, was wir uns im folgenden überlegen werden.

Es sei hier angemerkt, daß man das gewünschte Resultat durch ein spezielles "Parallel-Liftungsverfahren", wie es etwa bei [Zemel,1974] beschrieben ist, erhalten kann. Wir werden jedoch in § 35 einen expliziten Liftungssatz für  $\tilde{P}_T^n$  angeben, aus dem dann folgt, daß die Kurzzyklusbedingungen Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  sind.

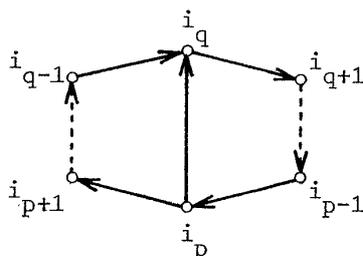
Sei  $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$  ein Kreis,  $k < n$ , und

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_3} + \dots + x_{i_k i_1} \leq k-1$$

die zugehörige Primimplikanten-Ungleichung.

Ist  $(v,w)$  ein Bogen, so daß höchstens einer der Knoten in  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  liegt, dann findet man unschwer eine Tour, die  $(v,w)$  und  $k-1$  der Bögen des Kreises enthält. Folglich gilt für den Liftungskoeffizienten  $a_{vw} = 0$ , denn für  $a_{vw} > 0$  ist die geliftete Ungleichung nicht gültig bezüglich  $\tilde{P}_T^n$ . Wir brauchen also nur zu untersuchen, wie die Liftungskoeffizienten - bei sequentieller Liftung - der Bögen  $(v,w)$  aussehen, die Anfangs- und Endpunkt in  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  haben.

Sei also  $(v,w)$  ein Bogen mit  $v, w \in \{i_1, \dots, i_k\}$ , der nicht Bogen des Kreises ist, d.h.  $(v,w)$  ist eine Diagonale des Kreises. Wir wollen eine Tour  $T$  finden, die  $(v,w)$  und möglichst viele Bögen des Kreises enthält. Ist  $v = i_p$  und  $w = i_q$ , dann kann  $T$  die Bögen  $(i_p, i_{p+1})$  und  $(i_{q-1}, i_q)$  nicht enthalten, da jeder Knoten Anfangs- bzw. Endpunkt von höchstens einem Bogen aus  $T$  ist.



Enthielte  $T$  alle Bögen des Weges  $[i_q, \dots, i_p]$ , dann würde dieser Weg zusammen mit  $(v,w) = (i_p, i_q)$  einen Kreis in  $T$  definieren. Folglich enthält  $T$  mindestens einen dieser Bögen nicht. Das aber bedeutet, daß jede Tour  $T$ , die  $(v,w)$  enthält, höchstens  $k-3$  Bögen des Kreises  $\langle i_1, \dots, i_k \rangle$  enthalten kann. Da die Wege  $[i_{p+1}, \dots, i_{q-1}]$  und  $[i_p, i_q, i_{q+1}, \dots, i_{p-1}]$  zu einer Tour ergänzt werden können und  $k-3$  Bögen des Kreises enthalten, folgt daraus, daß

$$a_{vw} x_{vw} + x_{i_1 i_2} + \dots + x_{i_k i_1} \leq k-1$$

genau dann gültig bezüglich  $\tilde{P}_T^n$  ist, wenn  $a_{vw} \leq 2$  ist.

Es folgt daraus mit Satz 6.4

Lemma 33.5.

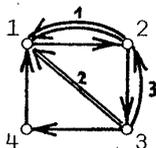
Sei  $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$  ein Kreis,  $k < n$ , und  $(v, w)$  eine Diagonale des Kreises. Liften wir die durch den Kreis induzierte Primimplikanten-Ungleichung bezüglich  $x_{vw}$ , dann hat die Liftungsungleichung das folgende Aussehen

$$2x_{vw} + x_{i_1 i_2} + \dots + x_{i_k i_1} \leq k-1. \quad \square$$

Lemma 33.4 besagt, daß wir vermittels sequentieller Liftung niemals die Kurzzyklusbedingungen erhalten können, da der erste Liftungskoeffizient einer Diagonalen bei sequentieller Liftung immer den Wert 2 hat.

Es ist uns leider nicht gelungen, eine geschlossene Form für alle möglichen Liftungen einer durch einen Kreis induzierten Primimplikanten-Ungleichung zu finden. Für die einfachsten Fälle  $k = 2, 3, 4, 5$  geben wir eine Liste einiger möglicher Liftungen an. Der Übersichtlichkeit halber stellen wir die Liftungen graphisch dar. Wir beginnen jeweils mit einem Kreis und liften dann einzelne Diagonalen. Die Zahl  $p$  an einer Diagonalen besagt, daß die Diagonale in der Liftungssequenz an  $p$ -ter Stelle geliftet worden ist. Einfach (doppelt) gezeichnete Pfeile besagen, daß der Koeffizient in der zugehörigen Ungleichung eins (zwei) ist.

Beispiel:



Die zugehörige Ungleichung ist

$$x_{12} + 2x_{21} + x_{23} + 2x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{41} \leq 3.$$

Diese ist nach Satz 6.4 eine Facette von  $P_T^n$ ,  $n \geq 5$ . Die Liftungskoeffizienten wurden in der Reihenfolge  $(2,1), (3,1), (3,2)$  bestimmt, alle übrigen Liftungskoeffizienten sind Null.

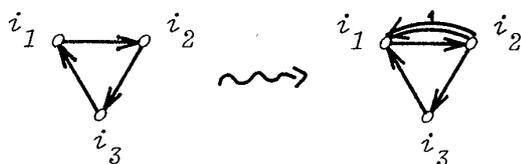
Bemerkung 33.6.

Einige Liftungen der Kreise der Länge  $\leq 5$ .

(a)  $k = 2:$   $i_1 \rightleftarrows i_2$   $x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_1} \leq 1.$

Alle Liftungskoeffizienten sind Null, da dieser Kreis keine Diagonale hat. Die Kurzzyklusbedingung auf 2 Knoten ist also eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 3$ .

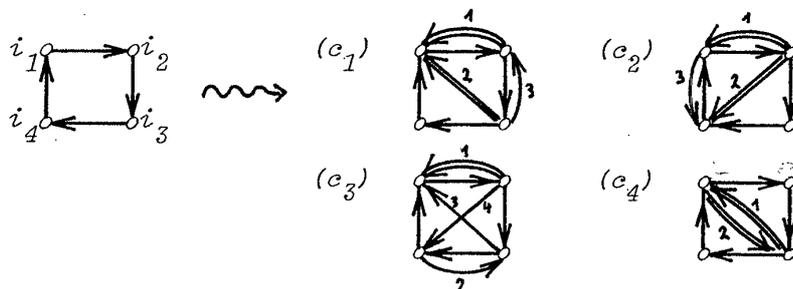
(b)  $k = 3$ :



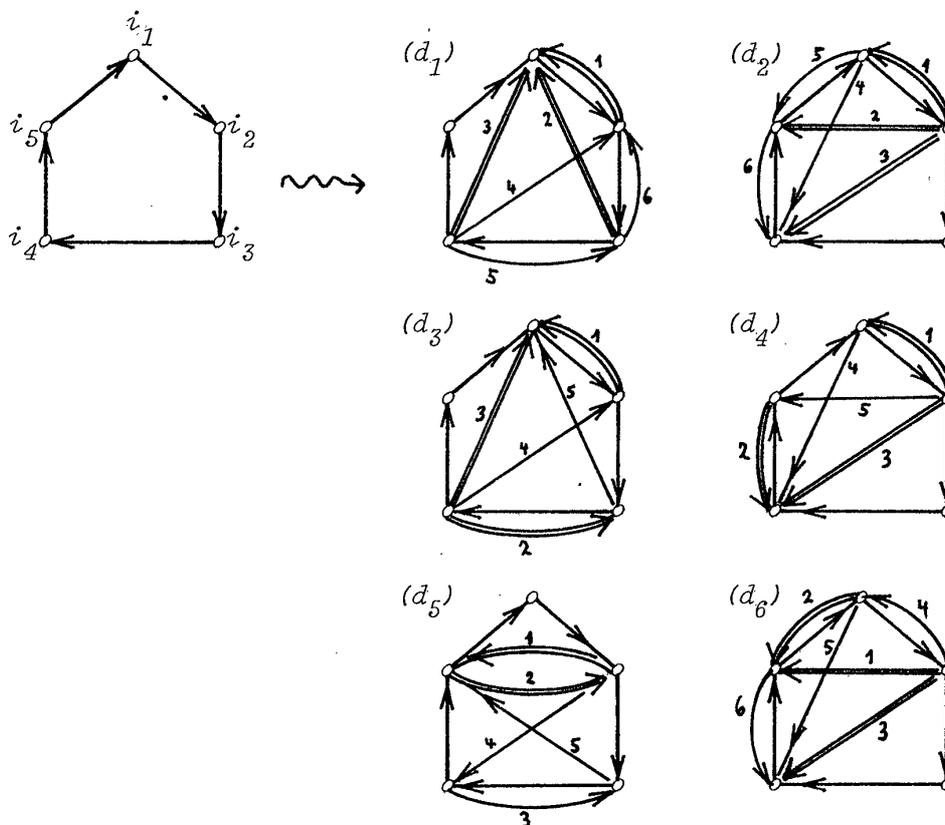
$$x_{i_1 i_2} + 2x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} \leq 2.$$

Bis auf Vertauschung der Reihenfolge ist dies die einzige Liftungsmöglichkeit. Diese Ungleichung ist also Facette von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 4$ .

(c)  $k = 4$ :



(d)  $k = 5$ :



□

Schon diese wenigen Beispiele zeigen, wie kompliziert allein die Liftungen der Primimplikanten von  $\tilde{p}$  sind, was ein Hinweis auf die komplexe Struktur der asymmetrischen Travelling Salesman Polytope ist.

Wie wir bereits wissen, hilft uns die Kenntnis der Primimplikanten von  $P_T^n$  kaum bei der Untersuchung der Facettialstruktur, das bedeutet, daß wir uns mit Spezialbeweisen "behelfen" müssen.

Die trivialen Ungleichungen  $x_{ij} \geq 0$  sind in den meisten Fällen Facetten von  $P_T^n$ .

$P_T^3$  hat zwei Eckpunkte, und zwar die Touren  $\langle 1,2,3 \rangle$  und  $\langle 1,3,2 \rangle$ . Jede Ungleichung  $x_{ij} \geq 0$  ist Facette, allerdings sind jeweils drei von diesen äquivalent, nämlich  $x_{13} \geq 0$ ,  $x_{32} \geq 0$ ,  $x_{21} \geq 0$  und  $x_{12} \geq 0$ ,  $x_{23} \geq 0$ ,  $x_{31} \geq 0$ .

$P_T^4$  enthält sechs Touren, die alle voneinander linear unabhängig sind. Wenn  $x_{ij} \geq 0$  eine Facette von  $P_T^4$  wäre, müßte es 5 linear unabhängige Touren geben, die  $(i,j)$  nicht enthalten. Zu jedem Bogen  $(i,j)$  gibt es jedoch nur 4 Touren, die  $(i,j)$  nicht enthalten. Folglich ist keine der Ungleichungen  $x_{ij} \geq 0$  eine Facette von  $P_T^4$ .

Für größere  $n$  gilt:

Satz 33.7.

Sei  $n \geq 5$ , dann ist für jeden Bogen  $(i,j) \in E$  die Ungleichung

$$x_{ij} \geq 0$$

Facette von  $P_T^n$ .

Beweis:

Wir müssen zeigen, daß es  $d_n := n^2 - 3n + 1$  Touren gibt, die den Bogen  $(i,j)$  nicht enthalten und deren Inzidenzvektoren affin (linear) unabhängig sind. Wir zeigen dies für den Bogen  $(n,n-1)$ .

Da nach Satz 32.2  $\dim P_T^{n-1} = d_{n-1} = n^2 - 5n + 5$  ist, gibt es  $d_{n-1} + 1$  linear unabhängige  $(n-1)$ -Touren. Ersetzen wir den Weg  $[i,n-1,j]$  in jeder dieser  $(n-1)$ -Touren durch den Weg  $[i,n-1,n,j]$ , so erhalten wir  $n^2 - 5n + 6$   $n$ -Touren, die  $(n,n-1)$  nicht enthalten und deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind. Keine dieser  $n$ -Touren enthält einen der Bögen  $(n-1,i)$ ,  $(i,n)$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ , nach Konstruktion.

Wir wählen nun  $n-2$  Touren, die  $(n-1,1)$  und jeweils einen der Bögen  $(i,n)$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ , enthalten. Sodann wählen wir  $n-3$  Touren, die  $(1,n)$  und einen der Bögen  $(n-1,i)$ ,  $i = 2, \dots, n-2$ , enthalten. Diese  $2n-5$  Touren können, falls  $n \geq 5$ , ohne Schwierigkeiten so angegeben werden, daß keine der Touren den Bogen  $(n,n-1)$  enthält. Da jede der neuen Touren einen Bogen enthält, den keine der bereits konstruierten  $d_{n-1} + 1$  Touren enthält, sind sie von diesen linear unabhängig. Daß die neuen  $2n-5$  Touren untereinander linear unabhängig sind, ist nach Konstruktion klar.

Somit haben wir  $n^2 - 5n + 6 + 2n - 5 = n^2 - 3n + 1 = d_n$  linear unabhängige Touren gefunden, die  $(n, n-1)$  nicht enthalten und deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind.  $\square$

Daß zwei verschiedene Ungleichungen dieses Typs zwei verschiedene Facetten definieren, ist unmittelbar einleuchtend.

Ist  $x_{ij} = 1$ , so folgt aus der Gültigkeit von  $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$  bezüglich  $P_T^n$ , daß  $x_{ji} = 0$  gelten muß. Folglich ist die Seitenfläche  $P_T^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_{ij} = 1\}$  enthalten in der Facette  $P_T^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_{ji} = 0\}$ . Da jedoch  $x_{ji} = 0$  nicht  $x_{ij} = 1$  impliziert, definiert keine der Ungleichungen  $x_{ij} \leq 1$  eine Facette von  $P_T^n$ .

### Kapitel 13. Liftungssätze für die asymmetrischen Travelling Salesman Polytope

Wie im symmetrischen Problem (siehe Kapitel 8) wollen wir nun versuchen, verschiedene allgemeine Verfahren zu finden, die explizit angeben, wie wir aus einer Ungleichung, die eine Facette eines  $n$ -Städte Polytopen definiert, durch geeignete Definition neuer Koeffizienten Ungleichungen ableiten können, die nicht nur gültig bezüglich eines  $(n+m)$ -Städte Polytopen sind, sondern sogar Facetten dieses Polytopen liefern. Diese Ergebnisse werden entscheidend dazu beitragen, Klassen von gültigen Ungleichungen als Facetten-definierend zu identifizieren.

#### § 34. Liftungssätze für $P_T^n$

Um ständige Wiederholungen zu vermeiden, möchten wir für diesen Paragraphen folgende Vereinbarungen treffen, wobei wir an die spezielle Definition von Cliques in Digraphen in § 2 erinnern wollen:

##### Bezeichnungen 34.0.

- (a)  $ax \leq a_0$  ist eine Facette von  $P_T^n$ ,  $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ .
- (b)  $(V_a, E_a)$  ist der von  $a$  induzierte Unterdigraph des vollständigen Digraphen  $K_n = (V, E)$ , d.h.  $E_a := \{(i, j) \in E \mid a_{ij} > 0\}$ ,  $V_a := \bigcup_{(i, j) \in E_a} \{i, j\}$ .
- (c)  $(W, C)$  bezeichnet immer eine maximale Clique in  $(V_a, E_a)$ .  
 $\hat{W} := \{w \in W \mid a_{iw} = a_{wi} = 0 \quad \forall i \in V - W \text{ und } a_{iw}, a_{wi} > 0 \quad \forall i \in W\}$ .
- (d)  $T_n := \{T \subseteq E \mid T \text{ Tour (Hamilton-Kreis) in } K_n\}$ .

$$(e) H_a := \{x \in P_T^n \mid ax = a_0\},$$

$$H := \{T \in T_n \mid ax^T = a_0\}.$$

(f) Das Gleichungssystem

$$a_i^+ x := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$a_i^- x := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{ji} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

kürzen wir durch  $Ax = 1$  ab. Einen Vektor  $\lambda \in \mathbb{R}^{2n}$  indizieren wir daher der Übersichtlichkeit halber manchmal mit  $(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_n^+, \lambda_1^-, \dots, \lambda_n^-)$ .

Wir werden in diesem Paragraphen so vorgehen, daß wir zunächst die Liftungssätze formulieren, die wir beweisen wollen. Daran anschließend werden eine Anzahl von Lemmata bewiesen, die unter einigen der Voraussetzungen der Liftungssätze richtig sind. Zum Schluß werden dann unter Zuhilfenahme der Lemmata die Beweise der Liftungssätze durchgeführt.

Satz 34.1.

Sei  $ax \leq a_0$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , eine Facette von  $P_T^n$ ,  $n \geq 5$ . Sei  $(W, C)$  eine maximale Clique von  $(V_\alpha, E_\alpha)$  mit

$$(a) |\overset{\circ}{W}| \geq 2,$$

$$(b) a_{ij} = \alpha \quad \forall (i, j) \in E_\alpha \text{ mit } |\{i, j\} \cap \overset{\circ}{W}| \geq 1,$$

$$(c) a_{ij} \geq \alpha \quad \forall (i, j) \in E_\alpha \text{ mit } i, j \in W - \overset{\circ}{W}.$$

Sei  $a'x' \leq a'_0$  definiert durch

$$a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ \alpha & i \in W, j = n+1, \\ \alpha & i = n+1, j \in W, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$a'_0 := a_0 + \alpha.$$

Dann ist  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $P_T^{n+1}$ .

Satz 34.2.

Sei  $\alpha \leq \alpha_0$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , eine Facette von  $P_T^n$ ,  $n \geq 4$ . Sei  $(W, C)$  eine maximale Clique von  $(V_\alpha, E_\alpha)$  mit

(a)  $|\overset{\circ}{W}| = 1$  (sei  $W := \{w\}$ ).

(b)  $a_{iw} = a_{wi} = \alpha \quad \forall i \in W - \{w\}$ .

(c)  $a_{ij} \geq \alpha \quad \forall (i, j) \in E_\alpha$  mit  $i, j \in W - \{w\}$ .

(d)  $|V - W| \geq 2$ .

(e) Es existieren Knoten  $u \in W - \{w\}$  und  $j \in V - W$  mit  $(u, j) \notin E_\alpha$ .

(f) Es existieren Knoten  $u \in W - \{w\}$  und  $j \in V - W$  mit  $(j, u) \notin E_\alpha$ .

(g) Es existiert ein Knoten  $v \in W - \{w\}$  mit

$a_{vi} = a_{jv} = \alpha$  für alle  $i, j \in V$  mit  $(v, i), (j, v) \in E_\alpha$ ,  
und sei für einen dieser Knoten  $v \in W - \{w\}$  eine der folgenden  
Eigenschaften erfüllt:

(g<sub>1</sub>)  $(j, v), (v, i) \in E_\alpha, j \neq w \neq i, i \neq j \implies a_{ji} \geq \alpha$ .

(g<sub>2</sub>) Zu jedem  $i \in V - \{v, w\}$  existiert eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[v, w, i]$  enthält, und eine Tour  $S \in H$ , die den Weg  $[i, w, v]$  enthält.

Sei  $a'x' \leq \alpha'_0$  definiert durch

$$a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ \alpha & i \in W, j = n+1, \\ \alpha & i = n+1, j \in W, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$\alpha'_0 := \alpha_0 + \alpha$ .

Dann ist  $a'x' \leq \alpha'_0$  eine Facette von  $P_T^{n+1}$ .

Zum Beweis der vorhergehenden Sätze benötigen wir die folgenden Hilfsaussagen.

Lemma 34.3.

Seien die Voraussetzungen von Satz 34.1 (a), (b) bzw. die Voraussetzungen von Satz 34.2 (a), (b), (d), (e) erfüllt. Dann gibt es zu jedem Knoten  $w \in \overset{\circ}{W}$  und jedem Knoten  $i \in V - \overset{\circ}{W}$  eine Tour  $T \in H$ , die den Bogen  $(w, i)$  enthält.

Beweis:

Da für alle Bögen  $(i, j) \in E$  die Ungleichung  $x_{ij} \geq 0$  nach Satz 33.7 eine Facette von  $P_T^n$  ist, kann es höchstens einen Bogen  $(i, j)$  geben, der in keiner der Touren  $T \in H$  enthalten ist, andernfalls wäre  $H_\alpha$  im Durchschnitt von zwei verschiedenen Facetten enthalten, also keine Facette.

Angenommen es gibt Knoten  $w \in \overset{0}{W}$ ,  $i_0 \in V-\overset{0}{W}$ , so daß der Bogen  $(w, i_0)$  in keiner Tour  $T \in H$  enthalten ist. Somit erfüllt für jede Tour  $T \in H$  der Inzidenzvektor  $x^T$  die Gleichung

$$bx := x_{wi_0} = 0.$$

Da  $ax \leq a_0$  eine Facette von  $P_T^n$ ,  $P_T^n \setminus \{x \mid bx = 0\}$  und  $P_T^n \subset \{x \mid Ax = 1\}$  ist, gibt es nach Satz 4.4 (d)  $\lambda \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b = \lambda A + \pi a.$$

Nach Lemma 27.2 (b) hat  $A$  den Rang  $2n-1$ , daher können wir sogar eine der Komponenten von  $\lambda$  frei wählen. Wir setzen

$$\lambda_w^+ := 0.$$

Aus der Struktur von  $A$  und der Kenntnis von  $b$  erhalten wir

$$(1) \lambda_w^+ + \lambda_{i_0}^- + \pi a_{wi_0} = 1,$$

$$(2) \lambda_i^+ + \lambda_j^- + \pi a_{ij} = 0 \quad , \quad \text{falls } (i,j) \in E_a,$$

$$(3) \lambda_i^+ + \lambda_j^- = 0 \quad , \quad \text{falls } (i,j) \notin E_a.$$

Daraus folgt, da  $w \in \overset{0}{W}$  und  $a_{wi} = \alpha \quad \forall i \in W$  und  $a_{wi} = 0$  sonst,

$$(4) \lambda_{i_0}^- = 1 - \pi \alpha \quad , \quad \text{falls } i_0 \in \overset{0}{W}-W,$$

$$(4') \lambda_{i_0}^- = 1 \quad , \quad \text{falls } i_0 \in V-W,$$

$$(5) \lambda_i^- = -\pi \alpha \quad \text{für alle } i \in W - \{i_0, w\},$$

$$(6) \lambda_i^- = 0 \quad \text{für alle } i \in V - (W \cup \{i_0\}).$$

1. Fall:  $i_0 \in V-W$ , d.h.  $\lambda_{i_0}^- = 1$ .

a) Seien die Bedingungen (a), (b) von Satz 34.1 erfüllt, speziell gilt also  $|\overset{0}{W}| \geq 2$ . Sei  $u \in \overset{0}{W} - \{w\}$ , dann ist  $(u, i)$ ,  $(i, u) \notin E_a$  für alle  $i \in V-W$ , und es gilt  $a_{uw} = \alpha$ . Es folgt mit (2), (3), (4'), (5), (6):

$$0 = \lambda_u^+ + \lambda_{i_0}^- = \lambda_u^+ + 1 \quad \implies \lambda_u^+ = -1,$$

$$0 = \lambda_u^+ + \lambda_w^- + \pi \alpha = \lambda_w^- - 1 + \pi \alpha \quad \implies \lambda_w^- = 1 - \pi \alpha,$$

$$0 = \lambda_{i_0}^+ + \lambda_u^- = \lambda_{i_0}^+ - \pi \alpha \quad \implies \lambda_{i_0}^+ = \pi \alpha,$$

und damit

$$0 = \lambda_{i_0}^+ + \lambda_w^- = \pi \alpha + 1 - \pi \alpha = 1. \quad \text{Widerspruch!}$$

b) Seien die Bedingungen (a), (b), (d) und (e) von Satz 34.2 erfüllt. Nach 34.2 (e) existieren Knoten  $u \in W - \{w\}$  und  $i_1 \in V-W$  mit  $(u, i_1) \notin E_a$ .

b<sub>1</sub>)  $i_1 = i_0$ . Wie unter a) folgt  $\lambda_u^+ = -1$ ,  $\lambda_w^- = 1 - \pi \alpha$ . Nach 34.2 (d) ist  $|V-W| \geq 2$ , sei  $j \in V - (W \cup \{i_0\})$ . Da  $a_{jw} = 0$ , gilt:

$$0 = \lambda_j^+ + \lambda_w^- = \lambda_j^+ + 1 - \pi\alpha \quad \implies \quad \lambda_j^+ = -1 + \pi\alpha,$$

und somit

$$0 = \lambda_j^+ + \lambda_{i_0}^- + \pi a_{ji_0} = -1 + \pi\alpha + 1 + \pi a_{ji_0} = \pi(\alpha + a_{ji_0}).$$

Da  $\pi \neq 0$ ,  $\alpha > 0$  muß  $a_{ji_0} = -\alpha$  sein, damit die Gleichung erfüllt ist.  
Widerspruch zu  $a_{ji_0} \geq 0$ !

b<sub>2</sub>)  $i_1 \neq i_0$ . Es ist nach (3) und (6)  $0 = \lambda_u^+ + \lambda_{i_1}^- = \lambda_u^+$ , also

$$0 = \lambda_u^+ + \lambda_w^- + \pi\alpha = \lambda_w^- + \pi\alpha \implies \lambda_w^- = -\pi\alpha.$$

Für  $i_0 \in V-W$  folgt wegen  $(i_0, w) \notin E_a$  aus (3):

$$0 = \lambda_{i_0}^+ + \lambda_w^- = \lambda_{i_0}^+ - \pi\alpha, \text{ d.h. } \lambda_{i_0}^+ = \pi\alpha.$$

Nach 34.2 (d) ist  $|V-W| \geq 2$ ; sei  $j \in V-(W \cup \{i_0\})$ , dann gilt mit (6)

$$0 = \lambda_{i_0}^+ + \lambda_j^- + \pi a_{i_0j} = \pi\alpha + \pi a_{i_0j} = \pi(\alpha + a_{i_0j}).$$

Da  $\pi \neq 0$ ,  $\alpha > 0$  muß  $a_{i_0j} = -\alpha$  gelten. Widerspruch zu  $a_{i_0j} \geq 0$ !

2. Fall:  $i_0 \in W-\overset{o}{W}$ , d.h.  $\lambda_{i_0}^- = 1 - \pi\alpha$  nach (4).

c) Seien (a), (b) von Satz 34.1 erfüllt. Sei  $u \in \overset{o}{W}-\{w\}$ , also  $a_{ui_0} = \alpha$ .

Es folgt aus (2):

$$0 = \lambda_u^+ + \lambda_{i_0}^- + \pi\alpha = \lambda_u^+ + 1 - \pi\alpha + \pi\alpha \implies \lambda_u^+ = -1.$$

Sei  $i \in V-W$  (offensichtlich muß  $V-W \neq \emptyset$  sein), dann gilt wegen  $(u, i) \notin E_a$  nach (3) und (6):

$$0 = \lambda_u^+ + \lambda_i^- = -1. \quad \text{Widerspruch!}$$

d) Seien (a), (b), (d) und (e) von Satz 34.2 erfüllt.

Nach 34.2 (e) existieren Knoten  $u \in \overset{o}{W}-\{w\}$ ,  $i_1 \in V-W$  mit  $(u, i_1) \notin E_a$ .

Mit (3), (6) und (2) folgt

$$0 = \lambda_u^+ + \lambda_{i_1}^- = \lambda_u^+,$$

$$0 = \lambda_u^+ + \lambda_w^- + \pi\alpha \implies \lambda_w^- = -\pi\alpha.$$

Da  $i_1 \in V-W$ , ist  $(i_1, w) \notin E_a$ , (3) ergibt:

$$0 = \lambda_{i_1}^+ + \lambda_w^- = \lambda_{i_1}^+ - \pi\alpha \implies \lambda_{i_1}^+ = \pi\alpha.$$

Nach 34.2 (d) ist  $|V-W| \geq 2$ ; sei  $j \in V-(W \cup \{i_1\})$ , dann gilt mit (6)

$$0 = \lambda_{i_1}^+ + \lambda_j^- + \pi a_{i_1j} = \pi\alpha + \pi a_{i_1j} = \pi(\alpha + a_{i_1j}).$$

Wegen  $\pi \neq 0$ ,  $\alpha > 0$  folgt  $a_{i_1j} = -\alpha$ . Widerspruch!  $\square$

Lemma 34.4.

Seien die Voraussetzungen (a), (b) von Satz 34.1 bzw. die Voraussetzungen (a), (b), (d), (f) von Satz 34.2 erfüllt. Dann gibt es zu jedem Knoten  $w \in \overset{\circ}{W}$  und jedem Knoten  $i \in V - \overset{\circ}{W}$  eine Tour  $T \in H$ , die den Bogen  $(i, w)$  enthält.

Beweis:

Analog zu Lemma 31.3.  $\square$

Lemma 34.5.

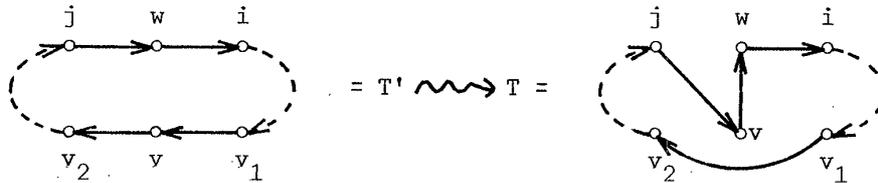
Seien die Voraussetzungen (a), (b), (c) von Satz 34.1 erfüllt. Dann gibt es zu je zwei Knoten  $v, w \in \overset{\circ}{W}$  und jedem Knoten  $i \in V - \overset{\circ}{W}$  eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[v, w, i]$  enthält, und eine Tour  $S \in H$ , die den Weg  $[i, w, v]$  enthält.

Beweis:

Seien  $v, w \in \overset{\circ}{W}$  und  $i \in V - \overset{\circ}{W}$  beliebig.

a) Nach Lemma 34.3 gibt es eine Tour  $T' \in H$ , die den Bogen  $(w, i)$  enthält.

Sei  $T'$  o.B.d.A. wie folgt gegeben.



Wird  $T$  aus  $T'$  wie dargestellt konstruiert, so ist

$$ax^T - ax^{T'} = a_{vw} + a_{jv} + a_{v_1v_2} - a_{jw} - a_{v_1v} - a_{vv_2} \geq 0,$$

denn es gilt:  $a_{vw} = \alpha; a_{jv} = a_{jw}$ ; und sind  $a_{v_1v} = \alpha$  und  $a_{vv_2} = \alpha$ , dann gilt

(wegen  $v \in \overset{\circ}{W}$ )  $v_1, v_2 \in \overset{\circ}{W}$ , aus (b) und (c) folgt  $a_{v_1v_2} \geq \alpha$ . Da  $ax \leq a_0$  gültig

bezüglich  $P_T^n$  ist, gilt  $ax^T - ax^{T'} = 0$ , also  $ax^T = a_0$ , somit ist  $T \in H$ .

b) Nach Lemma 34.4 gibt es eine Tour  $S' \in H$ , die  $(i, w)$  enthält. Die Konstruktion von  $S$  geschieht analog zu a).  $\square$

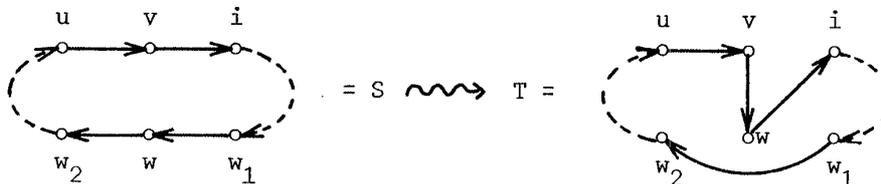
Lemma 34.6.

Seien die Voraussetzungen (a), (b), (c) von Satz 34.1 erfüllt. Sei  $|\overset{\circ}{W}| \geq 3$ , dann gibt es zu je drei Knoten  $u, v, w \in \overset{\circ}{W}$  eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[u, v, w]$  enthält.

Beweis:

Seien  $u, v, w \in \overset{\circ}{W}$  beliebig. Sei  $i \in V - \overset{\circ}{W}$ , dann gibt es nach Lemma 34.5 eine Tour  $S \in H$ , die den Weg  $[u, v, i]$  enthält.

Wir konstruieren T aus S wie folgt



Aus  $a_{vi} = a_{wi}$ ,  $a_{vw} = \alpha$  und  $(a_{w_1w} = a_{ww_2} = \alpha \implies a_{w_1w_2} \geq \alpha)$  folgt  $ax^T - ax^S \geq 0$ , damit ist  $T \in H$ .  $\square$

Lemma 34.7.

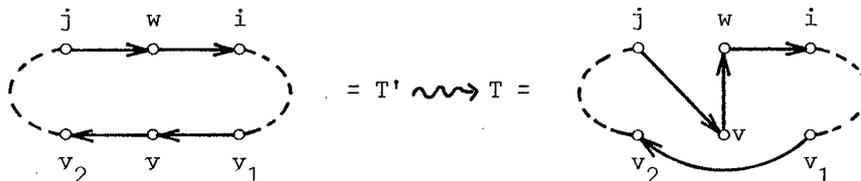
Seien die Voraussetzungen (a) - (g) und  $(g_1)$  von Satz 34.2 erfüllt.

Sei  $W = \{w\}$ , und  $v \in W - \{w\}$  sei ein Knoten, der (g),  $(g_1)$  erfüllt. Dann gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - \{v, w\}$  eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[v, w, i]$  enthält, und eine Tour  $S \in H$ , die den Weg  $[i, w, v]$  enthält, d.h.  $v$  erfüllt die Bedingung  $(g_2)$  von Satz 34.2.

Beweis:

Sei  $i \in V - \{v, w\}$  beliebig.

a) Nach Lemma 34.3 gibt es eine Tour  $T' \in H$ , die  $(w, i)$  enthält. Sei  $T'$  wie folgt gegeben und  $T$  wie dargestellt definiert:



Falls  $a_{jw} = \alpha$ , dann ist  $j \in W$ , d.h.  $(j, v) \in E_a$  und somit nach (g)  $a_{jv} = \alpha$ .

Falls  $(v_1, v), (v, v_2) \in E_a$ , dann ist nach (g)  $a_{v_1v} = a_{vv_2} = \alpha$  und nach  $(g_1)$

$a_{v_1v_2} \geq \alpha$ . Nach (b) ist  $a_{vw} = \alpha$ , also folgt:

$$ax^T - ax^{T'} = a_{jv} + a_{vw} + a_{v_1v_2} - a_{jw} - a_{v_1v} - a_{vv_2} \geq 0,$$

d.h.  $ax^T = a_0$  und somit  $T \in H$ .

b) Die gesuchte Tour  $S \in H$  konstruieren wir analog zu a) mit Hilfe von Lemma 34.4.  $\square$

Mit Hilfe der vorhergehenden Hilfssätze sind wir nun in der Lage, die beiden Liftungssätze zu beweisen.

Beweis von Satz 34.1.

a)  $a'x' \leq a'_0$  ist offensichtlich eine gültige Ungleichung für  $P_T^{n+1}$ .

Sei  $K_{n+1} = (V', E')$  der vollständige Digraph mit  $n+1$  Knoten.

Sei  $H'_a := \{x' \in P_T^{n+1} \mid a'x' = a'_0\}$ ,  $H' := \{T \in T_{n+1} \mid x^T \in H'_a\}$  und  $A'$  die in 34.0 (f) definierte Matrix bezüglich  $n+1$  Knoten.

Sei  $c'x' \leq a'_0$  eine beliebige Hyperebene, die  $H'_a$  enthält.

Seien  $v, w$  beliebige Knoten aus  $\overset{0}{W}$ , und sei

$$(1) \quad b'_{i,n+1} := b'_{n+1,i} := \alpha \quad \text{für alle } i \in W,$$

$$(2) \quad b'_{i,n+1} := b'_{n+1,i} := 0 \quad \text{für alle } i \in V-W,$$

$$(3) \quad b'_{vw} := \alpha,$$

dann gibt es nach Satz 27.2 (c) einen Vektor  $\lambda \in \mathbb{R}^{2n+2}$ , so daß  $b' := c' + \lambda A'$  die in (1), (2), (3) festgelegten Komponenten besitzt.

Sei  $b'_0 := c'_0 + \sum_{j=1}^{n+1} (\lambda_j^+ + \lambda_j^-)$ , dann gilt offenbar  $H'_a \subset \{x' \mid b'x' = b'_0\}$ .

Wir werden zeigen, daß es  $\gamma \in \mathbb{R}^{2n+2}$  und  $\pi \in \mathbb{R}$  gibt, so daß  $b' = \gamma A' + \pi a'$  gilt.

Wegen  $c' = (\gamma - \lambda)A' + \pi a'$  sind wir dann mit Satz 4.4 fertig.

Zunächst versuchen wir, so weit wie möglich weitere Komponenten von  $b'$  zu berechnen.

b) Zu jedem Knoten  $i \in V - \{v, w\}$  existiert nach Lemma 34.5 bzw. 34.6 eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[v, w, i]$  enthält. Ersetzen wir den Weg  $[v, w, i]$  durch den Weg  $[v, n+1, w, i]$  bzw. den Weg  $[v, w, n+1, i]$ , so sind die auf diese Weise definierten  $(n+1)$ -Touren  $T'$  und  $T''$  offensichtlich aus  $H'$ , und damit gilt nach Annahme  $b'x^{T'} = b'x^{T''} = b'_0$ . Es folgt mit (1), (2), (3):

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{wi} + b'_{v,n+1} + b'_{n+1,w} - b'_{vw} - b'_{w,n+1} - b'_{n+1,i} = b'_{wi} - b'_{n+1,i}.$$

Damit gilt

$$(4) \quad b'_{wi} = \alpha \quad \text{für alle } i \in W - \{v\},$$

$$(5) \quad b'_{wi} = 0 \quad \text{für alle } i \in V - W.$$

c) Zu jedem Knoten  $i \in V - \{v, w\}$  existiert nach Lemma 34.5 bzw. 34.6 eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[i, v, w]$  enthält. Diesen Weg ersetzen wir durch  $[i, v, n+1, w]$  bzw.  $[i, n+1, v, w]$  und erhalten Touren  $T', T'' \in H'$ . Mithin ergibt (1), (2), (3):

$$\begin{aligned} 0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} &= b'_{iv} + b'_{v,n+1} + b'_{n+1,w} - b'_{i,n+1} - b'_{n+1,w} - b'_{vw} \\ &= b'_{iv} - b'_{i,n+1}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$(6) \quad b'_{iv} = \alpha \quad \forall i \in W - \{w\},$$

$$(7) \quad b'_{iv} = 0 \quad \forall i \in V - W.$$

d) Sei  $i \in V - \{v, w\}$  beliebig, dann gibt es nach Lemma 34.5 bzw. 34.6 in  $K_n$  eine Tour  $T \in H$ , die  $[i, w, v]$  enthält. Sei  $j$  der Nachfolger von  $v$  in  $T$ . Ersetzen wir den Weg  $[i, w, v, j]$  in  $T$  durch  $[i, v, w, j]$ , so ist die neue Tour  $S$  wegen  $a'_{iv} = a'_{iw}$ ,  $a'_{vw} = a'_{wv}$ ,  $a'_{wj} = a'_{vj}$  ebenfalls aus  $H$ .

In  $T$  ersetzen wir den Weg  $[i, w, v, j]$  durch  $[i, w, n+1, v, j]$  bzw.  $[i, n+1, w, v, j]$  bzw.  $[i, w, v, n+1, j]$  und erhalten so drei  $(n+1)$ -Touren  $T'$ ,  $T''$ ,  $T'''$ . Diese sind offensichtlich aus  $H'$ .

Ersetzen wir in  $S \in H$  den Weg  $[i, v, w, j]$  durch  $[i, v, n+1, w, j]$ , so ist die neue  $(n+1)$ -Tour  $S'$  ebenfalls aus  $H'$ .

Nach Annahme erfüllen also diese vier  $(n+1)$ -Touren die Gleichung  $b'x' = b'_0$ . Wir erhalten mit (1) - (7):

$$\begin{aligned} 0 = b'x^{S'} - b'x^{T'} &= b'_{iv} + b'_{v,n+1} + b'_{n+1,w} + b'_{wj} - b'_{iw} - b'_{w,n+1} - b'_{n+1,v} - b'_{vj} \\ &= -b'_{iw} - b'_{vj} + b'_{iv} + b'_{wj}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} &= b'_{iw} + b'_{w,n+1} + b'_{n+1,v} - b'_{i,n+1} - b'_{n+1,w} - b'_{wv} \\ &= b'_{iw} - b'_{wv} - b'_{i,n+1} + \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = b'x^{T'} - b'x^{T'''} &= b'_{w,n+1} + b'_{n+1,v} + b'_{vj} - b'_{wv} - b'_{v,n+1} - b'_{n+1,j} \\ &= b'_{vj} - b'_{wv} - b'_{n+1,j} + \alpha. \end{aligned}$$

Die Größen  $b'_{n+1,j} = b'_{wj}$ ,  $b'_{iv} = b'_{i,n+1}$  sind bereits aus (1) - (7) bekannt; wir erhalten damit folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b'_{iw} + b'_{vj} &= b'_{iv} + b'_{wj} \\ -b'_{iw} + b'_{wv} &= -b'_{i,n+1} + \alpha \\ -b'_{vj} + b'_{wv} &= -b'_{n+1,j} + \alpha. \end{aligned}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung dieses Systems ist:  $b'_{vj} = b'_{wj}$ ,  $b'_{iv} = b'_{i,n+1}$  und

$$(8) \quad b'_{wv} = \alpha.$$

e) Sei  $b \in \mathbb{R}^{|E|}$  definiert durch  $b_{ij} := b'_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , und sei  $b_0 := b'_0 - \alpha$ .

Sei  $T \in H$ , dann enthält die Tour  $T$  einen Bogen  $(w, i)$ ; ersetzen wir diesen durch den Weg  $[w, n+1, i]$ , dann ist die so definierte  $(n+1)$ -Tour  $T'$  aufgrund der Definition von  $a'$  aus  $H'$ . Es ist nach (1), (2), (4), (5), (8)

$b'_{n+1,i} = b'_{wi} = b_{wi}$ , also folgt mit (1)

$b'x^T - bx^T = b'_{w,n+1} + b'_{n+1,i} - b_{wi} = \alpha$ . Daraus ergibt sich:

$$H_a \subset \{x \mid bx = b_0\}.$$

Da  $ax \leq a_0$  nach Voraussetzung eine Facette von  $P_T^n$  ist, gibt es nach Satz 4.4  $\beta \in \mathbb{R}^{2n}$  und  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b = \beta A + \pi a$$

$$b_0 = \sum_{i=1}^n (\beta_j^+ + \beta_j^-) + \pi a_0.$$

Da nach Satz 27.2 (b) der Rang von  $A$   $2n-1$  ist, können wir eine der Komponenten von  $\beta$  beliebig wählen. Sei

$$\beta_w^+ := 0.$$

Aus der Kenntnis von  $A$  können wir ableiten

$$(9) \beta_i^+ + \beta_j^- + \pi a_{ij} = b_{ij} \quad , \quad \text{falls } (i,j) \in E_a,$$

$$(10) \beta_i^+ + \beta_j^- = b_{ij} \quad , \quad \text{falls } (i,j) \notin E_a.$$

Aufgrund der vorhergehenden Berechnungen und der Definition von  $b$  gilt:

$a_{wi} = b_{wi} = \alpha$  für alle  $i \in W - \{w\}$ ,  $a_{wi} = b_{wi} = 0$  für alle  $i \in V - W$ ,

somit folgt aus (9) und (10):

$$\beta_i^- = \alpha - \pi a \quad \text{für alle } i \in W - \{w\},$$

$$\beta_i^- = 0 \quad \text{für alle } i \in V - W.$$

Da nach (6) und (7)  $a_{iv} = b_{iv} = \alpha$  für alle  $i \in W - \{v\}$ ,  $a_{iv} = b_{iv} = 0$  für alle  $i \in V - W$  folgt mit  $\beta_v^- = \alpha - \pi a$

$$\beta_i^+ = 0 \quad \text{für alle } i \in W - \{v\},$$

$$\beta_i^+ = \pi a - \alpha \quad \text{für alle } i \in V - W.$$

Desgleichen folgt:

$$\beta_w^- = \alpha - \pi a,$$

$$\beta_v^+ = 0.$$

f) Wir definieren nun  $\gamma \in \mathbb{R}^{2n+2}$  durch

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i^+ &:= \beta_i^+ \\ \gamma_i^- &:= \beta_i^- \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\gamma_{n+1}^+ := 0,$$

$$\gamma_{n+1}^- := \alpha - \pi a$$

und partitionieren  $A'$  wie folgt:

$$A' = \begin{pmatrix} A & I \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix},$$

wobei die beiden letzten Zeilen den Gleichungen  $\sum_{i=1}^n x_{n+1,i} = 1, \sum_{i=1}^n x_{i,n+1} = 1$  entsprechen sollen. Ordnen wir die Knoten aus  $V$  so, daß  $V-W = \{1, \dots, k\}$ ,  $W = \{k+1, \dots, n\}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \gamma A' + \pi a' &= \gamma \begin{pmatrix} A & I \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix} + \pi (a | 0, \dots, 0 | \alpha, \dots, \alpha | 0, \dots, 0 | \alpha, \dots, \alpha) \\ &= (BA | (\gamma_{n+1}^+ + \gamma_i^-)_{i=1, \dots, k} | (\gamma_{n+1}^+ + \gamma_i^-)_{i=k+1, \dots, n} | \\ &\quad (\gamma_i^+ + \gamma_{n+1}^-)_{i=1, \dots, k} | (\gamma_i^+ + \gamma_{n+1}^-)_{i=k+1, \dots, n}) \\ &\quad + (\pi a | 0, \dots, 0 | \pi \alpha, \dots, \pi \alpha | 0, \dots, 0 | \pi \alpha, \dots, \pi \alpha) \\ &= (BA | 0, \dots, 0 | \alpha - \pi \alpha, \dots, \alpha - \pi \alpha | 0, \dots, 0 | \alpha - \pi \alpha, \dots, \alpha - \pi \alpha) \\ &\quad + (\pi a | 0, \dots, 0 | \pi \alpha, \dots, \pi \alpha | 0, \dots, 0 | \pi \alpha, \dots, \pi \alpha) \\ &= (b | 0, \dots, 0 | \alpha, \dots, \alpha | 0, \dots, 0 | \alpha, \dots, \alpha) \\ &= b', \end{aligned}$$

was zu zeigen war.  $\square$

Auf ähnliche Weise führen wir den

Beweis von Satz 34.2.

Aufgrund von Lemma 34.7 erfüllt jeder Knoten  $v \in W - \{w\}$  mit den in  $(g)$  und  $(g_1)$  geforderten Eigenschaften auch die Anforderungen von  $(g_2)$ , wir können uns also auf die Betrachtung von  $(g_2)$  beschränken.

a)  $w$  sei der Knoten aus  $V$  mit  $\overset{0}{W} = \{w\}$ ,  $v$  sei ein Knoten aus  $W - \{w\}$ , der  $(g)$  und  $(g_2)$  erfüllt. Alle weiteren Definitionen und Vereinbarungen seien wie im Beweis von Satz 34.1 Teil a) getroffen.

b) Nach  $(g_2)$  gibt es zu jedem Knoten  $i \in V - \{v, w\}$  eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[v, w, i]$  enthält. Wie im Beweis von 34.1 Teil b) folgt

$$(4) \quad b'_{wi} = \alpha \quad \text{für alle } i \in W - \{v\},$$

$$(5) \quad b'_{wi} = 0 \quad \text{für alle } i \in V - W.$$

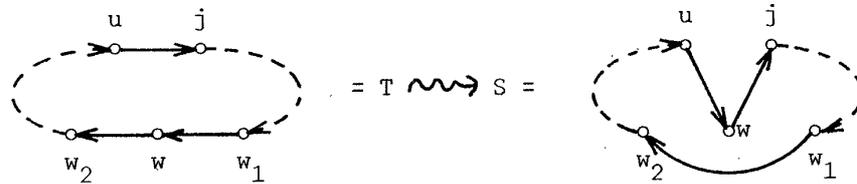
c) Wir wollen zeigen, daß  $b'_{wv} = \alpha$  gilt und müssen dazu mehrere Fälle untersuchen.

Nach (e) und (f) gibt es zwei Bögen, deren Anfangs- bzw. Endknoten in  $W - \{w\}$

liegt, die aber nicht in der Bogenmenge  $E_a$  sind. Folglich muß es zu mindestens einem dieser Bögen eine Tour  $T \in H$  geben, die diesen Bogen enthält, andernfalls könnte  $ax \leq a_o$  nach Satz 33.7 keine Facette sein. Also muß einer der vier folgenden Fälle eintreten

Fall 1: Es gibt eine Tour  $T \in H$ , die einen Bogen  $(u,j)$  enthält mit  $u \in W - \{w,v\}$ ,  $j \in V - W$  und  $(u,j) \notin E_a$ , d.h.  $a_{uj} = 0$ .

Sei  $T$  o.B.d.A. wie folgt gegeben und  $S$  wie angegeben aus  $T$  konstruiert:



Es ist nach Annahme  $a_{uj} = 0$  und nach Voraussetzung (a), (b)  $a_{uw} = \alpha$ ,  $a_{wj} = 0$ . Falls  $a_{w_1w} = a_{ww_2} = \alpha$ , d.h.  $w_1, w_2 \in W$ , dann ist nach Bedingung (c)  $a_{w_1w_2} \geq \alpha$ . Mithin ist  $ax^S - ax^T \geq 0$  und somit  $S \in H$ .

Ersetzen wir in  $S$  den Weg  $[u,w,j]$  durch  $[u,w,n+1,j]$  bzw.  $[u,n+1,w,j]$ , dann sind die so konstruierten  $(n+1)$ -Touren  $S'$  und  $S''$  nach Definition von  $a'$  aus  $H'$ , und es gilt nach Annahme sowie (1), (2), (5):

$$0 = b'x^{S'} - b'x^{S''} = b'_{uw} + b'_{w,n+1} + b'_{n+1,j} - b'_{u,n+1} - b'_{n+1,w} - b'_{wj} = b'_{uw} - \alpha.$$

Nach  $(g_2)$  gibt es eine Tour  $R \in H$ , die den Weg  $[u,w,v]$  enthält. Ersetzen wir  $[u,w,v]$  durch  $[u,n+1,w,v]$  bzw.  $[u,w,n+1,v]$ , so sind diese  $(n+1)$ -Touren  $R', R''$  aus  $H'$ , und es folgt mit (1) und  $b'_{uw} = \alpha$ :

$$0 = b'x^{R'} - b'x^{R''} = b'_{u,n+1} + b'_{n+1,w} + b'_{wv} - b'_{uw} - b'_{w,n+1} - b'_{n+1,v} = b'_{wv} - \alpha,$$

also: 
$$b'_{wv} = \alpha.$$

Fall 2: Es gibt eine Tour  $T \in H$ , die einen Bogen  $(j,u)$  enthält mit  $u \in W - \{v,w\}$ ,  $j \in V - W$ ,  $(j,u) \notin E_a$ , d.h.  $a_{ju} = 0$ .

Wie im Fall 1 (Vertauschen der Rollen von  $j$  und  $u$ ) konstruieren wir eine Tour  $S \in H$ , die den Weg  $[j,w,u]$  enthält.

Analog zu  $b'_{uw} = \alpha$  folgt hier mit (1), (2), (4)  $b'_{jw} = 0$ .

Nach  $(g_2)$  gibt es eine Tour  $R \in H$ , die den Weg  $[j,w,v]$  enthält. Wie in Fall 1 folgern wir:  $b'_{wv} = \alpha$ .

Fall 3: Es gibt eine Tour  $T \in H$ , die einen Bogen  $(v,j)$  enthält mit  $(v,j) \notin E_a$ .  $T$  enthält einen Weg  $[w',w,w'']$ .

3.1)  $w'' \nmid v$ . Ersetze in  $T$  den Weg  $[w', w, w'']$  durch  $[w', n+1, w, w'']$  bzw.  $[w', w, n+1, w'']$ , dann sind diese neuen  $(n+1)$ -Touren  $T', T''$  aus  $H'$ , und es gilt mit (1), (2), (4) bzw. (5):

$$\begin{aligned} 0 = b'x^{T''} - b'x^{T'} &= b'_{w',w} + b'_{w,n+1} + b'_{n+1,w''} - b'_{w',n+1} - b'_{n+1,w} - b'_{ww''} \\ &= b'_{w',w} - b'_{w',n+1}. \end{aligned}$$

Nach Bedingung  $(g_2)$  gibt es eine Tour  $S \in H$ , die  $[w', w, v]$  enthält. Ersetzen wir in  $S$  den Weg  $[w', w, v]$  durch  $[w', n+1, w, v]$  bzw.  $[w', w, n+1, v]$ , so sind  $S'$  und  $S''$  offensichtlich aus  $H'$ , d.h.

$$\begin{aligned} 0 = b'x^{S'} - b'x^{S''} &= b'_{w',n+1} + b'_{n+1,w} + b'_{wv} - b'_{w',w} - b'_{w,n+1} - b'_{n+1,v} \\ &= b'_{wv} - \alpha, \end{aligned}$$

also:  $b'_{wv} = \alpha.$

3.2)  $w'' = v$ . Wir ersetzen in  $T$  den Weg  $[w', w, v, j]$  durch  $[w', v, w, j]$  und erhalten eine Tour  $S$ . Wegen  $a_{vj} = a_{wj} = 0$ ,  $a_{wv} = a_{vw} = \alpha$ ,  $a_{w'w} \leq a_{w'v}$  (nach (c)), folgt  $S \in H$ . Speziell folgt, da  $ax \leq a_o$  eine gültige Ungleichung ist:  $a_{w'w} = a_{w'v}$ .

Ersetzen wir in  $S$  den Weg  $[w', v, w, j]$  durch  $[w', v, n+1, w, j]$  bzw.  $[w', n+1, v, w, j]$ , so erhalten wir  $(n+1)$ -Touren  $S', S'' \in H'$ .

Mit dem üblichen Verfahren schließen wir:  $b'_{w'v} = b'_{w',n+1}$ .

Ersetzen wir nun in  $T$  den Weg  $[w', w, v, j]$  durch  $[w', w, n+1, v, j]$  bzw.  $[w', n+1, w, v, j]$  bzw.  $[w', w, v, n+1, j]$ , so erhalten wir Touren  $T', T'', T'''$  aus  $H'$ . Analog zum Beweis von Satz 31.1 Teil d) können wir mit Hilfe der Touren  $T', T'', T''', S'$  durch Lösen eines Gleichungssystems in den Unbekannten  $b'_{wv}$ ,  $b'_{w'w}$ ,  $b'_{vj}$  folgern, daß  $b'_{wv} = \alpha$ .

Fall 4:

Es gibt eine Tour  $T \in H$ , die einen Bogen  $(j, v)$  enthält mit  $(j, v) \nmid E_a$ .

$T$  enthält einen Weg  $[w', w, w'']$ .

4.1)  $w' \nmid v$ . Wie in 3.1) zeigen wir zunächst  $b'_{w'w} = b'_{w',n+1}$  und dann analog zu 3.1) mit Hilfe von  $(g_2)$   $b'_{wv} = \alpha$ .

4.2)  $w' = v$ . Ersetzen wir  $[j, v, w, w'']$  durch  $[j, w, v, w'']$ , so ist die neue Tour  $S$  aus  $H$ . Zunächst zeigen wir wie üblich, daß  $b'_{jv} = 0$  und dann analog zu 3.2, daß  $b'_{wv} = \alpha$ , wobei wir in  $T$   $[j, v, w, w'']$  durch  $[j, v, n+1, w, w'']$  ersetzen und in  $S$   $[j, w, v, w'']$  durch  $[j, n+1, w, v, w'']$ ,  $[j, w, n+1, v, w'']$ ,  $[j, w, v, n+1, w'']$ .

Die neuen  $(n+1)$ -Touren  $T', S', S'', S'''$  sind nach Konstruktion aus  $H'$ . Analog zu 3.2) bzw. Beweisteil d) von Satz 31.1 können wir mit ihrer Hilfe ein

Gleichungssystem aufstellen, aus dessen Lösung sich  $b'_{wv} = \alpha$  ergibt.

Wir haben also in allen Fällen zeigen können

$$(6) \quad b'_{wv} = \alpha.$$

d) Nach  $(g_2)$  existiert zu jedem  $i \in V - \{v, w\}$  eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[i, w, v]$  enthält. Die Touren  $T', T''$ , die wir durch Ersetzen dieses Weges durch  $[i, n+1, w, v]$  bzw.  $[i, w, n+1, v]$  erhalten, sind dann offensichtlich aus  $H'$ .

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = b'x^{T''} - b'x^{T'} &= b'_{iw} + b'_{w, n+1} + b'_{n+1, v} - b'_{i, n+1} - b'_{n+1, w} - b'_{wv} \\ &= b'_{iw} - b'_{i, n+1}. \end{aligned}$$

Damit folgt aus (1) und (2)

$$(7) \quad b'_{iw} = \alpha \quad \text{für alle } i \in W - \{w\}$$

$$(8) \quad b'_{iw} = 0 \quad \text{für alle } i \in V - W.$$

e) erledigen wir analog zu Beweisteil e) von Satz 31.1.

Wir setzen wie dort  $\beta_w^+ = 0$  und erhalten

$$\beta_i^- = \alpha - \pi\alpha \quad \text{für alle } i \in W - \{w\},$$

$$\beta_i^- = 0 \quad \text{für alle } i \in V - W.$$

Da es eine Tour  $T \in H$  gibt, die einen Bogen  $(i, j)$  enthält mit  $(i, j) \notin E_a$  und  $i$  oder  $j \in W - \{w\}$ , können wir mit Hilfe der Kenntnis aller Koeffizienten

$b'_{iw}$ ,  $b'_{wi}$  (siehe (3), (4), (5), (6), (7), (8)) zeigen, daß  $b'_{ij} = b'_{ji} = 0$  ist (siehe z.B. Teil c)). Da  $\beta_j^-$  bekannt ist, können wir  $\beta_i^+$  und damit  $\beta_w^-$  berechnen.

Hieraus folgt

$$\beta_i^+ = 0 \quad \text{für alle } i \in W,$$

$$\beta_i^+ = \pi\alpha - \alpha \quad \text{für alle } i \in V - W.$$

f) verläuft wörtlich wie der Beweisteil f) von Satz 31.1, womit alles gezeigt ist.  $\square$

Weder die Formulierungen noch die Beweise der Sätze 34.1 und 34.2 sind so elegant wie man das von "schönen" Sätzen erwartet. Es wäre sicherlich lohnenswert, die Formulierungen und Beweise zu vereinfachen und vielleicht (speziell im Falle von Satz 34.2) zu verallgemeinern. Dazu sind wahrscheinlich andere Beweistechniken als die hier vorgeführten nötig. Die (noch zu demonstrierende) gute Verwendungsfähigkeit dieser Sätze dürfte jedoch den großen Aufwand rechtfertigen (und den Zorn des interessierten Lesers mildern helfen).

§ 35. Liftungssätze für  $\tilde{P}_T^n$

Analog zu § 34 wollen wir nun zwei Liftungssätze für  $\tilde{P}_T^n$  ableiten und legen dazu folgende Bezeichnungen, die für diesen Paragraphen gelten sollen, fest.

Bezeichnungen 35.0.

- (a)  $ax \leq a_0$  ist eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .
- (b)  $(V_a, E_a)$  ist der von  $a$  induzierte Unterdigraph des vollständigen Digraphen  $K_n = (V, E)$ , d.h.  $E_a = \{(i, j) \mid a_{ij} > 0\}$ ,  $V_a = \bigcup_{(i, j) \in E_a} \{i, j\}$ .
- (c)  $(W, C)$  ist eine maximale Clique (siehe § 2) in  $(V_a, E_a)$ .  
 $\overset{\circ}{W} := \{w \in W \mid a_{iw} = a_{wi} = 0 \quad \forall i \in V - W\}$ .
- (d)  $\tilde{T}_n := \{S \subseteq E \mid \exists \text{ Tour } T \text{ in } K_n \text{ mit } S \subseteq T\}$ .
- (e)  $H_a := \{x \in \tilde{P}_T^n \mid ax = a_0\}$ ,  
 $H := \{T \in \tilde{T}_n \mid ax^T = a_0\}$ .  $\square$

Wiederum werden wir zunächst die Sätze formulieren, die wir beweisen wollen, daran anschließend einige Hilfsaussagen zeigen und am Ende die Beweise der Liftungssätze durchführen.

Satz 35.1.

Sei  $ax \leq a_0$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 4$ . Sei  $(W, C)$  eine maximale Clique in  $(V_a, E_a)$  mit

- (a)  $|\overset{\circ}{W}| \geq 2$ .
- (b)  $a_{ij} = \alpha \quad \forall (i, j) \in E_a \text{ mit } |\{i, j\} \cap \overset{\circ}{W}| \geq 1$ .
- (c)  $a_{ij} \geq \alpha \quad \forall (i, j) \in E_a \text{ mit } i, j \in W - \overset{\circ}{W}$ .

Sei  $a'x' \leq a'_0$  wie folgt definiert

$$a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \alpha & \text{falls } i \in W, j = n+1 \\ \alpha & \text{falls } i = n+1, j \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a'_0 := a_0 + \alpha.$$

Dann ist  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $\tilde{P}_T^{n+1}$ .  $\square$

Satz 35.2.

Sei  $ax \leq a_0$ ,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 4$ .  
 Sei  $(W, C)$  eine maximale Clique von  $(V_\alpha, E_\alpha)$  mit

- (a)  $|\overset{\circ}{W}| = 1$ , sei  $\overset{\circ}{W} = \{w\}$ .
- (b)  $a_{iw} = a_{wi} = \alpha \quad \forall i \in W - \{w\}$ .
- (c)  $a_{ij} \geq \alpha \quad \forall i, j \in W - \{w\}$ .
- (d) Für einen Knoten  $v \in W - \{w\}$  gilt:

Es gibt einen Bogen  $(j, v) \notin E_\alpha$  und eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[j, v, w]$  enthält, und es gibt einen Bogen  $(v, i) \notin E_\alpha$  und eine Tour  $S \in H$ , die den Weg  $[w, v, i]$  enthält.

Sei  $a'x' \leq a'_0$  definiert durch

$$a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \\ \alpha & \text{falls } i \in W, j = n+1 \\ \alpha & \text{falls } i = n+1, j \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a'_0 := a_0 + \alpha.$$

Dann ist  $a'x' \leq a'_0$  eine Facette von  $\tilde{P}_T^{n+1}$ .  $\square$

Zunächst folgt aus  $a_{ij} \geq 0$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ , daß die Facette  $ax \leq a_0$  verschieden ist von allen Facetten  $-x_{ij} \leq 0$  (siehe Satz 33.1). Folglich muß es zu jedem Bogen  $(i, j) \in E$  eine Bogenmenge  $T' \in H$  geben, die diesen Bogen enthält.  $T'$  kann man zu einer Tour  $T$  ergänzen, die dann wegen  $a_{ij} \geq 0$  ebenfalls aus  $H$  ist und  $(i, j)$  enthält. Das heißt, zu jedem Bogen  $(i, j) \in E$  gibt es eine Tour  $T \in H$ , die  $(i, j)$  enthält.

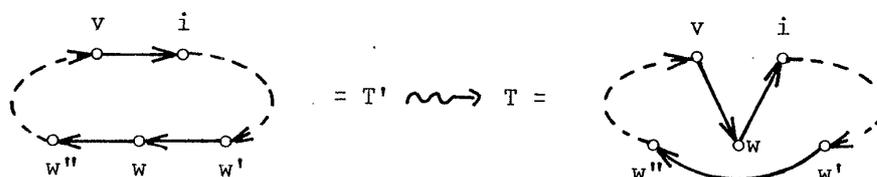
Lemma 35.3.

Seien die Voraussetzungen (a), (b) und (c) von Satz 35.1 erfüllt. Dann gibt es zu je zwei Knoten  $v, w \in \overset{\circ}{W}$  und jedem Knoten  $i \in V - \{v, w\}$  eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[v, w, i]$  enthält, und eine Tour  $S \in H$ , die den Weg  $[i, w, v]$  enthält.

Beweis:

Seien  $v, w \in \overset{\circ}{W}$  und  $i \in V - \{v, w\}$  beliebig.

a) Zunächst gibt es aufgrund der vorhergehenden Überlegungen eine Tour  $T' \in H$ , die  $(v, i)$  enthält. O.B.d.A. sei  $T'$  wie folgt gegeben:



Wird T aus T' wie angegeben konstruiert, dann gilt:

$$ax^T - ax^{T'} = a_{vw} + a_{wi} + a_{w'w''} - a_{vi} - a_{w'w} - a_{ww''}.$$

Da  $v, w \in W$ , gilt  $a_{vw} = \alpha$  und  $a_{vi} = a_{wi}$ . Sind  $a_{w'w} > 0$ ,  $a_{ww''} > 0$ , dann gilt nach (b)  $a_{ww''} = a_{w'w} = \alpha$  und nach Definition von  $W$  gilt  $w', w'' \in W$ . Aus (c) folgt dann  $a_{w'w''} \geq \alpha$ . Folglich ist  $ax^T - ax^{T'} \geq 0$  und damit  $ax^T = a_0$ , d.h.  $T \in H$ .

b) Die zweite Behauptung folgt analog, wenn wir mit einer Tour  $T' \in H$  beginnen, die  $(i, v)$  enthält.  $\square$

Lemma 35.4.

Sei  $(W, C)$  eine maximale Clique in  $(V, E_\alpha)$ , und sei  $|\overset{0}{W}| \geq 1$ . Dann gibt es zu jedem Knoten  $u \in W - \overset{0}{W}$  Knoten  $i, j \in V - W$  mit  $(u, i), (j, u) \notin E_\alpha$ .

Beweis:

a) Angenommen es gibt einen Knoten  $u \in W - \overset{0}{W}$  mit  $(u, i) \in E_\alpha$  für alle  $i \in V - W$ . Ist  $T \in H$  und enthält T keinen Bogen  $(u, i)$ , so kann T zu einer Tour  $T' \in H$  ergänzt werden.  $T'$  enthält dann einen Bogen  $(u, i)$ . Aus der Annahme  $a_{ui} > 0$  folgt  $ax^{T'} - ax^T \geq a_{ui} > 0$ . Widerspruch zur Gültigkeit von  $ax \leq a_0$ !

Folglich muß jedes  $T \in H$  einen Bogen  $(u, i)$  enthalten, mithin gilt  $H_a \subset \{x \in \overset{n}{P}_T \mid a_u^+ x = \sum_{j \in V - \{u\}} x_{uj} = 1\}$ .  $(V_{a_u^+}, E_{a_u^+})$  enthält jedoch keine Clique, folglich gilt  $E_{a_u^+} \subsetneq E_\alpha$  und damit  $a \notin \pi a_u^+$ . Nach Satz 33.2 ist  $a_u^+ x \leq 1$  eine Facette, das heißt,  $H_a$  ist echt in einer Facette enthalten. Widerspruch!

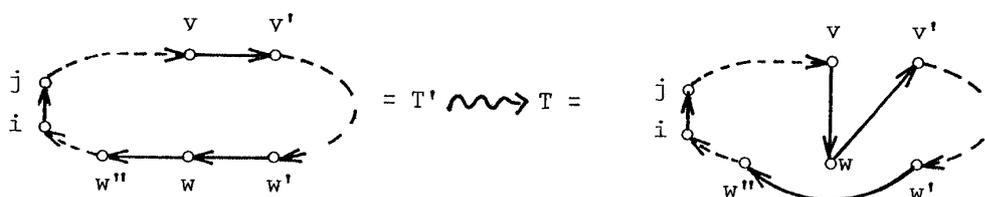
b) Die Existenz eines Bogens  $(j, u) \notin E_\alpha$  folgt analog.  $\square$

Lemma 35.5.

Seien alle Voraussetzungen von Satz 35.1 erfüllt. Seien  $v, w \in \overset{0}{W}$  und  $i, j \in V - \{v, w\}$  beliebig, dann gibt es eine Tour  $T \in H$ , die die Bögen  $(v, w)$  und  $(i, j)$  enthält.

Beweis:

Sei  $T' \in H$  eine Tour, die  $(i, j)$  enthält. O.B.d.A. sei  $T'$  wie folgt gegeben



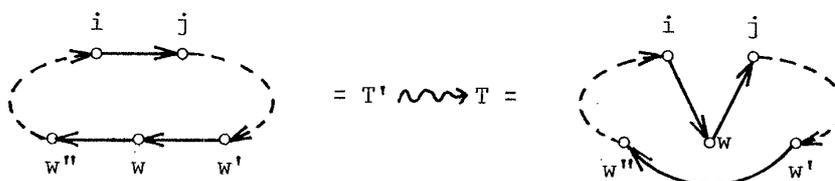
Konstruieren wir  $T$  aus  $T'$  wie angegeben, dann gilt  $(v,w), (i,j) \in T$ . Wegen  $a_{vw} = \alpha, a_{vv'} = a_{wv'}$  und  $(a_{w'w} = a_{ww''} = \alpha \implies a_{w'w''} \geq \alpha)$  folgt  $ax^T - ax^{T'} = a_{vw} + a_{wv'} + a_{w'w''} - a_{vv'} - a_{w'w} - a_{ww''} \geq 0$ , also gilt  $T \in H$ .  $\square$

Lemma 35.6.

Seien die Voraussetzungen (a), (b), (c) von Satz 35.2 erfüllt. Dann gibt es zu jedem Knotenpaar  $i, j \in V - \{w\}$  mit  $|\{i, j\} \cap W| = 1$  und  $(i, j) \notin E_a$  eine Tour  $T \in H$ , die den Weg  $[i, w, j]$  enthält.

Beweis:

Seien  $i, j \in V - \{w\}$  wie verlangt. Sei  $T' \in H$  eine Tour, die  $(i, j)$  enthält.



Sei o.B.d.A.  $i \in W - \{w\}$  und  $T$  aus  $T'$  wie angegeben konstruiert. Es ist dann  $a_{ij} = a_{w'w} = 0, a_{iw} = \alpha$ . Gilt  $(w', w), (w, w'') \in E_a$ , dann ist nach Definition von  $\tilde{W}$ :  $w', w'' \in \tilde{W}$ , und nach (b) ist  $\alpha = a_{w'w} = a_{ww''}$ , aus (c) folgt  $a_{w'w''} \geq \alpha$ . Folglich ist  $ax^T - ax^{T'} \geq 0$ , d.h.  $T \in H$ .  $\square$

Mit diesen Hilfsaussagen können wir nun das Gewünschte beweisen.

Beweis von Satz 35.1 und 35.2:

a) Offensichtlich ist  $a'x' \leq a'_0$  eine gültige Ungleichung bezüglich  $\tilde{P}_T^{n+1}$ .

Sei  $K_{n+1} = (V', E')$  der vollständige Digraph mit  $n+1$  Knoten,  $H_{a'} := \{x' \in \tilde{P}_T^{n+1} \mid a'x' = a'_0\}$ ,  $H' := \{T \in \tilde{T}_{n+1} \mid a'x^T = a'_0\}$ .

Sei  $b'x' = b'_0$  eine beliebige Hyperebene mit  $H_{a'} \cap \{x' \in \mathbb{R}^{|E'|} \mid b'x' = b'_0\} =: H_{b'}$ .

Wenn wir zeigen können, daß

$$b' = \pi a'$$

gilt, haben wir nach Satz 4.4 unsere Behauptung bewiesen.

b) Sei  $w$  ein beliebiger aber fest gewählter Knoten aus  $\overset{0}{W}$ , im Falle von 35.2 gilt natürlich  $\{w\} = \overset{0}{W}$ . Wir definieren

$$(1) \beta := b'_{w,n+1}$$

und versuchen nun,  $\beta$  so gut wie möglich zu berechnen.

c) Wir zeigen:  $b'_{i,n+1} = b'_{n+1,i} = b'_{wi} = b'_{iw} = 0 \quad \forall i \in V-W$ .

$c_1$ ) Zu jedem  $i \in V-W$  gibt es eine Tour  $T \in H$ , die  $(w,i)$  enthält.

$$\text{Sei} \quad T_1 := (T - \{(w,i)\}) \cup \{(w,n+1), (n+1,i)\}$$

$$T_2 := T_1 - \{(n+1,i)\}.$$

Nach Definition von  $\overset{0}{W}$  gilt  $a'_{wi} = a'_{wi} = 0$ , nach Definition von  $a'$  ist  $a'_{n+1,i} = 0$ ,  $a'_{w,n+1} = \alpha$ , also folgt  $a'x^{T_1} = a'x^{T_2} = a'_0$  und damit  $T_1, T_2 \in H'$ .

Da nach Annahme  $H_a \subset H_b$  gilt, folgt

$$0 = b'_0 - b'_0 = b'x^{T_1} - b'x^{T_2} = b'_{n+1,i}.$$

Das bedeutet

$$(2) b'_{n+1,i} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

$c_2$ ) Zu jedem  $i \in V-W$  gibt es eine Tour  $S \in H$ , die  $(i,w)$  enthält.

Analog zu  $c_1$ ) folgt

$$(3) b'_{i,n+1} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

$c_3$ ) Sei  $u$  der Vorgänger von  $w$  in der in  $c_1$ ) betrachteten Tour  $T \in H$ . Ist  $u \in W$ ,

so gilt nach Voraussetzung (b) von 35.1 und 35.2  $a'_{uw} = \alpha$ , ist  $u \in V-W$ , dann

$a'_{uw} = 0$  nach Definition von  $\overset{0}{W}$ . Folglich sind, da  $a'_{j,n+1} = a'_{jw} \quad \forall j \in V$ , die Touren

$$T_3 := (T - \{(u,w)\}) \cup \{(u,n+1), (n+1,w)\}$$

$$T_4 := T_3 - \{(w,i)\}$$

aus  $H'$ , das heißt

$$0 = b'x^{T_3} - b'x^{T_4} = b'_{wi}, \text{ also}$$

$$(4) b'_{wi} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

$c_4$ ) Analog erhalten wir

$$(5) b'_{iw} = 0 \quad \forall i \in V-W.$$

d) Wir zeigen:  $b'_{vw} = b'_{wv} = b'_{n+1,v} = b'_{v,n+1} = b'_{n+1,w} = \beta \begin{cases} \text{für ein } v \in W - \{w\} \text{ i.F. 35.2} \\ \text{für alle } v \in \overset{0}{W} - \{w\} \text{ i.F. 35.1.} \end{cases}$

$d_1$ ) Wir betrachten zunächst 35.1.

Seien  $v \in W - \{w\}$  und  $i, j \in V - W$  beliebig (es ist nicht notwendig, daß  $i \neq j$  gilt).

Nach Lemma 35.3 gibt es eine Tour  $T_1 \in H$  mit

$$[v, w, i] \in T_1$$

( $[v, w, i] \in T_1$  heißt: Die Tour  $T_1$  enthält den Weg  $[v, w, i]$ .)

Ebenfalls nach 35.3 gibt es eine Tour  $T_2 \in H$  mit

$$[u, w, v, i] \in T_2 \quad (\text{wobei } u \text{ den Vorgänger von } w \text{ bezeichnet}),$$

desgleichen gibt es nach Lemma 35.3 Touren  $T_3, T_4 \in H$  mit

$$[j, v, w] \in T_3,$$

$$[j, w, v] \in T_4.$$

$d_2$ ) Seien die Voraussetzungen von Satz 35.2 erfüllt. Sei  $v \in W - \{w\}$  ein (im weiteren fest gewählter) Knoten, der 35.2 (d) erfüllt. Nach Voraussetzung 35.2 (d) gibt es  $i, j \in V - W$  (nicht notwendig verschieden) mit  $(v, i), (j, v) \notin E_a$ , so daß Touren  $T_2, T_3 \in H$  existieren, für die gilt

$$[u, w, v, i] \in T_2 \quad (\text{wobei } u \text{ den Vorgänger von } w \text{ bezeichnet}),$$

$$[j, v, w] \in T_3.$$

Nach Lemma 35.6 gibt es zu  $(v, i), (j, v) \notin E_a$  Touren  $T_1, T_4 \in H$  mit

$$[v, w, i] \in T_1,$$

$$[j, w, v] \in T_4.$$

$d_3$ ) Aus den in  $d_1), d_2)$  gefundenen  $n$ -Touren  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , die Elemente von  $H$  sind, konstruieren wir wie folgt  $(n+1)$ -Touren, von denen man unmittelbar einsieht, daß sie Elemente von  $H'$  sind, man beachte lediglich, daß

$$a_{vw} = a_{wv} = a_{v, n+1} = a_{w, n+1} = a_{n+1, v} = a_{n+1, w} = \alpha,$$

$$a_{wi} = a_{iw} = a_{jw} = a_{wj} = a_{vi} = a_{jv} = 0 \text{ gilt.}$$

$$T_1' := (T_1 - [v, w, i]) \cup [v, n+1, w] \in H',$$

$$T_1'' := (T_1 - [v, w, i]) \cup [v, w, n+1] \in H',$$

$$\text{daraus folgt } 0 = b'x^{T_1'} - b'x^{T_1''} = b'_{v, n+1} + b'_{n+1, w} - b'_{vw} - b'_{w, n+1},$$

$$T_2' := (T_2 - [w, v, i]) \cup [w, n+1, v] \in H',$$

$$T_2'' := (T_2 - [w, v, i]) \cup [w, v, n+1] \in H',$$

$$0 = b'x^{T_2'} - b'x^{T_2''} = b'_{w, n+1} + b'_{n+1, v} - b'_{wv} - b'_{v, n+1},$$

$$T_3' := (T_3 - [j, v, w]) \cup [v, n+1, w] \in H',$$

$$T_3'' := (T_3 - [j, v, w]) \cup [n+1, v, w] \in H',$$

$$0 = b'x^{T_3'} - b'x^{T_3''} = b'_{v, n+1} + b'_{n+1, w} - b'_{n+1, v} - b'_{vw}$$

$$T_4' := (T_4 - [j, w, v]) \cup [w, n+1, v] \in H',$$

$$T_4'' := (T_4 - [j, w, v]) \cup [n+1, w, v] \in H',$$

$$0 = b'x^{T_4'} - b'x^{T_4''} = b'_{w, n+1} + b'_{n+1, v} - b'_{n+1, w} - b'_{wv},$$

$$T'_5 := (T_2 - [u, w, v, i]) \cup [u, n+1, v, w] \in H',$$

$$T''_5 := (T_2 - [u, w, v, i]) \cup [u, n+1, w, v] \in H',$$

$$0 = b'x^{T'_5} - b'x^{T''_5} = b'_{n+1, v} + b'_{vw} - b'_{n+1, w} - b'_{wv}.$$

Da  $b'_{w, n+1} = \beta$ , erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -b'_{vw} + b'_{v, n+1} + b'_{n+1, w} &= \beta \\ -b'_{wv} - b'_{v, n+1} + b'_{n+1, v} &= -\beta \\ -b'_{vw} + b'_{v, n+1} - b'_{n+1, v} + b'_{n+1, w} &= 0 \\ -b'_{wv} + b'_{n+1, v} - b'_{n+1, w} &= -\beta \\ +b'_{vw} - b'_{wv} + b'_{n+1, v} - b'_{n+1, w} &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$(6) \quad b'_{vw} = b'_{wv} = b'_{v, n+1} = b'_{n+1, v} = b'_{n+1, w} = \beta.$$

Speziell folgt im Falle 35.1, da  $v \in \overset{0}{W}$  beliebig gewählt war:

$$(7) \quad b'_{v, n+1} = b'_{n+1, v} = b'_{vw} = b'_{wv} = \beta \quad \forall v \in \overset{0}{W} - \{w\}.$$

e) Wir zeigen  $b'_{u, n+1} = b'_{n+1, u} = \beta \quad \forall u \in \overset{0}{W} - \{w\}$ .

Nach Lemma 35.4 gibt es zu jedem  $u \in \overset{0}{W} - \{w\}$  einen Knoten  $i \in V - W$  mit  $(u, i) \notin E_a$  und einen Knoten  $j \in V - W$  mit  $(j, u) \notin E_a$ .

e<sub>1</sub>) Im Falle von Satz 35.1 gibt es nach Lemma 35.5 zu jedem  $v \in \overset{0}{W} - \{w\}$  eine Tour  $T \in H$ , die  $(v, w)$  und  $(u, i)$  enthält.

$$\text{Es ist } T' := (T - \{(u, i)\}) \cup \{(u, n+1)\} \in H',$$

$$\text{und } T'' := (T - \{(u, i), (v, w)\}) \cup \{(v, n+1, w)\} \in H'.$$

Daraus folgt  $0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{vw} + b'_{u, n+1} - b'_{v, n+1} - b'_{n+1, w} = b'_{u, n+1} - \beta$ , und damit

$$(8) \quad b'_{u, n+1} = \beta \quad \forall u \in \overset{0}{W} - \{w\}.$$

e<sub>2</sub>) Analog folgt im Falle von Satz 35.1 über Lemma 35.4 und Lemma 35.5

$$(9) \quad b'_{n+1, u} = \beta \quad \forall u \in \overset{0}{W} - \{w\}.$$

e<sub>3</sub>) Auch unter den Voraussetzungen von Satz 35.2 gibt es eine Tour  $T \in H$ , die  $(u, i)$  enthält. Sei  $z$  der Nachfolger des Knotens  $w$  in  $T$ . Sei

$$T' := (T - \{(u, i)\}) \cup \{(u, n+1)\},$$

$$T'' := (T - \{(u, i), (w, z)\}) \cup \{(w, n+1), (n+1, z)\}.$$

Nach Konstruktion gilt wegen  $a'_{wz} = a'_{n+1, z}$   $T', T'' \in H'$ , und es folgt

$$(*) \quad 0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{u, n+1} + b'_{wz} - b'_{w, n+1} - b'_{n+1, z}.$$

Ist  $z \in V-W$ , dann folgt aus Teil c)  $b'_{wz} = b'_{n+1,z} = 0$ ; ist  $z = v$ , dann aus Teil d)  $b'_{wz} = b'_{n+1,z} = \beta$ . In beiden Fällen ergibt sich damit  $b'_{u,n+1} = b'_{w,n+1} = \beta$ .

Angenommen  $z \in W-\{v,w\}$ , dann gibt es nach Lemma 35.4 ein  $j \in V-W$  mit  $(j,z) \notin E_a$  und nach Lemma 35.6 eine Tour  $S \in H$  mit  $[j,w,z] \in S$ . Wir definieren

$$S' := (S - \{(j,w)\}) \cup \{(n+1,w)\},$$

$$S'' := (S - [j,w,z]) \cup [w,n+1,z].$$

$S'$  und  $S''$  sind offensichtlich aus  $H'$ , folglich gilt

$$0 = b'x^{S'} - b'x^{S''} = b'_{wz} + b'_{n+1,w} - b'_{w,n+1} - b'_{n+1,z} = b'_{wz} - b'_{n+1,z}.$$

Dieses Resultat in (\*) eingesetzt ergibt mit (1)  $b'_{u,n+1} = \beta$ , also folgt in allen Fällen

$$(8) \quad b'_{u,n+1} = \beta \quad \forall u \in W-\overset{\circ}{W}.$$

e<sub>4</sub>) Völlig analog folgt

$$(9) \quad b'_{n+1,u} = \beta \quad \forall u \in W-\overset{\circ}{W}.$$

f) Wir zeigen:  $b'_{wu} = b'_{uw} = \beta \quad \forall u \in W-\overset{\circ}{W}$ .

f<sub>1</sub>) Zu jedem Knoten  $u \in W-\overset{\circ}{W}$  und jedem Knoten  $v \in \overset{\circ}{W}-\{w\}$  gibt es im Falle von Satz 35.1 nach Lemma 35.3 eine Tour  $T \in H$ , die  $[u,w,v]$  enthält. Es ist

$$T' := (T - [u,w,v]) \cup [u,n+1,w,v] \in H',$$

$$T'' := (T - [u,w,v]) \cup [u,w,n+1,v] \in H',$$

und damit nach (1), (6), (7), (8)

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{u,n+1} + b'_{n+1,w} + b'_{wv} - b'_{uw} - b'_{w,n+1} - b'_{n+1,v} = -b'_{uw} + \beta,$$

also folgt

$$(10) \quad b'_{uw} = \beta \quad \forall u \in W-\overset{\circ}{W},$$

und analog

$$(11) \quad b'_{wu} = \beta \quad \forall u \in W-\overset{\circ}{W}.$$

f<sub>2</sub>) Im Falle von Satz 35.2 gibt es zu jedem  $u \in W-\{v,w\}$  nach Lemma 35.4 einen Knoten  $i \in V-W$  mit  $(u,i) \notin E_a$ . Nach Lemma 35.6 gibt es eine Tour  $T \in H$ , die  $[u,w,i]$  enthält. Sei

$$T' := (T - [u,w,i]) \cup [u,w,n+1] \in H',$$

$$T'' := (T - [u,w,i]) \cup [u,n+1,w] \in H'.$$

Es ist dann nach (1), (6), (8)

$$0 = b'x^{T'} - b'x^{T''} = b'_{uw} + b'_{w,n+1} - b'_{u,n+1} - b'_{n+1,w} = b'_{uw} - \beta,$$

und es folgt

$$b'_{uw} = \beta \quad \forall u \in W - \{w\},$$

sowie analog

$$b'_{wu} = \beta \quad \forall u \in W - \{w\}.$$

g) Wir definieren  $b \in \mathbb{R}^{|E|}$  durch

$$b_{ij} := b'_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j,$$

und  $b_o := b'_o - \beta.$

Ist  $T \in H$  und enthält  $T$  einen Bogen  $(w, i)$  (bzw.  $(j, w)$ ), dann ersetzen wir diesen durch den Weg  $[w, n+1, i]$  (bzw.  $[j, n+1, w]$ ). Enthält  $T$  keinen Bogen dieser Art, so fügen wir den Bogen  $(w, n+1)$  zu  $T$  hinzu. Die so konstruierte Bogenmenge  $T' \in \tilde{T}_{n+1}$  ist offensichtlich ein Element von  $H'$  ( $a'_{wi} = a'_{n+1, i}$ ,  $a'_{jw} = a'_{j, n+1}$ ,  $a'_{n+1, w} = a'_{w, n+1} = \alpha$ ), daraus folgt  $b'x^{T'} = b'_o$  und nach Konstruktion mit (1) - (11):

$$b'x^{T'} - bx^T = \begin{Bmatrix} b'_{w, n+1} + b'_{n+1, i} - b'_{wi} \\ b'_{j, n+1} + b'_{n+1, w} - b'_{jw} \\ b'_{w, n+1} \end{Bmatrix} = \beta.$$

Das aber bedeutet:  $bx^T = b'_o$  für alle  $T \in H$ , und somit gilt  $H_a \subset \{x \in \tilde{P}_T^n \mid bx = b'_o\}$ . Da  $ax \leq a_o$  nach Voraussetzung eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$  ist, gibt es nach Satz 4.4 eine Zahl  $\pi \in \mathbb{R} - \{0\}$  mit

$$b = \pi a, \quad b'_o = \pi a_o.$$

Aus  $b_{vw} = \beta$ ,  $a_{vw} = \alpha$  folgt  $\pi = \frac{\beta}{\alpha}$  und somit folgt aus

$$b'_{n+1, i} = b'_{i, n+1} = \beta \quad \forall i \in W,$$

$$b'_{n+1, i} = b'_{i, n+1} = 0 \quad \forall i \in V - W,$$

daß  $b' = \pi a'$  und  $b'_o = \pi a'_o$  gilt, was zu zeigen war.  $\square$

#### Kapitel 14. Facetten der asymmetrischen Travelling Salesman Polytope

Wir wissen zwar aus Kapitel 13, wie gewisse Facetten von  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  zu Facetten von  $P_T^{n+1}$  und  $\tilde{P}_T^{n+1}$  fortgesetzt werden können, aber abgesehen von den trivialen Facetten und einigen Liftungen der Primimplikanten (siehe § 33) kennen wir bisher noch keine "konkreten" Facetten von  $P_T^n$  bzw.  $\tilde{P}_T^n$ . Wir werden in § 36 einige neue Klassen von Ungleichungen angeben, die gültig bezüglich  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  sind und untersuchen dann in den beiden folgenden Paragraphen, welche der Ungleichungen tatsächlich "scharf", d.h. Facetten-definierend, sind.

§ 36. Neue gültige Ungleichungen

Die einzige "große" Klasse bezüglich  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  gültiger Ungleichungen, die wir aus der Kenntnis der Polytope der "gutartigen" Verwandten des ATSP (siehe § 31) ableiten können, sind die vom Forest-Polytopen (siehe 11.3 oder 16.1) bzw. Branching-Polytopen bzw. Antibranching-Polytopen (siehe 29.6) gelieferten Kurzzyklus-Bedingungen:

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad W \subset V, 2 \leq |W| \leq |V| - 1.$$

Da die Kammungleichungen (siehe 22.1, 22.10) im symmetrischen Fall Facetten von  $Q_T^n$  und  $\tilde{Q}_T^n$  (Satz 23.7, Satz 24.2) liefern, bietet es sich natürlich an, diesen Ungleichungstyp auf den asymmetrischen Fall zu übertragen.

Definition 36.1.

Sei  $W_0, W_1, \dots, W_k \subset V$ , und gelte

- (a)  $|W_0 - W_i| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k,$
- (b)  $|W_i - W_0| \geq 1 \quad i = 1, \dots, k,$
- (c)  $W_i \cap W_j = \emptyset \quad 1 \leq i < j \leq k,$
- (d) (d<sub>1</sub>)  $k \geq 3$  und ungerade oder  
(d<sub>2</sub>)  $k = 1$  und  $|W_0| = 1.$

Dann heißt  $C = \bigcup_{i=0}^k E(W_i)$  ein Kamm,  $W_0$  heißt Griff, und die  $W_i, i = 1, \dots, k,$  heißen Zinken des Kamms.  $\square$

Satz 36.2.

Sei  $C$  ein Kamm mit Griff  $W_0$  und Zinken  $W_1, \dots, W_k$ . Dann ist die Kammungleichung

$$\alpha^C x := \sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle =: s(C)$$

eine gültige Ungleichung bezüglich  $F_T^n$  und  $\tilde{F}_T^n$ .

Beweis:

$$\begin{aligned} 2 \alpha^C x &\leq \sum_{w \in W_0} \left( \sum_{e \in w^-(w)} x_e + \sum_{e \in w^+(w)} x_e \right) + \sum_{i=1}^k \left( \sum_{e \in E(W_i)} x_e + \sum_{e \in E(W_i - W_0)} x_e + \sum_{e \in E(W_i \cap W_0)} x_e \right) \\ &\leq |W_0| + |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1 + |W_i - W_0| - 1 + |W_i \cap W_0| - 1) \\ &= 2|W_0| + 2 \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - k. \end{aligned}$$

Das bedeutet:  $a^C x \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \frac{k}{2}$ .

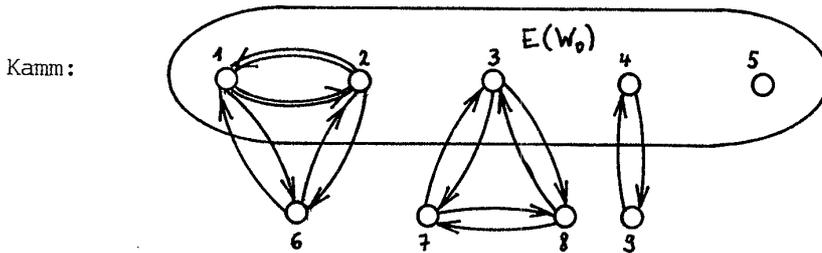
Aus der Ganzzahligkeit der Variablen  $x_e$  folgt die Behauptung.  $\square$

Diejenigen Kämmen, die Bedingung  $(d_2)$  in Definition 36.1 erfüllen, sind genau die Kurzzyklusbedingungen (siehe Lemma 22.3). Aus technischen Gründen zählen wir diese im weiteren auch zu den Kammungleichungen.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß sich Kämmen etwas allgemeiner definieren lassen (siehe Definition 22.1), aber ohne Schwierigkeiten sieht man, daß sich die gesamten Dominanzüberlegungen von § 22 für (ungerichtete) Kämmen auf (gerichtete) Kämmen übertragen lassen; daher haben wir uns hier von vornherein auf die im Sinne von § 22 (siehe Satz 22.9) nicht dominierten Kämmen beschränkt (siehe auch [Grötschel, Padberg, 1974]).

Beispiel 36.3.

$W_0 = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $W_1 = \{1,2,6\}$ ,  $W_2 = \{3,7,8\}$ ,  $W_3 = \{4,9\}$ .



Kammungleichung:

$$2x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + 2x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} + x_{37} + x_{38} + x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{61} + x_{62} + x_{73} + x_{78} + x_{83} + x_{87} + x_{94} + x_{94} \leq 8. \square$$

Aus Kammungleichungen und Kurzzyklusbedingungen können wir nun weitere gültige Ungleichungen ableiten.

Definition 36.4.

Sei  $C$  ein Kamm mit Griff  $W_0$  und Zinken  $W_1, \dots, W_k$ . Seien  $p, q \in V - (\bigcup_{i=0}^k W_i)$ . Dann heißt

$$C^2 := C \cup \{(p, i) \mid i \in W_0\} \cup \{(i, q) \mid i \in W_0\} \cup \{(p, q)\}$$

ein  $C^2$ -Kamm und  $C$  der zu  $C^2$  gehörige Kamm.  $\square$

Satz 36.5.

Sei  $C^2$  ein C2-Kamm und  $C$  der zu  $C^2$  gehörige Kamm, dann ist die C2-Kammungleichung

$$a^{C^2} x := \sum_{j=0}^k \sum_{e \in E(W_j)} x_e + \sum_{i \in W_0} (x_{pi} + x_{iq}) + x_{pq}$$

$$\leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k-2}{2} \right\rangle = s(C) + 1$$

eine gültige Ungleichung bezüglich  $F_T^n$  und  $\tilde{F}_T^n$ .

Beweis:

$$2 a^{C^2} x = 2(a^C x + \sum_{i \in W_0} (x_{iq} + x_{pi}) + x_{pq})$$

$$\leq \sum_{i \in W_0} \sum_{j \in V - \{i\}} (x_{ij} + x_{ji}) + \sum_{s=1}^k \left( \sum_{(i,j) \in E(W_s)} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in E(W_s - W_0)} x_{ij} \right)$$

$$+ \sum_{(i,j) \in E(W_s \cap W_0)} x_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n x_{pj} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^n x_{jq}$$

$$\leq 2|W_0| + \sum_{s=1}^k (|W_s| - 1 + |W_s - W_0| - 1 + |W_s \cap W_0| - 1) + 2$$

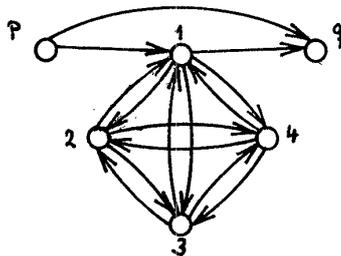
$$= 2(|W_0| + \sum_{s=1}^k |W_s| - 1) - (k-2).$$

Daraus folgt aufgrund der Ganzzahligkeit die Behauptung.  $\square$

Beispiel 36.6.

$W_0 = \{1\}$ ,  $W_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $p, q \in V - W_1$ .

C2-Kamm



C2-Kammungleichung:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{1q} + x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{41} + x_{42} + x_{43}$$

$$+ x_{p1} + x_{pq} \leq 4. \quad \square$$

Definition 36.7.

Seien  $i_1, i_2, i_3$  drei beliebige (aber verschiedene) Knoten, und sei  $W_1, W_2 \subset V$  mit

- (a)  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ ,
- (b)  $W_1 \cap \{i_1, i_2, i_3\} = \{i_1\}$ ,
- (c)  $W_2 \cap \{i_1, i_2, i_3\} = \{i_2\}$ ,
- (d)  $|W_j| \geq 2 \quad j = 1, 2$ ,

dann heißt

$$C^3 := E(W_1) \cup E(W_2) \cup \{(i_1, j) \mid j \in W_2\} \cup \{(i_2, i_1), (i_3, i_1), (i_3, i_2)\}$$

ein C3-Kamm.  $\square$

Satz 36.8.

Für einen C3-Kamm  $C^3$  ist die Ungleichung

$$\sum_{e \in C^3} x_e \leq |W_1| + |W_2| - 1$$

gültig bezüglich  $F_T^n$  und  $\tilde{F}_T^n$ .

Beweis:

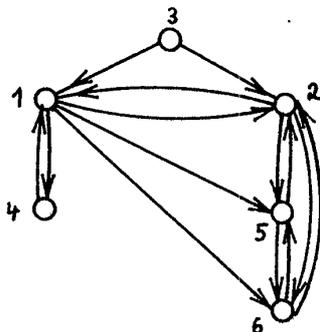
Seien o.B.d.A.  $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3$ , dann gilt

$$\begin{aligned} 4 \sum_{(i,j) \in C^3} x_{ij} &\leq 3 \sum_{j=2}^n (x_{1j} + x_{j1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n (x_{2j} + x_{j2}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^n x_{3j} + \sum_{(i,j) \in E(W_1)} x_{ij} \\ &+ \sum_{(i,j) \in E(W_2)} x_{ij} + 3 \sum_{(i,j) \in E(W_1 - \{1\})} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in E(W_2 - \{2\})} x_{ij} \\ &+ 2 \sum_{j \in W_2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} \\ &= 6 + 2 + 1 + |W_1| - 1 + |W_2| - 1 + 3|W_1| - 6 + |W_2| - 2 + 2|W_2| \\ &= 4|W_1| + 4|W_2| - 1. \end{aligned}$$

Aus der Ganzzahligkeit der Variablen  $x_{ij}$  folgt die Behauptung.  $\square$

Beispiel 36.9.

C3-Kamm:



$$\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$W_1 = \{1, 4\}$$

$$W_2 = \{2, 5, 6\}$$

□

Zwei Typen von Liftungen der durch Kreise induzierten Primimplikanten-Ungleichungen (siehe Bemerkung 33.6  $(c_1)$ ,  $(d_1)$  und  $(c_2)$ ,  $(d_2)$ ) wollen wir noch explizit angeben.

Satz und Definition 36.10.

Sei  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset V$ ,  $3 \leq k \leq n-1$ , dann heißt

$$\sum_{j=1}^{k-1} x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_k i_1} + 2 \sum_{j=2}^{k-1} x_{i_j i_1} + \sum_{j=3}^{k-1} \sum_{h=2}^{j-1} x_{i_j i_h} \leq k - 1$$

eine  $D_k^-$ -Ungleichung und

$$\sum_{j=1}^{k-1} x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_k i_1} + 2 \sum_{j=3}^k x_{i_1 i_j} + \sum_{j=4}^k \sum_{h=3}^{j-1} x_{i_j i_h} \leq k - 1$$

eine  $D_k^+$ -Ungleichung.

Beide Ungleichungen sind gültig bezüglich  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

a) Daß für  $k = 3$  die  $D_k^-$ -Ungleichung

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} + 2x_{i_2 i_1} \leq 2$$

gültig bezüglich  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$  ist, ist offensichtlich. Wir zeigen nun: Ist

$$d_k^- x := \sum_{j=1}^{k-1} x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_k i_1} + 2 \sum_{j=2}^{k-1} x_{i_j i_1} + \sum_{j=3}^{k-1} \sum_{h=2}^{j-1} x_{i_j i_h} \leq k - 1$$

gültig bezüglich  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$ , dann auch

$$d_{k+1}^- x := \sum_{j=1}^k x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_{k+1} i_1} + 2 \sum_{j=2}^k x_{i_j i_1} + \sum_{j=3}^k \sum_{h=2}^{j-1} x_{i_j i_h} \leq k.$$

Es ist

$$2 d_{k+1}^- x \leq d_k^- x + \sum_{(i,j) \in E(\{i_1, \dots, i_{k+1}\})} x_{ij} + \sum_{j=1}^{k+1} x_{kj} + \sum_{j=2}^{k+1} x_{j1}$$

$$\leq k - 1 + k + 1 + 1$$

$$\leq 2k + 1.$$

Aus der Ganzzahligkeit der  $x_{ij}$  folgt

$$d_{k+1}^- x \leq k.$$

b) Für  $k = 3$  ist die Menge der  $D_k^-$ -Ungleichungen gleich der Menge der  $D_k^+$ -Ungleichungen, also sind die  $D_3^+$ -Ungleichungen gültig bezüglich  $P_T^n$  und  $P_T^n$ . Wir zeigen wieder, daß die  $D_{k+1}^+$ -Ungleichungen gültig sind, wenn die  $D_k^+$ -Ungleichungen gültig sind. Bezüglich  $\{i_1, i_3, i_4, \dots, i_{k+1}\}$  ist

$$d_{k+1}^+ x := \sum_{j=3}^k x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_1 i_3} + x_{i_{k+1} i_1} + 2 \sum_{j=4}^{k+1} x_{i_1 i_j} + \sum_{j=5}^{k+1} \sum_{h=4}^{j-1} x_{i_j i_h} \leq k - 1$$

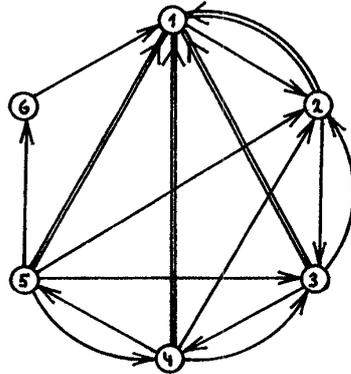
eine  $D_k^+$ -Ungleichung. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2 d_{k+1}^+ x &= 2 \left( \sum_{j=3}^{k+1} x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_{k+1} i_1} + 2 \sum_{j=3}^{k+1} x_{i_1 i_j} + \sum_{j=4}^{k+1} \sum_{h=3}^{j-1} x_{i_j i_h} \right) \\ &\leq d_k^+ x + \sum_{(i,j) \in E(\{i_1, \dots, i_{k+1}\})} x_{ij} + \sum_{j \in V - \{i_1\}} x_{i_1 j} + \sum_{j \in V - \{i_3\}} x_{j i_3} \\ &\leq k - 1 + k + 2 = 2k + 1. \end{aligned}$$

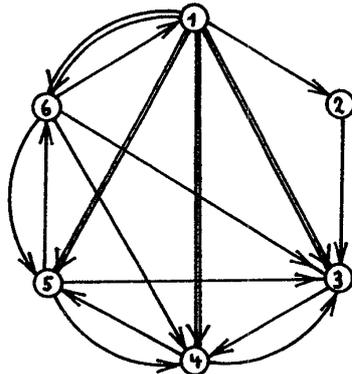
Aus der Ganzzahligkeit der  $x_{ij}$  folgt die Behauptung.  $\square$

Beispiel 36.11.

a) Durch  $D_6^-$ -Ungleichung induzierter Digraph:



b) Durch  $D_6^+$ -Ungleichung induzierter Digraph:



$\square$

Definition 36.12.

Sei  $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} \subset V$ ,  $|V| \geq 5$ ; dann heißt

$$(E_4) \quad 2x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_4} + 2x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} + x_{i_4 i_2} \leq 3$$

eine  $E_4$ -Ungleichung.  $\square$

Satz 36.13.

$E_4$ -Ungleichungen sind gültige Ungleichungen bezüglich  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

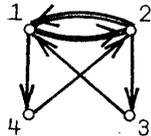
O.B.d.A. sei  $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4$ , dann gilt aufgrund der Gültigkeit der  $D_3$ -Ungleichungen und Kurzzyklusbedingungen:

$$\begin{aligned} 2e^4 x &:= 2(2x_{12} + x_{14} + 2x_{21} + x_{23} + x_{31} + x_{42}) \\ &\leq \sum_{(i,j) \in E(\{1,2,3,4\})} x_{ij} + (2x_{12} + x_{14} + x_{21} + x_{42}) + \\ &\quad (x_{12} + 2x_{21} + x_{23} + x_{31}) \\ &\leq 3 + 2 + 2 = 7. \end{aligned}$$

Aufgrund der Ganzzahligkeit der  $x_{ij}$  folgt  $e^4 x \leq 3$ .  $\square$

Beispiel 36.14.

Eine  $E_4$ -Ungleichung bezüglich  $\{1,2,3,4\}$ :



$$2x_{12} + x_{14} + 2x_{21} + x_{23} + x_{31} + x_{42} \leq 3. \quad \square$$

§ 37. Facetten von  $P_T^n$

Von einigen der vielen gültigen Ungleichungen aus § 36 wollen wir nun zeigen, daß sie Facetten von  $P_T^n$  definieren (siehe dazu Satz 4.4). Wir gehen dabei so vor, daß wir zunächst von gewissen gültigen "Basis-Ungleichungen"  $ax \leq a_0$  konstruktiv zeigen, daß es  $d_n := \dim P_T^n$  Touren gibt, deren Inzidenzvektoren linear (und somit affin) unabhängig sind und die "Basis-Ungleichungen" mit Gleichheit erfüllen. Zum Nachweis, daß  $P_T^n$  nicht in der Hyperebene  $\{x \mid ax = a_0\}$  enthalten ist, ist die Angabe einer Tour erforderlich, deren Inzidenzvektor  $ax \leq a_0$  mit strikter Ungleichheit erfüllt. Dies ist im allgemeinen völlig trivial und wird nicht durchgeführt. Mit Hilfe der Liftungssätze aus § 34 versuchen wir dann, die gefundenen "Basis-Facetten" auf möglichst vielfältige

Art zu Facetten höherdimensionaler Polytope zu liften, um so große Klassen von Facetten von  $P_T^n$  zu erhalten.

Zunächst untersuchen wir die Kurzzyklusbedingungen.

Satz 37.1.

Sei  $n \geq 5$ , dann definiert jede der Kurzzyklusbedingungen

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1$$

eine Facette von  $P_T^n$ .

Beweis:

Wir betrachten o.B.d.A. die Ungleichung  $x_{12} + x_{21} \leq 1$ .

Es gibt zwei Typen A und B von Touren, für deren Inzidenzvektoren in dieser Ungleichung Gleichheit gilt: Typ A ist durch  $\langle 1, 2, \alpha \rangle$  und Typ B durch  $\langle 1, \alpha, 2 \rangle$  gegeben, wobei  $\alpha$  eine beliebige Anordnung der Knoten  $3, 4, \dots, n$  ist.

Aus Typ A erzeugen wir die zu  $\langle 2, 3, 4, \dots, n \rangle$  gehörigen linear unabhängigen Ringschiffs  $\pi$  (siehe Bemerkung 32.3). Dann sind auch die Inzidenzvektoren der  $n$ -Touren  $\langle 1, \pi \rangle$  linear unabhängig. Von diesen Touren gibt es  $(n-1)(n-4) + 2 = n^2 - 5n + 6$ . Wie im 2. Beweis von Satz 32.2 haben wir uns zu jeder Tour einen Spaltenindex (Bogen) gemerkt, der uns ebenfalls wie in Satz 32.2 zur Konstruktion einer regulären  $(d_n, d_n)$ -Untermatrix der Matrix der Touren verhelfen soll.

Wir müssen nun noch weitere  $2n - 5$  Touren und Spalten auswählen. Aus Typ B erzeugen wir zunächst  $n-3$  Touren der Form  $\langle \pi, n, 2 \rangle$ , indem wir die Ringschiffs  $\pi$  des Typs 1 von  $\langle 1, 3, 4, \dots, n-1 \rangle$  bilden und uns die Spaltenindizes  $(1, j)$  für  $j = 3, \dots, n-1$  merken. Ferner erzeugen wir aus Typ B  $n-4$  Touren der Form  $\langle \pi, 2 \rangle$ , indem wir ausgehend von der Tour  $\langle 1, 4, 5, \dots, n, 3, 2 \rangle$  die ersten  $n-4$  Ringschiffs des Typs 1 von  $\langle 1, 4, 5, \dots, n, 3 \rangle$  bilden. Von den zugehörigen Touren  $\langle \pi, 2 \rangle$  merken wir uns die Spaltenindizes  $(j, 2)$  für  $j = 3, 4, \dots, n-2$ . Zu den so ausgewählten  $2n - 7$  fügen wir zwei weitere Touren hinzu, und zwar die Tour  $\langle 1, 3, n, 4, 5, 6, \dots, n-2, n-1, 2 \rangle$  mit Spaltenindex  $(n-1, 2)$ , sowie die Tour  $\langle 1, n, 3, 4, \dots, n-2, n-1, 2 \rangle$  mit Spaltenindex  $(1, n)$ .

Damit haben wir insgesamt eine  $(d_n, d_n)$ -Untermatrix der Matrix aller Touren vom Typ A und B gefunden. Sie hat folgendes Aussehen:

$$M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ * & N_1 \end{pmatrix},$$

wobei  $N_0$  durch die Ringschiffkonstruktion des 2. Beweises von Satz 32.2 gewonnen worden, also regulär ist. Keine dieser durch Ringschiff gewonnenen

Touren der Form  $\langle 1, 2, \alpha \rangle$  besitzt einen von Null verschiedenen Wert in den Komponenten  $(1, i)$ ,  $i = 3, \dots, n$ , und  $(i, 2)$ ,  $i = 3, \dots, n-1$ , also ist der rechte obere Block eine Nullmatrix.  $N_1$  hat nach Konstruktion 1-Elemente auf der Hauptdiagonalen und Nullen oberhalb der Hauptdiagonale. Ferner ist der mit \* bezeichnete Teil der Matrix M mit Nullen und Einsen besetzt, die uns nicht weiter interessieren. Aus  $|M| = |N_0| |N_1| \neq 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

Erinnern wir uns daran, daß zwei verschiedene Ungleichungen äquivalent bezüglich eines Polytopen P heißen, wenn sie dieselbe Seitenfläche von P definieren, so können wir zeigen:

Lemma 37.2.

Seien  $W, W' \subset V$  mit  $2 \leq |W|$ ,  $|W'| \leq n-2$ ,  $W \neq W'$ , dann gilt:

Die Kurzzyklusbedingungen

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \text{und} \quad \sum_{e \in E(W')} x_e \leq |W'| - 1$$

sind äquivalent bezüglich  $F_T^n$  genau dann, wenn  $W' = V-W$  gilt.

Beweis:

" $\Leftarrow$ ":

$$\begin{aligned} 2 \sum_{e \in E(W)} x_e \leq 2(|W| - 1) &\iff 2 \sum_{e \in E(W)} x_e - \sum_{w \in W} \sum_{v \in V - \{w\}} (x_{wv} + x_{vw}) \\ &\leq 2(|W| - 1) - 2|W| \\ &\iff 2 \sum_{e \in E(V-W)} x_e - \sum_{v \in V-W} \sum_{w \in V - \{v\}} (x_{vw} + x_{wv}) \\ &\leq 2(|V-W| - 1) - 2|V-W| \\ &\iff 2 \sum_{e \in E(V-W)} x_e \leq 2(|V-W| - 1) \end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ ": Trivial.  $\square$

Satz 37.3.

Sei  $n \geq 5$ , dann definiert für alle Knotenmengen  $W \subset V$  mit  $2 \leq |W| \leq n-2$  die Kurzzyklusbedingung

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$$

eine Facette von  $F_T^n$ .

Beweis:

Für  $|W| = 2$  und  $n \geq 5$  ist die Behauptung in Satz 37.1 bewiesen worden. Für  $|W| = n-2$  und  $n \geq 5$  folgt sie mit Satz 31.1 aus Lemma 37.2.

Sei  $3 \leq |W| = k+2 \leq n-3$ , o.B.d.A. sei  $W = \{n-k-1, n-k, \dots, n\}$ . Nach Satz 37.1 definiert  $a^0 x := x_{n-k-1, n-k} + x_{n-k, n-k-1} \leq 1$  eine Facette von  $P_T^{n-k}$ . Es ist  $(V_{a^0}, E_{a^0}) = (\{n-k-1, n-k\}, \{(n-k-1, n-k), (n-k, n-k-1)\})$ , also ist  $(V_{a^0}, E_{a^0})$  selbst eine maximale Clique.

Sei  $W_0 := \{n-k-1, n-k\}$ ,  $W_i := W_{i-1} \cup \{n-k+i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , dann gilt  $(V_{a^0}, E_{a^0}) = (W_0, E(W_0))$  und  $|W_0| = |W_1| = 2$ , d.h.  $(W_0, E(W_0))$  ist eine maximale Clique in  $(V_{a^0}, E_{a^0})$ , die Bedingung (a) von Satz 34.1 erfüllt, außerdem sind wegen  $a_{ij}^0 = 1 \quad \forall (i, j) \in E(W_0)$ ,  $a_{ij}^0 = 0$  sonst, auch die Bedingungen (b) und (c) von Satz 34.1 erfüllt. Folglich definiert aufgrund der in Satz 34.1 angegebenen Liftungsvorschrift die Ungleichung

$$a^1 x := \sum_{e \in E(W_1)} x_e \leq 2$$

eine Facette von  $P_T^{n-k+1}$ .

Der Digraph  $(W_1, E(W_1))$  ist eine maximale Clique in  $(V_{a^1}, E_{a^1})$ , die wiederum offensichtlich die Bedingungen (a), (b), (c) von Satz 34.1 erfüllt. Mithin definiert  $\sum_{e \in E(W_2)} x_e \leq 3$  eine Facette von  $P_T^{n-k+2}$ .

Auf diese Weise erhalten wir durch sukzessive Anwendungen von Satz 34.1, daß

$$\sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_i|$$

eine Facette von  $P_T^{n-k+i}$  ist. Aus  $W = W_k$  folgt die Behauptung.  $\square$

Damit können wir bereits alle Beziehungen zwischen dem Travelling Salesman Polytopen  $P_T^n$  und seinen "gutartigen Verwandten" dem Spanning Tree Polytopen, dem Branching Polytopen und dem Antibranching Polytopen vollständig aufklären und wissen somit, welche der Facetten dieser Polytope sich auf  $P_T^n$  "vererben". Vom Zuordnungspolytopen war aufgrund seiner einfachen Facettialstruktur (siehe Satz 27.3) außer den trivialen Facetten keine "Erbschaft" zu erwarten.

Satz 37.4.

(a) Bis auf die Kurzzyklusbedingungen  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  für  $|W| \in \{n-1, n\}$  definieren alle Facetten des Spanning Tree Polytopen  $Q_{ST}^n$  auch Facetten des Travelling Salesman Polytopen  $P_T^n$ . Jeweils zwei der Kurzzyklusbedingungen sind jedoch bezüglich  $P_T^n$  äquivalent, was nicht bezüglich  $Q_{ST}^n$  gilt.

(b) Abgesehen von den Kurzzyklusbedingungen  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  für  $|W| \in \{n-1, n\}$  und den Gradbeschränkungen  $\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V$  bzw.  $\sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V$  definieren alle Facetten des Branching Polytopen  $\check{P}_{B^-}$  bzw. des Antibranching Polytopen  $\check{P}_{B^+}$  auch Facetten von  $P_T^n$ . Wiederum sind genau zwei der Kurzzyklusbedingungen bezüglich  $P_T^n$  aber nicht bezüglich  $\check{P}_{B^-}$  bzw.  $\check{P}_{B^+}$  äquivalent.

Die Gradbeschränkungsfacetten  $\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1$  bzw.  $\sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V$  bezüglich  $\tilde{P}_{B^-}$  bzw.  $\tilde{P}_{B^+}$  enthalten den Polytopen  $P_T^n$  vollständig.

(c) Die Kurzzyklusbedingungen liefern insgesamt  $2^{n-1} - n - 1$  verschiedene Facetten von  $P_T^n$ ,  $n \geq 5$ .

Beweis:

(a) Siehe Folgerung 11.3, Satz 33.7, Lemma 37.2, Satz 37.3.

(b) Siehe Folgerung 29.6, Satz 33.7, Lemma 37.2, Satz 37.3.

(c)  $V$  enthält  $2^n$  verschiedene Teilmengen, davon liefern die leere Menge,  $V$ , die  $n$  einelementigen und die  $n(n-1)$ -elementigen Teilmengen von  $V$  keine Kurzzyklusfacetten von  $P_T^n$ . Alle übrigen  $2^n - 2n - 2$  Knotenmengen definieren nach Satz 37.3 Facetten von  $P_T^n$ . Nach Lemma 37.2 definieren jedoch genau zwei dieselbe Facette.  $\square$

In [Grötschel, Padberg, 1974] wurde bereits gezeigt, daß die Kurzzyklusbedingungen für 2 und 3 Knoten Facetten von  $P_T^n$  definieren, und es wurde vermutet, daß diese Eigenschaft für alle Kurzzyklusbedingungen gilt. Satz 37.3 beantwortet diese Vermutung positiv.

Wir zeigen nun, daß einige der C2-Kämme (siehe Definition 36.4) Facetten von  $P_T^n$  liefern.

Definition 37.5.

Sei  $W \subset V$ ,  $|W| = k$ ,  $w \in W$  und  $p, q \in V - W$ , dann heißt

$$\sum_{e \in E(W)} x_e + x_{pw} + x_{pq} + x_{wq} \leq k$$

eine  $T_k$ -Ungleichung.  $\square$

$T_k$ -Ungleichungen sind spezielle C2-Kammungleichungen für Kämme mit einelementigem Griff  $W_0 = \{w\}$  und genau einer Zinke  $W_1 = W$ . Daher sind  $T_k$ -Ungleichungen nach Satz 36.5 gültig bezüglich  $P_T^n$  und  $\tilde{P}_T^n$ . Beispiel 36.6 gibt eine  $T_4$ -Ungleichung mit  $W = \{1, 2, 3, 4\}$  an. Wir zeigen:

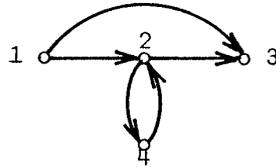
Satz 37.6.

$T_2$ -Ungleichungen liefern für  $n \geq 6$  Facetten von  $P_T^n$ .

Beweis:

O.B.d.A. zeigen wir die Behauptung für die Ungleichung:

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{42} \leq 2.$$



Folgende Typen von Touren erfüllen diese  $T_2$ -Ungleichung mit Gleichheit:

A:  $\langle 1, 2, 3, \alpha \rangle$ , B:  $\langle 1, \beta_1, 4, 2, 3, \beta_2 \rangle$ , C:  $\langle 1, 3, \beta_1, 2, 4, \beta_2 \rangle$ , D:  $\langle 1, 3, \beta_1, 4, 2, \beta_2 \rangle$ ,

E:  $\langle 1, 2, 3, \delta \rangle$ ,

wobei  $\alpha$  eine beliebige Anordnung der Knoten  $4, 5, \dots, n$  ist,  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  eine beliebige Anordnung der Knoten  $5, 6, \dots, n$  ist und  $\delta$  eine beliebige Anordnung von  $3, 5, 6, \dots, n$  ist.

Aus den Touren des Typs A konstruieren wir alle Ringschiffs zu  $\langle 3, 4, 5, \dots, n \rangle$  gemäß Satz 32.2 (siehe Bemerkung 32.3) und erhalten  $(n-2)(n-5)+2 = n^2-7n+12$  linear unabhängige Touren der Art  $\langle 1, 2, 3, \alpha \rangle$ .

Aus den übrigen Typen konstruieren wir  $n-2$  Touren im Falle des Typs B, und jeweils  $n-3$  Touren in den übrigen Fällen, die wir der Einfachheit halber auflisten. Dabei geben wir wieder zu jeder Tour den zu merkenden Spaltenindex (Bogen) an, dieser Bogen ist so gewählt, daß er in keiner bereits konstruierten Tour enthalten ist.

B) a)	$\langle 1, 4, 2, 3, 5, 6, \dots, n \rangle$	Spalte (1,4)
b)	$\langle 1, 5, 4, 2, 3, 6, 7, \dots, n \rangle$	" (1,5)
	$\langle 1, 6, 4, 2, 3, 7, \dots, n, 5 \rangle$	" (1,6)
	$\langle 1, 7, 4, 2, 3, 8, \dots, n, 5, 6 \rangle$	" (1,7)
	⋮	⋮
	$\langle 1, n, 4, 2, 3, 5, 6, \dots, n-1 \rangle$	" (1,n)
c)	$\langle 1, 5, 6, \dots, n, 4, 2, 3 \rangle$	" (3,1)
C) a)	$\langle 1, 3, 5, 6, \dots, n, 4, 2 \rangle$	Spalte (2,1)
b)	$\langle 1, 3, 4, 2, 5, 6, \dots, n \rangle$	" (2,5)
	$\langle 1, 3, 4, 2, 6, 7, \dots, n, 5 \rangle$	" (2,6)
	⋮	⋮
	$\langle 1, 3, 4, 2, n, 5, 6, \dots, n-1 \rangle$	" (2,n)

D) a)	$\langle 1, 3, 2, 4, 5, 6, \dots, n \rangle$	Spalte (3, 2)
b)	$\langle 1, 3, 6, 7, \dots, n, 5, 2, 4 \rangle$	" (5, 2)
	$\langle 1, 3, 7, 8, \dots, n, 5, 6, 2, 4 \rangle$	" (6, 2)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, 3, 5, 6, \dots, n, 2, 4 \rangle$	" (n, 2)
E) a)	$\langle 1, 2, 4, 3, 5, 6, \dots, n \rangle$	Spalte (4, 3)
b)	$\langle 1, 2, 4, 6, 7, \dots, n, 5, 3 \rangle$	" (5, 3)
	$\langle 1, 2, 4, 7, 8, \dots, n, 5, 6, 3 \rangle$	" (6, 3)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7, \dots, n, 3 \rangle$	" (n, 3)

Damit haben wir  $n^2 - 7n + 12 + n - 2 + 3(n - 3) = d_n$  Touren gefunden.

$$M = \begin{pmatrix} N_0 & N' \\ * & N_1 \end{pmatrix}$$

sei die Matrix, die durch diese Touren und die obige Spaltenauswahl definiert ist.

$N_0$  ist nach Satz 32.2 regulär.

Zu jeder unter B) - E) konstruierten Tour haben wir gerade eine solche Spalte  $(i, j)$  ausgewählt, die durch die bisher bestimmten Touren nur mit Nullelementen belegt ist. Folglich ist  $N'$  eine Nullmatrix. Nach Konstruktion ist ferner  $N_1$  eine untere Dreiecksmatrix mit 1-Elementen auf der Hauptdiagonalen, also  $|N_1| = 1$ . Daraus erhalten wir  $|M| = |N_0| |N_1| \neq 0$ , womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

#### Beispiel 37.7.

Für  $n = 6$  erhalten wir aus dem Konstruktionsverfahren des Satzes 37.6 folgende Touren und die folgende Matrix M:

	34	35	36	46	54	65	14	15	16	31	21	25	26	32	52	62	43	53	63	
<123456>	1																			
<123564>		1																		
<123645>			1																	
<123465>	1			1		1														
<123546>		1		1	1															
<123654>			1		1	1														
<142356>	1						1													
<154236>		1						1												
<164235>			1						1											
<156423>				1		1				1										
<135642>					1						1									
<134256>	1											1								
<134265>	1					1							1							
<132456>														1						
<136524>			1			1									1					
<135624>		1														1				
<124356>			1														1			
<124653>						1													1	
<124563>																				1

□

Lemma 37.8.

(a) Die  $T_2$ -Ungleichungen definieren Facetten von  $P_T^4$ .

(b) Die  $T_2$ -Ungleichungen definieren keine Facetten von  $P_T^5$ .

Beweis:

Sei die  $T_2$ -Ungleichung bezüglich  $P_T^4$  und  $P_T^5$  o.B.d.A. gegeben durch

$$(*) \quad x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{42} \leq 2.$$

(a) Die Inzidenzvektoren der folgenden 4-Touren erfüllen (\*) mit Gleichheit

$$\langle 1,2,3,4 \rangle, \langle 1,4,2,3 \rangle, \langle 1,3,2,4 \rangle, \langle 1,3,4,2 \rangle, \langle 1,2,4,3 \rangle.$$

Wie man leicht ausrechnet, sind diese linear unabhängig. Da  $\dim P_T^4 = 5$ , ist der Beweis erledigt.

(b)  $\dim P_T^5 = 11$ , d.h. falls (\*) eine Facette von  $P_T^5$  sein sollte, müßte es 11 linear unabhängige Touren geben, deren Inzidenzvektoren (\*) mit Gleichheit erfüllen. Wie man sich sofort überlegt - vergleiche die Tourenliste zu Beginn des Beweises von Satz 37.6 - gibt es jedoch nur 10 Touren, deren Inzidenzvektoren (\*) mit Gleichheit erfüllen. □



Beweis:

Für  $n = 5$  ist die Behauptung bereits in Lemma 37.8 bewiesen worden.

Sei  $W = \{2, 4, 5, \dots, n-1\}$  und die  $T_{n-3}$ -Ungleichung gegeben durch

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} + \sum_{e \in E(W)} x_e \leq n-3.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß alle Inzidenzvektoren von Touren, die die  $T_{n-3}$ -Ungleichung mit Gleichheit erfüllen, auch die (gültige) Ungleichung

$$(*) \quad x_{12} + 2x_{13} + x_{23} + 2x_{31} + x_{3n} + x_{n1} \leq 3$$

mit Gleichheit erfüllen. Dagegen erfüllt der Inzidenzvektor der Tour  $\langle n, 2, 3, 1, \alpha \rangle$  ( $\alpha$  beliebige Anordnung der restlichen  $n-4$  Knoten) die Ungleichung  $(*)$  mit Gleichheit aber nicht die  $T_{n-3}$ -Ungleichung. Folglich kann die  $T_{n-3}$ -Ungleichung keine Facette sein. Die Ungleichung  $(*)$  ist eine der Liftungen des Typs  $(c_4)$  aus Bemerkung 33.6 (c).  $\square$

Mit Hilfe der  $T_2$ -Ungleichungen, von denen wir bereits wissen, daß sie Facetten von  $P_T^n$ ,  $n \neq 5$ , definieren, und unter Benutzung der Liftungssätze aus § 34 können wir nun zeigen:

Satz 37.12.

(a) Ist  $n \geq 4$ ,  $v \in W \subset V$ ,  $|W| = k$ ,  $2 \leq k \leq n-2$ ,  $k \neq n-3$  und  $p, q \in V-W$ , dann definiert die  $T_k$ -Ungleichung

$$x_{pv} + x_{pq} + x_{vq} + \sum_{e \in E(W)} x_e \leq k$$

eine Facette von  $P_T^n$ .

(b) Sei  $n \geq 4$ .  $T_k$ -Ungleichungen liefern genau dann Facetten von  $P_T^n$ , wenn  $2 \leq k \leq n-2$ ,  $k \neq n-3$  gilt.

Beweis:

0) Für  $T_2$ -Ungleichungen ist die Behauptung in Satz 37.6 und Lemma 37.8 gezeigt worden. Daß  $T_{n-3}$ -Ungleichungen keine Facetten definieren, ergibt Bemerkung 37.11. Wenn wir (a) zeigen können, ist damit (b) bewiesen.

1) Ist  $ax := x_{pv} + x_{pq} + x_{vq} + x_{vw} + x_{wv} \leq 2$  eine  $T_2$ -Ungleichung,  $n \neq 5$ , dann induziert  $W = \{v, w\}$  eine maximale Clique in  $(V_a, E_a)$ . Mit den Bezeichnungen von 34.0 gilt  $\overset{0}{W} = \{w\}$  und  $a_{ij} = 1 \quad \forall (i, j) \in E_a$ . Folglich sind die Voraussetzungen (a), (b), (c) von Satz 34.2 erfüllt. Da  $p, q \in V-W$ , ist auch (d) erfüllt.

Es gilt  $(v, p), (q, v) \notin E_a$ , womit die Voraussetzungen (e), (f) von 34.2 erfüllt sind. Für den Knoten  $v \in W - \{w\}$  gilt  $a_{vw} = a_{wv} = 1$  und  $a_{pv} = a_{vq} = 1$ ,  $a_{iv} = a_{vi} = 0$  sonst, wegen  $a_{pq} = 1$  sind die Bedingungen (g) und  $(g_1)$  erfüllt.

Folglich können wir den Satz 34.2 auf  $T_2$ -Ungleichungen, falls  $n \neq 5$ , anwenden.

2) Sei nun o.B.d.A.  $W = \{1,2,\dots,k\}$ ,  $v = 1$  und  $p,q \in V-W$ . Sei  $2 \leq k \leq n-2$ ,  $k \neq n-3$ . Sei  $W_i := \{1,2,\dots,i\}$ ,  $i = 2,\dots,k$ . Die  $T_2$ -Ungleichung

$$ax := x_{p1} + x_{pq} + x_{1q} + \sum_{e \in E(W_2)} x_e \leq 2$$

ist nach Lemma 37.8 bzw. Satz 37.6 eine Facette von  $P_T^{n-k+2}$ , da  $n-k+2 \geq 4$  und  $n-k+2 \neq 5$ . Nach 1) können wir auf diese  $T_2$ -Ungleichung Satz 34.2 anwenden und den Knoten 3 zu  $W_2$  hinzufügen, woraus aufgrund der Liftungsvorschrift folgt, daß

$$x_{p1} + x_{pq} + x_{1q} + \sum_{e \in E(W_3)} x_e \leq 3$$

eine Facette von  $P_T^{n-k+3}$  ist.

Ohne Schwierigkeiten sehen wir, daß diese Facette alle Voraussetzungen von Satz 34.1 bezüglich der maximalen Clique  $(W_3, E(W_3))$  erfüllt und somit geliftet werden kann. Durch insgesamt  $k-3$  sequentielle Anwendungen von Satz 34.1 ergibt sich, daß

$$x_{p1} + x_{pq} + x_{1q} + \sum_{e \in E(W_k)} x_e \leq k$$

eine Facette von  $P_T^n$  ist. Aus  $W = W_k$  folgt die Behauptung.  $\square$

Für  $k = 2$  und  $k = n-2$  wurde Satz 37.12 bereits in [Grötschel, Padberg, 1974] gezeigt. Die dort geäußerte Vermutung, daß alle  $T_k$ -Ungleichungen Facetten von  $P_T^n$  liefern, beantwortet Satz 37.12 (b) in leicht modifizierter Form.

Bemerkung 37.13.

(a) Es ist einfach einzusehen (aber etwas umständlich zu beweisen), daß für  $n \geq 5$  je zwei verschiedene  $T_k$ -Ungleichungen und je zwei  $T_k$ - bzw.  $T_i$ -Ungleichungen,  $i \neq k$ , auch verschiedene Facetten von  $P_T^n$  liefern.

(b) Insgesamt liefern die  $T_k$ -Ungleichungen, falls  $n \geq 5$ ,

$$\sum_{k=2}^{n-4} 6 \binom{n}{3} \binom{n-3}{k-1} + 6 \binom{n}{3}$$

verschiedene Facetten von  $P_T^n$ .  $\square$

Das folgende Lemma stellt eine (nicht offensichtliche) Beziehung zwischen gewissen  $T_k$ -Ungleichungen und  $D_j$ -Ungleichungen (siehe 36.10) bezüglich des Polytopen  $P_T^n$  her.

Lemma 37.14.

Sei  $n \geq 4$ , dann ist jede  $D_3^-$ -Ungleichung äquivalent zu einer  $T_{n-2}$ -Ungleichung und umgekehrt.

Beweis:

Wir können annehmen, daß die  $D_3^-$ -Ungleichung die folgende Indizierung aufweist:

$$x_{12} + 2x_{21} + x_{23} + x_{31} \leq 2.$$

Wegen

$$x_{12} = 1 - \sum_{j=3}^n x_{1j} \quad \text{und} \quad x_{21} = 1 - \sum_{j=3}^n x_{2j}$$

erhalten wir

$$x_{21} + x_{23} + x_{31} \leq \sum_{j=3}^n (x_{1j} + x_{2j}),$$

und folglich wegen

$$x_{1j} + x_{2j} = 1 - \sum_{k=3}^n x_{kj}$$

$$x_{21} + x_{23} + x_{31} + \sum_{j=3}^n \sum_{k=3}^n x_{kj} \leq n-2.$$

Letztere Ungleichung ist aber von der behaupteten Form. Die Umkehrung ist offensichtlich ebenfalls richtig.  $\square$

Folgerung 37.15.

Für  $n \geq 4$  liefern alle  $D_3^-$ - und  $D_3^+$ -Ungleichungen Facetten von  $P_T^n$ .

Beweis:

Da die Menge der  $D_3^-$ -Ungleichungen gleich der Menge der  $D_3^+$ -Ungleichungen ist, folgt die Behauptung aus Lemma 37.14 mit Satz 37.12.  $\square$

Satz 37.16.

Alle  $D_4^-$ -Ungleichungen definieren Facetten von  $P_T^n$  für  $n \geq 5$ .

Beweis:

O.B.d.A. zeigen wir die Behauptung für die Ungleichung:

$$x_{12} + 2x_{21} + x_{23} + 2x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{41} \leq 3.$$

Die Inzidenzvektoren der folgenden Typen von Touren erfüllen diese Ungleichung mit Gleichheit:

A:  $\langle 1, \alpha, 2, 3 \rangle$ , B:  $\langle 1, \alpha, 3, 2 \rangle$ , C:  $\langle 1, 2, \alpha, 3 \rangle$ , D:  $\langle 1, \beta_1, 3, 4, \beta_2, 2 \rangle$ ,

E:  $\langle 1, \beta, 2, 3, 4 \rangle$ , F:  $\langle 1, 2, 3, \beta \rangle$ , G:  $\langle 1, 2, 3, \beta, 4 \rangle$ , H:  $\langle 1, 2, \beta, 3, 4 \rangle$ ,

wobei  $\alpha$  eine beliebige Anordnung der Knoten  $4,5,\dots,n$  und  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  eine beliebige Anordnung der Knoten  $5,6,\dots,n$  ist.

Aus den Touren des Typs A erzeugen wir alle linear unabhängigen Ringschiffs  $\pi$  zu  $\langle 1,4,5,\dots,n \rangle$ ; dann sind auch die Touren  $\langle \pi, 2, 3 \rangle$  linear unabhängig; wie üblich merken wir uns die zur Konstruktion der Matrix notwendigen Spalten. Auf diese Weise erhalten wir  $(n-2)(n-5)+2 = n^2-7n+12$  Touren und Spaltenindizes. Folgende Bögen sind in den bisher konstruierten Touren nicht enthalten:

- (1,2); (2,i) für  $i = 1,4,5,\dots,n$ ;
- (3,i) für  $i = 2,4,5,\dots,n$ ;
- (i,1) für  $i = 2,4,5,\dots,n$  und
- (i,3) für  $i = 1,4,5,\dots,n$ .

Die restlichen Touren werden nun so ausgewählt, daß genau einer der obigen Bögen vorkommt, während alle anderen Bögen nicht in dieser Menge enthalten sind.

Dazu konstruieren wir für den Typ B ausgehend von der Tour  $\langle 1,5,6,\dots,n,4,3,2 \rangle$   $n-3$  Touren des Ringschiffstyps 1 zu  $\langle 1,5,6,\dots,n,4 \rangle$  und merken uns die Spaltenindizes  $(j,3)$  für  $j = 4,\dots,n$ . Wir verfahren ebenso beim Typ C, indem wir von der Tour  $\langle 1,2,4,5,\dots,n,3 \rangle$  ausgehen und die Ringschiffs des Typs 1 zu  $\langle 2,4,5,\dots,n \rangle$  bilden. Als Spaltenindizes behalten wir  $(2,j)$  für  $j = 4,5,\dots,n$ . Vom Typ D wählen wir die Tour  $\langle 1,5,6,\dots,n,3,4,2 \rangle$  mit Spaltenindex  $(3,4)$  sowie die Tour  $\langle 1,3,4,5,\dots,n,2 \rangle$  mit Spaltenindex  $(1,3)$ . Vom Typ E nehmen wir die Tour  $\langle 1,5,6,\dots,n,2,3,4 \rangle$  und den Spaltenindex  $(4,1)$ .

Die restlichen  $2n-8$  erforderlichen Touren erzeugen wir aus Typ F und G wie oben: Ausgehend von der Tour  $\langle 1,2,3,4,6,7,\dots,n,5 \rangle$  vom Typ F konstruieren wir  $n-4$  Touren mittels der Ringschiffs des Typs 1 zu  $\langle 4,6,7,\dots,n,5 \rangle$  und merken uns die Spaltenindizes  $(j,1)$  für  $j = 5,\dots,n$ . Vom Typ G konstruieren wir  $n-4$  Touren ausgehend von  $\langle 1,2,3,5,6,\dots,n,4 \rangle$  mittels Schritt 1 des Ringschiffverfahrens zu  $\langle 3,5,6,\dots,n \rangle$  und merken uns die Spaltenindizes  $(3,j)$  für  $j = 5,6,\dots,n$ . Damit haben wir  $n^2 - 7n + 12 + 2(n-3) + 2(n-4) + 2 + 1 = d_n$  Touren gefunden und uns  $d_n$  Spaltenindizes aus der Matrix der Touren gemerkt. Auf diese Weise erhalten wir eine  $(d_n, d_n)$ -Matrix

$$M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ * & N_1 \end{pmatrix},$$

wobei  $N_0$  die gemäß dem Ringschiffverfahren gewonnene reguläre Matrix ist und  $N_1$  eine untere Dreiecksmatrix mit 1-Elementen auf der Hauptdiagonalen ist.

Da nach Konstruktion die rechte obere Blockmatrix eine Nullmatrix ist, folgt

$$|M| = |N_0| |N_1| \neq 0. \quad \square$$

Satz 37.17.

Alle  $D_4^+$ -Ungleichungen definieren Facetten von  $P_T^n$  für  $n \geq 5$ .

Beweis:

Aufgrund der ähnlichen Struktur von  $D_4^-$ - und  $D_4^+$ -Ungleichungen kann der Beweis völlig analog zum Beweis von Satz 37.16 geführt werden.  $\square$

Wie Lemma 37.14 eine Beziehung zwischen gewissen C2-Kammungleichungen (nämlich  $T_{n-2}$ -Ungleichungen) zu  $D_3^-$ -Ungleichungen herstellte, gibt das folgende Lemma eine Beziehung zwischen  $D_4^-$ -Ungleichungen und gewissen C3-Kammungleichungen (siehe 36.8) bezüglich des Polytopen  $P_T^n$  an.

Lemma 37.18.

Jede  $D_4^-$ -Ungleichung ist äquivalent zu einer C3-Ungleichung mit  $|W_1| = 2$  und  $|W_2| = n-3$  und umgekehrt.

Beweis:

Wir können annehmen, daß die  $D_4^-$ -Ungleichung die folgende Indizierung aufweist:

$$x_{12} + 2x_{21} + x_{23} + 2x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{41} \leq 3.$$

Wegen  $x_{21} + x_{23} = 1 - \sum_{j=4}^n x_{2j}$  und  $x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1 - \sum_{j=5}^n x_{3j}$

erhalten wir

$$x_{12} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 1 + \sum_{j=4}^n x_{2j} + \sum_{j=5}^n x_{3j}.$$

Da  $x_{2j} + x_{3j} = 1 - x_{1j} - \sum_{k=4}^n x_{kj}$  und  $x_{24} = 1 - x_{14} - x_{34} - \sum_{k=5}^n x_{k4}$ ,

folgt daraus

$$x_{12} + \sum_{k=4}^n x_{1k} + x_{21} + x_{31} + x_{34} + x_{41} + \sum_{k=4}^n \sum_{\substack{j=4 \\ j \neq k}}^n x_{kj} \leq n-2.$$

Letztere Ungleichung ist aber von der behaupteten Form mit  $W_1 = \{1,2\}$ ,  $W_2 = \{4, \dots, n\}$ . Die Umkehrung folgt ebenso.  $\square$

Folgerung 37.19.

Für  $n \geq 5$  definieren C3-Ungleichungen mit  $|W_1| = 2$ ,  $|W_2| = n-3$  Facetten von  $P_T^n$ .

Beweis:

Folgt aus Lemma 37.18 mit Satz 37.16.  $\square$

Um diese C3-Ungleichungen liften zu können, müssen wir uns überlegen, daß die Voraussetzungen der Liftungssätze erfüllt sind.

Lemma 37.20.

Seien  $\{i_1, i_2, i_3\} \subset V$ ,  $W_1, W_2 \subset V$  mit  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ ,  $W_1 \cap \{i_1, i_2, i_3\} = \{i_1\}$ ,  
 $W_2 \cap \{i_1, i_2, i_3\} = \{i_2\}$ ,  $|W_1| = 2$ ,  $|W_2| = n-3$ , und sei

$\alpha x := \sum_{e \in C^3} x_e \leq |W_1| + |W_2| - 1$  die zugehörige C3-Kammungleichung.

Dann ist  $(W_1, E(W_1))$  eine maximale Clique in  $(V_\alpha, E_\alpha)$  mit  $|W_1^0| = 1$ ; und  $i_1 \in W_1 - W_1$  erfüllt die Voraussetzungen (g), (g<sub>2</sub>) aus Satz 34.2.

Beweis:

Offensichtlich ist  $(W_1, E(W_1))$  eine maximale Clique in  $(V_\alpha, E_\alpha)$ , da  $E_\alpha = C^3$  (siehe Definition 36.7). Sei  $w$  der zweite Knoten in  $W_1$ , d.h.  $\{w\} = W_1$ .

Daß der Knoten  $i_1 \in W_1$  Bedingung (g) aus Satz 34.2 erfüllt, ist unmittelbar einsichtig. Wir zeigen, daß auch (g<sub>2</sub>) erfüllt ist.

1) Zu zeigen: Zu jedem Knoten  $i \in V - \{i_1, w\}$  existiert eine Tour T, deren Inzidenzvektor die C3-Ungleichung mit Gleichheit erfüllt und die den Weg  $[i_1, w, i]$  enthält.

Ist  $i \neq i_3$ , dann ist die Tour, die aus dem Weg  $[i_3, i_1, w, i]$ , einem Weg  $[i, \dots, j]$  durch alle Knoten aus  $W_2$  und dem Bogen  $(j, i_3)$  besteht, eine solche.

Ist  $i = i_3$ , dann wählen wir den Weg  $[i_1, w, i_3]$  und einen Weg  $[i_2, \dots, j]$  durch alle Knoten von  $W_2$ . Diese beiden Wege verknüpfen wir zu einer Tour  $\langle i_1, w, i_3, i_2, \dots, j \rangle$ , die die gewünschten Eigenschaften hat.

2) Zu zeigen: Zu jedem Knoten  $i \in V - \{i_1, w\}$  existiert eine Tour, deren Inzidenzvektor die C3-Kammungleichung mit Gleichheit erfüllt und die den Weg  $[i, w, i_1]$  enthält. Die Konstruktion verläuft ähnlich wie in 1) mit den Spezialfällen  $i = i_3$ ,  $i = i_2$ .  $\square$

Für die in Satz 36.8 angegebenen C3-Kammungleichungen können wir nun zeigen.

Satz 37.21.

Alle C3-Kammungleichungen mit  $|W_1| + |W_2| = n-1$  definieren Facetten von  $F_T^n$  für  $n \geq 5$ .

Beweis:

Sei nach Definition 36.7 ein C3-Kamm gegeben durch  $\{i_1, i_2, i_3\}$ ,  $W_1, W_2 \subset V$  mit  $|W_1| + |W_2| = n-1$ . Wir entfernen alle bis auf einen Knoten aus  $W_1 - \{i_1\}$ . Diese Menge sei  $W_1'$ . Die C3-Kammungleichung bezüglich  $\{i_1, i_2, i_3\}$ ,  $W_1'$ ,  $W_2$

liefert nach Folgerung 37.19 eine Facette von  $P_T^m$ ,  $m = n - |W_1| + 2$ .  
 Bezüglich dieser C3-Kammungleichung definiert nach Lemma 37.20  $W_1'$  eine maximale Clique, und  $i_1 \in W_1' - W_1'$  erfüllt ebenfalls nach Lemma 37.20 die Voraussetzungen  $(g_1)$ ,  $(g_2)$  von Satz 34.2. Alle übrigen Voraussetzungen von Satz 34.2 sind offensichtlich erfüllt. Wir können also einen der aus  $W_1$  entfernten Knoten  $v$  zu  $W_1'$  hinzufügen und erhalten einen C3-Kamm, der nach Satz 34.2 bezüglich  $P_T^{m+1}$  eine Facette definiert. Diese C3-Kammungleichung erfüllt bezüglich  $W_1' \cup \{v\}$  alle Voraussetzungen von Satz 34.1. Wir können nun mit Hilfe von Satz 34.1 diesen C3-Kamm sequentiell durch Hinzufügen der aus  $W_1$  entfernten Knoten so lange liften, bis wir die ursprüngliche C3-Kammungleichung erhalten. Satz 34.1 garantiert die Facettialeigenschaft.  $\square$

Satz 37.22.

*Für alle  $n \geq 5$  liefern die  $E_4$ -Ungleichungen Facetten von  $P_T^n$ .*

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung für die Ungleichung

$$2x_{12} + x_{14} + 2x_{21} + x_{23} + x_{31} + x_{42} \leq 3.$$

Die Inzidenzvektoren von folgenden Typen von Touren erfüllen diese Ungleichung mit Gleichheit:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| A: $\langle 1, 2, 3, \alpha \rangle$    | B: $\langle 1, 2, \alpha, 3 \rangle$      | C: $\langle 1, 4, \beta, 2 \rangle$     |
| D: $\langle 1, \beta, 4, 2 \rangle$     | E: $\langle 1, 4, 2, 3, \gamma \rangle$   | F: $\langle 1, 4, 2, \gamma, 3 \rangle$ |
| G: $\langle 1, 4, \gamma, 2, 3 \rangle$ | H: $\langle 1, \gamma, 4, 2, 3 \rangle$ , |   |

wobei  $\alpha$  eine beliebige Anordnung der Knoten  $4, 5, \dots, n$ ;  $\beta$  eine beliebige Anordnung von  $3, 5, 6, \dots, n$  und  $\gamma$  eine beliebige Anordnung von  $5, 6, \dots, n$  ist.

Aus den Touren des Typs A erzeugen wir beginnend mit  $\langle 1, 2, 3, 4, \dots, n \rangle$  die  $(n-5)(n-2)+2 = n^2 - 7n + 12$  linear unabhängigen Ringschiffs zu  $\langle 3, 4, \dots, n \rangle$ . Wie üblich merken wir uns zu jeder Tour einen Spaltenindex. Folgende Bögen sind in den bisher konstruierten Touren nicht enthalten:

- $(3, 1)$ ;
- $(1, i)$  für  $i = 3, \dots, n$ ;
- $(i, 2)$  für  $i = 3, \dots, n$ ;
- $(2, i)$  für  $i = 1, 4, 5, \dots, n$  und
- $(i, 3)$  für  $i = 1, 4, 5, \dots, n$ .

Aus den restlichen Touren B - H wählen wir nun solche aus, die einen dieser Bögen enthalten und deren Inzidenzvektoren eine untere Dreiecksmatrix ergeben.

B:	<1,2,4,...,n,3>	Spalte (2,4)
	<1,2,5,...,4,n,3>	" (2,5)
	⋮	⋮
	<1,2,n-1,4,5,...,n-2,n,3>	" (2,n-1)
E:	<1,4,2,3,5,6,...,n>	" (4,2)
G:	<1,4,6,7,...,n,5,2,3>	" (5,2)
	<1,4,7,...,n,5,6,2,3>	" (6,2)
	⋮	⋮
	<1,4,5,6,...,n,2,3>	" (n,2)
H:	<1,5,6,...,n,4,2,3>	" (1,5)
	<1,6,7,...,n,5,4,2,3>	" (1,6)
	⋮	⋮
	<1,n,5,6,...,n-1,4,2,3>	" (1,n)
C:	<1,4,n,3,5,6,...,n-1,2>	" (2,1)
	<1,4,3,n,5,6,...,n-1,2>	" (4,3)
	<1,4,3,5,6,...,n-1,n,2>	" (n,2)
B:	<1,2,n,5,6,...,n-1,4,3>	" (2,n)
F:	<1,4,2,n,6,7,...,n-1,5,3>	" (5,3)
	<1,4,2,n,7,...,n-1,5,6,3>	" (6,3)
	⋮	⋮
	<1,4,2,n,5,6,...,n-1,3>	" (n-1,3)
D:	<1,3,5,6,...,n,4,2>	" (1,3)

Listen wir die Touren und Spalten in der Reihenfolge der Konstruktion auf, so erhalten wir eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ * & N_1 \end{pmatrix},$$

wobei  $N_0$  die aus dem Ringschichtverfahren resultierende reguläre Matrix und

$N_1$  eine untere Dreiecksmatrix mit 1-Elementen auf der Hauptdiagonalen ist. Also ist  $|M| = |N_0| |N_1| \neq 0$ , womit die Behauptung gezeigt ist.  $\square$

Die Resultate bezüglich der Facettialstruktur von  $P_T^n$  erscheinen uns nicht so schön und übersichtlich wie die Ergebnisse bezüglich des symmetrischen Polytopen  $Q_T^n$  (siehe Satz 23.10).

Wir konnten in § 36 zwar viele verschiedene, große Klassen bezüglich  $P_T^n$  gültiger Ungleichungen angeben und in diesem Paragraphen von einigen Klassen zeigen, daß alle in ihnen enthaltenen Ungleichungen Facetten definieren, der Status aller bekannten Ungleichungen konnte jedoch nicht geklärt werden. Zum wesentlichen Teil liegt das daran, daß die Struktur der bekannten bezüglich  $P_T^n$  gültigen Ungleichungen recht kompliziert ist (etwa  $D_k^+$ ,  $D_k^-$ -Ungleichungen), daher einerseits die von uns entwickelten Liftungssätze 34.1, 34.2 für diese nicht anwendbar sind und dadurch andererseits ein direkter Nachweis der Facettialeigenschaft schwierig wird, was ja auch bereits für recht einfach strukturierte Ungleichungen keineswegs trivial ist, wie wir an einigen Beispielen in diesem Paragraphen gesehen haben. Von den analog zum symmetrischen Fall definierten Kammungleichungen (siehe 22.11, 36.2) konnten wir vermittels eines Computerprogramms numerisch zeigen, daß sie für "kleine n" keine Facetten definieren, wodurch ein "Induktionsbeweis" ähnlich dem symmetrischen Fall (Satz 23.7) aufgrund des fehlenden "Induktionsanfangs" unmöglich wurde. Daher konnten wir für  $P_T^n$  keine so gewaltig große (siehe Satz 24.5) und kombinatorisch einfach zu beschreibende Klasse wie die Kammungleichungen bezüglich  $Q_T^n$  ermitteln. Trotzdem zeigen die Ergebnisse dieses Paragraphen bereits, wie unglaublich viele Ungleichungen zum Restriktionensystem des Zuordnungspolytopen  $P_Z^n$ , dessen lineare Struktur so einfach ist (siehe Satz 27.1), hinzugefügt werden müssen, um diejenigen Ecken von  $P_Z^n$  abzuschneiden, die keine Touren im Digraphen  $K_n$  definieren, so daß keine weiteren Ecken entstehen. Der Übersichtlichkeit halber geben wir nun eine Zusammenfassung der in diesem Paragraphen erzielten Resultate:

Zusammenfassung 37.23.

(a) Für  $n \geq 5$  und  $2 \leq |W| \leq n-2$  liefern die Kurzzyklusbedingungen

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$$

Facetten von  $P_T^n$  (Satz 37.3).

Die Kurzzyklusbedingungen bezüglich  $W$  und  $V-W$  sind äquivalent (Lemma 37.2).

Damit sind fast alle Facetten des Spanning Tree Polytopen  $Q_{ST}^n$ , des Branching- und Antibranching-Polytopen  $\tilde{P}_{B^-}$ ,  $\tilde{P}_{B^+}$  auch Facetten von  $P_T^n$  (37.4, 11.3, 29.6).

- (b) Von keiner der Kammungleichungen (siehe 36.2)

$$\sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle$$

konnten wir zeigen, daß sie Facetten von  $P_T^n$  sind. Für Kämmen mit 3 Zinken und für  $n = 6, 7, 8$  haben wir von einem Computerprogramm alle Touren, die diese Kammungleichungen mit Gleichheit erfüllen, ausrechnen lassen und mit einem weiteren Programm den Rang der Matrix der Inzidenzvektoren dieser Touren berechnet. In keinem Fall hatte der Rang die erforderliche Größe. Das bedeutet, daß für "kleine" Kämmen und für "kleine"  $n$  Kammungleichungen keine Facetten von  $P_T^n$  liefern.

- (c) Bezüglich der C2-Kammungleichungen (siehe Satz 36.5) ist ähnliches wie bezüglich der Kammungleichungen zu sagen.

Die aus Kurzzyklusbedingungen gewonnenen C2-Kammungleichungen, die  $T_k$ -Ungleichungen, konnten wir jedoch vollständig klassifizieren, und zwar liefern diese außer im Falle  $k = n-3$  Facetten von  $P_T^n$  (Satz 37.12).

- (d) Von den C3-Kammungleichungen (siehe 36.7)

$$\sum_{e \in E(W_1)} x_e + \sum_{e \in E(W_2)} x_e + \sum_{j \in W_2} x_{i_1 j} + x_{i_2 i_1} + x_{i_3 i_1} + x_{i_3 i_2} \leq |W_1| + |W_2| - 1$$

konnten wir zeigen, daß diese im Falle  $|W_1| + |W_2| = n-1$  Facetten von  $P_T^n$  definieren (Satz 37.21).

Der Status der übrigen Ungleichungen ist offen.

- (e)  $D_k^-$ -Ungleichungen und  $D_k^+$ -Ungleichungen (siehe 36.10) liefern im Falle  $k = 3, 4$  Facetten von  $P_T^n$  (Sätze 37.15, 37.16, 37.17).

Es erscheint uns jedoch sehr wahrscheinlich, daß alle  $D_k^+$ - und  $D_k^-$ -Ungleichungen Facetten von  $P_T^n$  sind; jedoch wird sich das mit der hier demonstrierten Beweistechnik nicht so einfach beweisen lassen.

Darüberhinaus vermuten wir, daß sich von fast allen Liftungen von Kreisen der Länge  $< n$  (siehe etwa Bemerkung 33.5) zeigen lassen dürfte, daß sie Facetten von  $P_T^n$  definieren. Solange aber noch nicht einmal eine vollständige Klassifikation aller möglichen Liftungen von Kreisen vorhanden ist, wird sich dieser Nachweis nur für spezielle Klassen von Liftungen (etwa  $D_k^+$ ,  $D_k^-$ -Ungleichungen) führen lassen.

(f) Alle  $E_4$ -Ungleichungen liefern für  $n \geq 5$  Facetten (Satz 37.22).

Wie man aus dem Gültigkeitsbeweis (36.13) ersieht, ist dieser Ungleichungstyp aus Kurzzyklusbedingungen und  $D_3^-$ -Ungleichungen abgeleitet worden. Eine vielversprechende Möglichkeit, neue Ungleichungen eines ähnlichen Typs zu gewinnen, bietet sich durch geschickte Kombination von weiteren  $D_k^-$ -Ungleichungen,  $k \geq 3$ , an.

(g) Sei

$$R_T^n := \{x \in \mathbb{R}^{n^2-n} \mid (1) x \geq 0,$$

$$(2) Ax = 1,$$

(3)  $x$  erfüllt die Kurzzyklusbedingungen,

(4)  $x$  erfüllt die Kammungleichungen (siehe 36.2),

(5)  $x$  erfüllt die C2-Kammungleichungen (siehe 36.5),

(6)  $x$  erfüllt die C3-Kammungleichungen (siehe 36.8),

(7)  $x$  erfüllt die  $E_4$ -Ungleichungen (siehe 36.12),

(8)  $x$  erfüllt die durch Liftungen von Kreisen

gewonnenen Ungleichungen (siehe 33.4, 33.5, 36.10) ,

dann gilt

$$P_T^n \subset R_T^n .$$

Für größere  $n$  sind die beiden Polytope mit Sicherheit verschieden. Jedoch besitzt  $R_T^n$  nach den Ergebnissen dieses Paragraphen "recht viele" Facetten, die auch Facetten von  $P_T^n$  sind und scheint bereits eine "recht gute" Approximation von  $P_T^n$  zu sein. Wie für  $Q_T^n$  in Teil 4 demonstriert, dürfte es daher möglich sein,  $P_T^n$  lokal "gut" durch Facetten von  $R_T^n$  zu approximieren und mit LP-Verfahren asymmetrische Travelling Salesman Probleme zu lösen.  $\square$

#### Bemerkung 37.24.

Der historischen Vollständigkeit halber sei hier noch einmal auf die Abstracts [Heller,1953], [Kuhn,1955] hingewiesen. Heller berechnet die Dimension (Satz 32.2) korrekt und behauptet,  $P_T^5$  durch ein System von 224 Gleichungen und Ungleichungen vollständig beschreiben zu können. Kuhn gibt ein wesentlich größeres System an und bemerkt, daß dieses  $P_T^5$  vollständig und nicht redundant beschreibt. Trotz weiterer Literatursuche (siehe auch den Übersichtsartikel von [Gomory,1964]) konnten wir keine weitergehenden Untersuchungen über die Facettialstruktur der Polytope  $P_T^n$  finden.

Unter den Arbeiten, deren Zahl leider recht gering ist, über andere Eigenschaften von Travelling Salesman Polytopen haben wohl Padberg und Rao [1974]

das interessanteste Ergebnis erzielt, und zwar konnten sie zeigen, daß der Diameter von  $P_T^n$ ,  $n \geq 6$ , zwei ist, was besagt, daß, falls man "richtig" vorgeht, nur zwei Pivotoperationen notwendig sind, um von einer Ecke von  $P_T^n$  zu einer beliebigen anderen zu gelangen. Wenn man einfach beschreiben könnte, wie die "richtige" Strategie aussieht, wären somit asymmetrische Travelling Salesman Probleme einfach zu lösen.  $\square$

§ 38. Facetten von  $\tilde{P}_T^n$

Einige Facetten des monotonen asymmetrischen Travelling Salesman Polytopen  $\tilde{P}_T^n$  haben wir bereits in § 33 kennengelernt. So sind alle trivialen Ungleichungen  $x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E$  (Satz 33.1) und die Gradbeschränkungen  $\sum_{e \in \omega^+(i)} x_e \leq 1, \quad \sum_{e \in \omega^-(i)} x_e \leq 1 \quad \forall i \in V$  (Satz 33.2, 33.3) Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ . Desgleichen haben wir uns überlegt (Bemerkung 33.6 (a)), daß die Kurzzyklusbedingungen  $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$  auf 2 Knoten Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 3$ , definieren. Durch sequentielle Liftung mit dem Padbergschen Liftungsverfahren (Satz 6.4) konnten wir jedoch nicht zeigen, daß alle Kurzzyklusbedingungen Facetten liefern (siehe 33.5, 33.6). Zu diesem Nachweis wird uns nun Satz 35.1 dienen.

Satz 38.1.

*Die Kurzzyklusbedingungen*

$$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$$

*definieren Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ , falls  $2 \leq |W| \leq n-1$ ,  $n \geq 3$  gilt.*

Beweis:

Nach Bemerkung 33.6 (a) ist die Behauptung für  $|W| = 2$  richtig.

Sei  $2 < |W| \leq n-1$ , o.B.d.A.  $W = \{1,2,\dots,k\}$ . Nach 33.6 (a) definiert

$$ax := x_{12} + x_{21} \leq 1$$

eine Fac. von  $P_T^{n-k+2}$ ,  $n-k+2 \geq 3$ . Der von dieser Ungleichung induzierte Digraph ist die (maximale) Clique  $(\{1,2\}, \{(1,2), (2,1)\})$ . Diese erfüllt offensichtlich alle Voraussetzungen von Satz 35.1. Folglich ist aufgrund der in 35.1 angegebenen Liftungsvorschrift

$$\sum_{e \in E(\{1,2,3\})} x_e \leq 2$$

eine Facette von  $P_T^{n-k+3}$ .

Satz 35.1 können wir nun wieder auf diese Ungleichung anwenden. Durch weitere

k-3 Anwendungen von Satz 35.1 erhalten wir, daß  $\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$  eine Facette von  $P_T^n$  ist.  $\square$

Zusammen mit den Sätzen 33.1, 33.2, 33.3 erlaubt Satz 38.1 eine vollständige Angabe derjenigen Facetten, die  $\tilde{P}_T^n$  von den Polytopen  $\tilde{Q}_{ST}^n$ ,  $\tilde{P}_{B+}$  und  $\tilde{P}_{B-}$  "erbt"; das heißt, wir können die Frage beantworten, welche Eigenschaften der Facettialstruktur der Polytope der "gutartigen Verwandten" von  $\tilde{P}_T^n$  (siehe § 31) sich auf  $\tilde{P}_T^n$  übertragen.

Satz 38.2.

- (a) Alle nicht-trivialen Facetten von  $\tilde{Q}_S^n$  und damit bis auf  $\sum_{e \in E} x_e \leq n-1$  alle nicht-trivialen Facetten des Forest-Polytopen  $\tilde{Q}_{ST}^n$  auf dem vollständigen Digraphen mit  $n$  Knoten sind auch Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .
- (b) Bis auf  $\sum_{e \in E} x_e \leq n-1$  sind alle nicht-trivialen Facetten des Branching Polytopen  $\tilde{P}_{B-}$  und des Antibranching Polytopen  $\tilde{P}_{B+}$  auf dem vollständigen Digraphen  $K_n$  auch Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .
- (c) Die Kurzzyklusbedingungen liefern  $2^n - n - 2$  verschiedene Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .
- (d) Von den trivialen Facetten von  $\tilde{Q}_{ST}^n$ ,  $\tilde{P}_{B+}$ ,  $\tilde{P}_{B-}$  sind nur die Ungleichungen  $x_{ij} \geq 0$  für alle  $(i,j) \in E$  auch Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ . Die Ungleichungen  $x_{ij} \leq 1$  sind keine Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

- (a) Folgt aus Definition 16.1, Folgerung 10.4 und Satz 38.1.
- (b) Siehe Folgerung 29.6 und Satz 38.1.
- (c) Analog zu Folgerung 37.4 (c).
- (d) Siehe 33.1, 33.2, 33.3.  $\square$

Von den in 37.5 definierten  $T_k$ -Ungleichungen können wir - wie im Falle von  $P_T^n$  - zeigen, daß sie bezüglich  $\tilde{P}_T^n$  Facetten liefern. Wir bezeichnen wie üblich mit  $\tilde{T}_n$  die Menge aller Bogenmengen, die durch Hinzufügen von Bögen zu einer Tour ergänzt werden können.

Satz 38.3.

Für  $n \geq 4$  definieren alle  $T_2$ -Ungleichungen

$$x_{pw} + x_{pq} + x_{wq} + x_{vw} + x_{vw} \leq 2$$

$\{v,w,p,q\} \subset V$  Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

Die Inzidenzvektoren der folgenden Bogenmengen aus  $\tilde{T}_n$  erfüllen die angegebene Ungleichung mit Gleichheit und sind linear unabhängig:

$$\{(p,w),(w,v)\}, \{(p,q),(w,v)\}, \{(p,q),(v,w)\}, \{(v,w),(w,q)\}, \{(p,w),(w,q)\}.$$

Sei  $(i,j)$  ein Bogen, der verschieden von den fünf Bögen des induzierten Digraphen ist, dann gibt es offensichtlich eine Bogenmenge  $T$  unter den oben angegebenen fünf Bogenmengen, so daß  $T \cup \{(i,j)\} \in \tilde{T}_n$  ist.

Auf diese Weise haben wir  $|E|$  Bogenmengen aus  $\tilde{T}_n$  gefunden, deren Inzidenzvektoren die  $T_2$ -Ungleichung mit Gleichheit erfüllen und linear unabhängig sind, was zu zeigen war.  $\square$

Mit Hilfe der  $T_2$ -Ungleichungen als "Basis" liefern die Liftungssätze aus § 35 das gewünschte Resultat bezüglich aller  $T_k$ -Ungleichungen.

Satz 38.4.

Für  $n \geq 4$  und  $2 \leq k \leq n-2$  definieren alle  $T_k$ -Ungleichungen ( $v \in W \subset V$ ;  $|W| = k$ ;  $p, q \in V-W$ )

$$x_{pv} + x_{pq} + x_{vq} + \sum_{e \in E(W)} x_e \leq k$$

Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

1) Ist  $ax := x_{pv} + x_{pq} + x_{vq} + x_{vw} + x_{wv} \leq 2$  eine  $T_2$ -Ungleichung, dann definiert  $W = \{v,w\}$  eine maximale Clique in  $(V_a, E_a)$ . Mit den Bezeichnungen von 35.0 gilt  $\overset{0}{W} = \{w\}$ ,  $a_{ij} = 1 \quad \forall (i,j) \in E_a$ . Folglich sind die Bedingungen (a), (b), (c) von Satz 35.2 erfüllt. Der Knoten  $v$  ist aus  $W-\overset{0}{W}$ . Es ist  $(q,v), (v,p) \notin E_a$ . Die Wege  $[p,q,v,w]$  und  $[w,v,p,q]$  kann man zu einer Tour ergänzen, die die  $T_2$ -Ungleichung mit Gleichheit erfüllt. Folglich ist auch die Voraussetzung (d) von Satz 35.2 erfüllt, d.h. wir können Satz 35.2 auf die Facette  $ax \leq 2$  (Satz 38.3) anwenden.

2) Der Beweis verläuft nun völlig analog zum Beweis von Satz 37.12 Teil 2). Statt Lemma 37.8 und Satz 37.6 verwenden wir Satz 38.3. An die Stelle der Liftungssätze 34.1 und 34.2 treten die Liftungssätze 35.1 und 35.2. Da Satz 38.3 auch für  $n = 5$  gilt, kann die Behauptung auch für  $k = n-3$  gefolgert werden.  $\square$

Die  $T_{n-3}$ -Ungleichungen sind ein Beispiel dafür, daß Ungleichungen zwar Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ , aber nur niederdimensionale Seitenflächen von  $P_T^n$  definieren (siehe 37.11). Weitere Beispiele dieser Art werden uns durch die Kammungleichungen (siehe 36.1, 36.2) geliefert. Wie wir bereits in § 37 angemerkt haben,

haben wir für "kleine" Kammungleichungen und "kleine"  $n \in \mathbb{N}$  numerisch nachgewiesen, daß sie keine Facetten von  $P_T^n$  definieren, im Gegensatz dazu werden wir nun zeigen, daß gewisse "kleine" Kammungleichungen dennoch Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  liefern.

Satz 38.5.

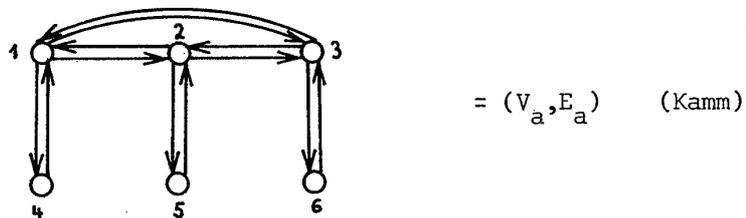
Für  $n \geq 6$  definieren Kämme mit dreielementigem Griff und drei zweielementigen Zinken Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

Sei o.B.d.A.  $W_0 = \{1,2,3\}$ ,  $W_1 = \{1,4\}$ ,  $W_2 = \{2,5\}$ ,  $W_3 = \{3,6\}$ .

$$ax := \sum_{i=0}^3 \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq 4.$$

Der von  $a$  induzierte Digraph  $(V_a, E_a)$  (Kamm) enthält zwölf Bögen. Wir geben nun zwölf Bogenmengen aus  $\tilde{T}_n$  (Wege bzw. Vereinigungen von Wegen in  $E_a$ ) an, deren Inzidenzvektoren  $ax \leq 4$  mit Gleichheit erfüllen. Diese Inzidenzvektoren fassen wir zu einer Matrix zusammen, von der man leicht nachprüfen kann, daß sie regulär ist, was die lineare Unabhängigkeit der Inzidenzvektoren beweist.



	12	25	41	36	63	23	31	32	13	52	14	21
$[4,1,2,5] \cup [3,6]$	1	1	1	1								
$[4,1,2,5] \cup [6,3]$	1	1	1		1							
$[4,1,2,3,6]$	1		1	1		1						
$[6,3,1,2,5]$	1	1			1		1					
$[6,3,2,5] \cup [4,1]$		1	1		1			1				
$[4,1,3,6] \cup [2,5]$		1	1	1					1			
$[4,1,3,6] \cup [5,2]$			1	1					1	1		
$[6,3,1,4] \cup [5,2]$					1	1			1	1		
$[5,2,1,4] \cup [3,6]$				1					1	1	1	
$[5,2,3,6] \cup [1,4]$			1		1				1	1		
$[4,1,3,2,5]$	1	1						1	1			
$[6,3,2,1,4]$				1				1		1	1	

Ist nun  $(i,j)$  ein Bogen, der in  $E - E_a$  liegt, so kann man sofort eine Bogenmenge  $T$  aus  $E_a$  angeben, so daß  $T_{ij} := T \cup \{(i,j)\} \in \tilde{T}_n$  gilt und daß der Inzidenzvektor von  $T_{ij}$   $ax \leq 4$  mit Gleichheit erfüllt. Die Inzidenzvektoren der zwölf oben angegebenen Bogenmengen sowie der Bogenmengen  $T_{ij}$ ,  $(i,j) \in E - E_a$  bilden ein System von  $|E|$  linear unabhängigen Vektoren, die  $ax \leq 4$  mit Gleichheit erfüllen, womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

Satz 38.6.

Für  $n \geq 7$  definieren die Kämme mit vierelementigem Griff und drei zweielementigen Zinken Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

Sei  $W_0 = \{1,2,3,4\}$ ,  $W_1 = \{1,5\}$ ,  $W_2 = \{2,6\}$ ,  $W_3 = \{3,7\}$ ,

$$ax := \sum_{i=0}^3 \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq 5.$$

$(V_a, E_a)$  enthält 18 Bögen. Wir geben 18 Bogenmengen aus  $\tilde{T}_n$  an, die in  $E_a$  enthalten sind, deren Inzidenzvektoren  $ax \leq 5$  mit Gleichheit erfüllen und die linear unabhängig sind. Die lineare Unabhängigkeit folgt aus der Regularität der folgenden Matrix.

	12	13	14	15	21	23	24	26	31	32	34	37	41	42	43	51	62	73
$[5,1,4,3,7] \cup [2,6]$			1					1				1		1	1			
$[5,1,4,3,7] \cup [6,2]$			1									1		1	1	1		
$[5,1,4,2,6] \cup [3,7]$			1				1					1		1		1		
$[5,1,4,2,6] \cup [7,3]$			1				1							1	1			1
$[6,2,4,3,7] \cup [1,5]$				1			1					1		1		1		
$[7,3,4,2,6] \cup [5,1]$								1			1			1		1		1
$[5,1,2,6] \cup [4,3,7]$	1							1				1		1	1			
$[5,1,3,7] \cup [4,2,6]$		1						1				1		1		1		
$[5,1,3,7] \cup [6,2,4]$		1					1					1				1	1	
$[6,2,3,7] \cup [5,1,4]$			1			1						1				1	1	
$[7,3,2,6] \cup [5,1,4]$			1				1	1								1		1
$[5,1,4,2,3,7]$			1			1						1		1		1		
$[6,2,3,4,1,5]$				1		1					1		1					1
$[5,1,3,4,2,6]$		1						1			1			1		1		
$[6,2,1,4,3,7]$			1		1							1			1			1
$[7,3,4,1,2,6]$	1							1			1		1					1
$[6,2,4,1,3,7]$		1					1					1	1					1
$[7,3,1,4,2,6]$			1					1	1					1				1

Der restliche Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 38.5.  $\square$

Leider läßt sich der Liftungssatz 35.2 auf die maximale Clique  $(W_0, E(W_0))$  des in Lemma 38.6 angegebenen Kammes  $(V_a, E_a)$  nicht anwenden, da die Voraussetzung (d) für keinen der Knoten  $v \in \{1, 2, 3\} = W_0 - \overset{\circ}{W}_0$  gezeigt werden kann. Wir benötigen daher einen weiteren

Satz 38.7.

Für  $n \geq 8$  definieren Kämme mit fünfelementigem Griff und drei zweielementigen Zinken Facetten von  $\tilde{T}_T^n$ .

Beweis:

Sei  $W_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $W_1 = \{1, 6\}$ ,  $W_2 = \{2, 7\}$ ,  $W_3 = \{3, 8\}$ ,

$$ax := \sum_{i=0}^3 \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq 6.$$

$(V_a, E_a)$  enthält 26 Bögen. Im folgenden geben wir 26 Bogenmengen aus  $\tilde{T}_n$  an, deren Bögen in  $E_a$  liegen, deren Inzidenzvektoren  $ax \leq 6$  mit Gleichheit erfüllen und linear unabhängig sind. Wir listen die zugehörige Matrix auf, von der man leicht sehen kann, daß sie regulär ist.

	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
[7,2,4,5,1,6] $\cup$ [3,8]									1	1							1	1						
[7,2,4,5,1,6] $\cup$ [8,3]									1	1							1	1						
[7,2,4,5,3,8] $\cup$ [1,6]									1								1							
[7,2,4,5,3,8] $\cup$ [6,1]									1								1							
[6,1,4,5,3,8] $\cup$ [7,2]									1								1							
[6,1,4,5,3,8] $\cup$ [2,7]									1								1							
[4,5,3,8] $\cup$ [6,1,2,7]	1								1								1							
[4,5,3,8] $\cup$ [7,2,1,6]									1	1							1							
[4,5,1,6] $\cup$ [7,2,3,8]									1	1							1	1						
[4,5,1,6] $\cup$ [8,3,2,7]									1								1	1						
[7,2,4,5] $\cup$ [6,1,3,8]									1								1							
[7,2,4,5] $\cup$ [8,3,1,6]									1								1							
[6,1,5,3,8] $\cup$ [7,2,4]									1								1							
[7,2,4,1,6] $\cup$ [5,3,8]									1								1							
[5,4,1,6] $\cup$ [7,2,3,8]									1								1							
[6,1,4,2,7] $\cup$ [5,3,8]									1								1							
[8,3,5,4,1,6] $\cup$ [2,7]									1								1							
[4,1,6] $\cup$ [7,2,5,3,8]									1								1							
[4,1,6] $\cup$ [8,3,5,2,4]									1								1							
[5,2,7] $\cup$ [6,1,4,3,8]									1								1							
[5,2,7] $\cup$ [8,3,4,1,6]									1								1							
[6,1,4,5,2,3,8]									1								1							
[6,1,3,8] $\cup$ [5,4,2,7]									1								1							
[6,1,5,4,2,7] $\cup$ [3,8]									1								1							
[6,1,4,5,3,2,7]									1								1							
[7,2,1,4,5,3,8]									1								1							

Ist  $(i,j) \notin E_a$ , so findet man ohne Schwierigkeiten sechs Bögen  $T \subset E_a$ , so daß  $T_{ij} := T \cup \{(i,j)\} \in \tilde{T}_n$  gilt. Der Inzidenzvektor von  $T_{ij}$  erfüllt  $ax \leq 6$  mit Gleichheit. Die Inzidenzvektoren der so konstruierten Bogenmengen  $T_{ij}$  zusammen mit den oben angegebenen 26 Inzidenzvektoren sind linear unabhängig und leisten das Gewünschte.  $\square$

Wir überlegen uns nun, daß die zweielementigen Zinken eines Kammes die Voraussetzungen (a), (b), (c), (d) von Satz 35.2 erfüllen.

Lemma 38.8.

Sei durch  $W_0, W_1, \dots, W_k$  ein Kamm definiert, und die zugehörige Kammgleichung

$$ax := \sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq s(C)$$

sei eine Facette eines der Polytope  $\tilde{F}_T^n$ . Sei  $|W_i| = 2$  für ein  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $W_i = \{v, w\}$  und  $\{v\} = W_0 \cap W_i$ . Dann ist  $(W_i, E(W_i))$  eine maximale Clique von  $(V_a, E_a)$ , die alle Voraussetzungen von Satz 35.2 erfüllt.

Beweis:

Es ist  $W_0 = \{w\}$  und  $a_{vw} = a_{wv} = 1$ , desgleichen gilt  $a_{vi} = a_{iv} = 1 \quad \forall i \in W_0 - \{v\}$  und  $a_{vi} = a_{iv} = 0$  sonst, damit sind die Bedingungen (a), (b), (c) von Satz 35.2 erfüllt.

Sei o.B.d.A.  $W_1 = W_1$ . Sei  $P_i := [v_1^i, \dots, v_{n_1}^i]$ ,  $i \in \{2, \dots, k\}$ .

Ist  $i$  gerade, dann sei  $P_i$  ein Weg, der zunächst durch alle Knoten von  $W_0 \cap W_i$  und dann durch alle Knoten von  $W_i - W_0$  läuft und in einem der Knoten aus  $W_i - W_0$  endet.

Ist  $i$  ungerade, dann verlaufe  $P_i$  zunächst durch alle Knoten aus  $W_i - W_0$  und dann durch alle Knoten aus  $W_i \cap W_0$ .

Falls  $W_0 - \bigcup_{i=1}^k W_i \neq \emptyset$ , dann sei  $P_0$  ein Weg durch alle diese Knoten.

$P$  sei ein Weg durch die Knoten  $V - \bigcup_{i=0}^k W_i$ , falls es solche gibt.

Es ist dann

$$T_1 := \langle v, w, P, P_k, P_{k-1}, \dots, P_3, P_0, P_2 \rangle$$

eine Tour, deren Inzidenzvektor  $ax \leq s(C)$  mit Gleichheit erfüllt und die den Weg  $[v_{n_2}^2, v, w]$  enthält, wobei  $(v_{n_2}^2, v) \notin E_a$ , da  $v_{n_2}^2 \in W_2 - W_0$ .

Sei  $T_2 := \langle w, v, P_k, P_{k-1}, \dots, P_3, P_0, P_2, P \rangle$ ,

dann erfüllt der Inzidenzvektor von  $T_2$   $ax \leq s(C)$  ebenfalls mit Gleichheit und

$T_2$  enthält den Weg  $[w, v, v_1^k]$ , wobei  $(v, v_1^k) \notin E_a$ , da  $v_1^k \in W_k - W_0$ .

Mithin ist auch die Bedingung (d) von Satz 35.2 erfüllt.  $\square$

Mit Hilfe der vorhergehenden Überlegungen und der Liftungssätze aus § 35 können wir nun zeigen.

Satz 38.9.

Alle Kämmе mit drei Zinken, die nur einen Knoten im Griff haben, definieren Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  für  $n \geq 6$ .

Genauer: Sei  $n \geq 6$ , seien  $W_0, W_1, W_2, W_3 \subset V$ ,  $C = \bigcup_{i=0}^3 E(W_i)$  und

$$(a) |W_0 \cap W_i| = 1 \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(b) |W_i - W_0| \geq 1 \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(c) W_i \cap W_j = \emptyset \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$

dann definiert die Kammungleichung

$$\sum_{e \in C} x_e = \sum_{i=0}^3 \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^3 (|W_i| - 1) - 2$$

eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

a) Für die Kämmе mit 3 zweielementigen Zinken und einem Griff, der 3, 4 oder 5 Knoten enthält, ist die Behauptung in den Sätzen 38.6, 38.7, 38.8 gezeigt worden.

b) Sei durch  $W_0, W_1, W_2, W_3$  ein Kamm mit den in Satz 38.9 geforderten Eigenschaften gegeben. Sei  $|W_i| = k_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

c) Wir nehmen an, daß der Satz bereits für alle Kämmе mit drei  $k_i$ -elementigen Zinken und einem Griff, der  $k_0 - 1$  Knoten enthält, gezeigt wurde. Wir zeigen, daß dann auch dieser Kamm eine Facette definiert.

Sei o.B.d.A.  $W_0 = \{1, \dots, k_0\}$ ,  $k_0 \geq 6$ ,  $W'_0 = \{1, \dots, k_0 - 1\}$ , und sei  $i \in W_0 \cap W_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Der durch  $W'_0, W_1, W_2, W_3$  definierte Kamm liefert nach Voraussetzung eine Facette von  $\tilde{P}_T^{n-1}$ . Es ist  $(W'_0, E(W'_0))$  eine maximale Clique dieses Kammes und  $|W'_0| = |\{1, \dots, k_0 - 1\}| \geq 2$ . Offensichtlich sind bezüglich dieser maximalen Clique alle Voraussetzungen von Satz 35.1 erfüllt. Fügen wir  $k_0$  zu  $W'_0$  wie in Satz 35.1 angegeben hinzu, dann erhalten wir eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$ . Diese ist aber gerade die betrachtete Kammungleichung bezüglich  $W_0, W_1, W_2, W_3$ .

d) O.B.d.A. nehmen wir an, daß der Satz bereits gezeigt ist für alle Kämmе mit  $k_0$  Knoten im Griff,  $k_1 - 1 \geq 2$  Knoten in der ersten Zinke und  $k_2, k_3$  Knoten

in den beiden anderen Zinken. Sei  $W_1 = \{1, 2, \dots, k_1\}$ ,  $W'_1 = W_1 - \{k_1\}$ ,  $\{1\} = W_0 \cap W_1$ . Nach Annahme definiert die durch  $W_0, W'_1, W_2, W_3$  gegebene Kammungleichung eine Facette von  $\tilde{P}_T^{n-1}$ .

d<sub>1</sub>) Ist  $|W'_1| = 2$ , dann ist  $(\{1, 2\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$  eine maximale Clique des zugehörigen Kammes. Diese erfüllt nach Lemma 38.8 alle Voraussetzungen von Satz 35.2. Satz 35.2 angewandt auf diese maximale Clique liefert, daß die durch  $W_0, W_1, W_2, W_3$  gegebene Kammungleichung eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$  definiert.

d<sub>2</sub>) Ist  $|W'_1| \geq 3$ , dann ist  $|\overset{0}{W}'_1| \geq 2$ , und es sind offensichtlich alle Voraussetzungen von Satz 35.1 bezüglich der maximalen Clique  $(W'_1, E(W'_1))$  erfüllt. Auf diese Clique angewandt ergibt Satz 35.1, daß die ursprüngliche Kammungleichung eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$  definiert

Auf diese Weise ist induktiv gezeigt, daß alle betrachteten Kammungleichungen Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  liefern.  $\square$

Wenden wir uns nun den in 36.7 definierten C3-Kämmen zu. Um die Liftungsätze anwenden zu können, zeigen wir zunächst:

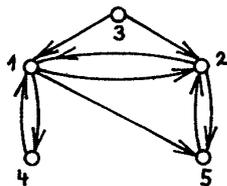
Satz 38.10.

C3-Kämme mit  $|W_1| = |W_2| = 2$  definieren Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  für  $n \geq 5$ .

Beweis:

Sei o.B.d.A.  $W_1 = \{1, 4\}$ ,  $W_2 = \{2, 5\}$ ,  $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$ , dann lautet die zugehörige C3-Ungleichung

$$ax := x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{21} + x_{25} + x_{31} + x_{32} + x_{41} + x_{52} \leq 3.$$



C3-Kamm

Wir geben 9 Bogenmengen aus  $\tilde{T}_n$  an, die im C3-Kamm  $(V_a, E_a)$  liegen, deren Inzidenzvektoren die C3-Ungleichung mit Gleichheit erfüllen und linear unabhängig sind.

	1	2	3	4	5
$[3, 1, 4] \cup [2, 5]$	1	1	1		
$[3, 1, 4] \cup [5, 2]$	1		1		1
$[3, 1, 2, 5]$	1		1	1	
$[3, 1, 5, 2]$		1		1	1
$[4, 1, 5, 2]$		1			1
$[5, 2, 1, 4]$	1	1			1
$[3, 2, 1, 4]$	1	1		1	
$[3, 2, 5] \cup [4, 1]$			1	1	1
$[3, 2, 5] \cup [1, 4]$	1	1	1		

Ist  $(i, j)$  ein Bogen, der nicht in diesem C3-Kamm enthalten ist, so findet man ohne Schwierigkeiten drei Bögen  $T$  aus dem C3-Kamm, so daß  $T \cup \{(i, j)\} = T_{ij} \in \tilde{T}_n$  ist. Die oben angegebenen neun Bogenmengen zusammen mit den  $T_{ij}$  bilden ein System von Bogenmengen aus  $\tilde{T}_n$ , deren Inzidenzvektoren die C3-Ungleichung mit Gleichheit erfüllen und linear unabhängig sind. Damit ist alles gezeigt.  $\square$

Lemma 38.11.

Sei ein C3-Kamm durch  $\{i_1, i_2, i_3\}$ ,  $W_1, W_2 \subset V$  gegeben. Sei  $|W_1| = 2$ . Dann ist  $(W_1, E(W_1))$  eine maximale Clique des C3-Kammes, die die Bedingungen (a), (b), (c) von Satz 35.2 erfüllt, und der Knoten  $i_1 \in W_1$  erfüllt die Bedingung (d) von Satz 35.2.

Beweis:

Sei o.B.d.A.  $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, W_1 = \{1, 4\}$  und  $W_2 = \{5, \dots, k\}$ . Es ist (siehe Bezeichnungen 35.0)  $\overset{0}{W}_1 = \{4\}$  und  $\{1\} = W_1 - \overset{0}{W}_1$ . Nach Definition gilt  $a_{41} = a_{14} = 1, a_{4i} = a_{i4} = 0 \quad \forall i \in V - \{1, 4\}$ . Daraus folgt, daß die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllt sind. Die Tour  $T = \langle 3, 2, 5, 6, \dots, k, \dots, n, 1, 4 \rangle$  enthält den Weg  $[n, 1, 4]$  mit  $(n, 1) \notin E_a$ . Ihr Inzidenzvektor erfüllt die C3-Ungleichung mit Gleichheit. Das gleiche gilt für die Tour

$$S = \langle 3, 2, 5, \dots, k, \dots, n, 4, 1 \rangle,$$

die den Weg  $[4, 1, 3]$  enthält mit  $(1, 3) \notin E_a$ . Damit ist (d) gezeigt.  $\square$

Durch Anwendung der Liftungssätze können wir nun für einen Teil der C3-Kämme zeigen, daß sie Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  definieren.

Satz 38.12.

Sei durch  $\{i_1, i_2, i_3\}$ ,  $W_1, W_2 \subset V$  ein C3-Kamm definiert. Gilt  $|W_2| = 2$ , dann definiert die C3-Ungleichung

$$x_{i_2 i_1} + x_{i_3 i_1} + x_{i_3 i_2} + \sum_{i \in W_2} x_{i i} + \sum_{e \in E(W_1)} x_e + \sum_{e \in E(W_2)} x_e \leq |W_1| + |W_2| - 1$$

eine Facette von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 5$ .

Beweis:

Nach Satz 38.10 gilt die Behauptung bezüglich  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 5$ , für C3-Kämme mit  $|W_1| = |W_2| = 2$ .

$(W_1, E(W_1))$  ist eine maximale Clique des C3-Kammes und erfüllt nach Lemma 38.11 alle Voraussetzungen von Satz 35.2. Folglich können wir diese Facette gemäß Satz 35.2 liften. Die neue Facette von  $\tilde{P}_T^{n+1}$  ist aber gerade ein C3-Kamm definiert durch  $\{i_1, i_2, i_3\}$ ,  $W_2, W'_1 := W_1 \cup \{n+1\}$  mit  $|W'_1| = 3$ . Es ist offensichtlich, daß die maximale Clique  $(W'_1, E(W'_1))$  alle Bedingungen von Satz 35.1

erfüllt, also wiederum geliftet werden kann. Die nun gemäß Satz 35.1 geliftete Facette ist eine C3-Ungleichung mit  $|W_1''| = 4$ . Durch wiederholte Anwendung von Satz 35.1 erhalten wir das gewünschte Ergebnis.  $\square$

Satz 38.13.

Seien  $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} \subset V$  und  $n = |V| \geq 5$ . Dann definieren alle  $E_4$ -Ungleichungen

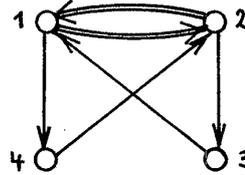
$$2x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_4} + 2x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} + x_{i_4 i_2} \leq 3$$

Facetten von  $\tilde{F}_T^n$ .

Beweis:

Der durch die  $E_4$ -Ungleichung induzierte Unterdigraph  $(V_a, E_a)$  enthält sechs Bögen. Wir geben sechs Wege aus  $\tilde{T}_n$  an, deren Inzidenzvektoren die  $E_4$ -Ungleichung mit Gleichheit erfüllen und linear unabhängig sind. Dabei sei o.B.d.A.

$$i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4.$$



	12	21	14	23	31	42
[1,2,3]	1			1		
[3,1,2]	1					1
[2,3,1,4]			1	1	1	
[2,1,4]		1	1			
[4,2,1]		1				1
[1,4,2,3]			1	1		1

Wie üblich ist es völlig trivial, zu jedem Bogen  $(i,j) \in E_a$  eine Bogenmenge  $T \subset E_a$  zu finden, so daß  $T_{ij} := T \cup \{(i,j)\} \in \tilde{T}_n$  und daß der Inzidenzvektor von  $T_{ij}$  die  $E_4$ -Ungleichung mit Gleichheit erfüllt. Die sechs angegebenen Bogenmengen zusammen mit den Bogenmengen  $T_{ij}$  sind linear unabhängig, womit die Behauptung gezeigt ist.  $\square$

Zur Untersuchung der  $D_k^+$ - und  $D_k^-$ -Ungleichungen (siehe 36.10) können unsere Liftungssätze 35.1 und 35.2 nicht verwendet werden, da die von diesen Ungleichungen induzierten Digraphen keine Cliques besitzen. Statt dessen verhilft uns das Padbergsche Liftungsverfahren (Satz 6.4) zum gewünschten Ergebnis.

Satz 38.14.

Sei  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset V$ ,  $3 \leq k \leq n-1$ , dann gilt:

(a) Alle  $D_k^-$ -Ungleichungen

$$\sum_{j=1}^{k-1} x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_k i_1} + 2 \sum_{j=2}^{k-1} x_{i_j i_1} + \sum_{j=3}^{k-1} \sum_{h=2}^{j-1} x_{i_j i_h} \leq k-1$$

definieren Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .

(b) Alle  $D_k^+$ -Ungleichungen

$$\sum_{j=1}^{k-1} x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_k i_1} + 2 \sum_{j=3}^k x_{i_1 i_j} + \sum_{j=4}^k \sum_{h=3}^{j-1} x_{i_j i_h} \leq k-1$$

definieren Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .

Beweis:

Wir geben eine kurze Beweisskizze für (a), die Behauptung folgt für (b) analog. Sei o.B.d.A.  $i_j = j$  für  $j = 1, \dots, k$ , dann ist  $\langle 1, 2, \dots, k \rangle$  ein Kreis der Länge  $k < n$ . Sei  $K$  die Menge der Bögen des Kreises. In § 33 haben wir uns überlegt, daß dieser Kreis eine Primimplikante der Resolvente  $\tilde{\rho}$  von  $\tilde{T}_n$  definiert. Nach Satz 6.5 ist dann

$$\sum_{e \in K} x_e = \sum_{i=1}^{k-1} x_{i, i+1} + x_{k1} \leq k-1$$

eine Facette des Polytopen

$$\tilde{P}_T^n(E-K) = \tilde{P}_T^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_e = 0 \ \forall e \in E-K\}).$$

Mit Hilfe von Satz 6.4 können wir diese Facette sequentiell zu einer Facette von  $\tilde{P}_T^n$  liften. Liften wir zunächst die Variable  $x_{21}$ , dann ist nach Lemma 33.5 der Liftungskoeffizient gleich 2. Folglich ist

$$2 x_{21} + \sum_{e \in K} x_e \leq k-1$$

eine Facette von  $\tilde{P}_T^n(E-(K \cup \{(2,1)\}))$ . Die Argumentation von Lemma 33.5 ist auch für die weiteren sequentiellen Liftings der Variablen  $x_{j1}$ ,  $j = 3, \dots, k-1$ , korrekt, da keiner der Bögen  $(j,1)$  zusammen mit einem anderen Bogen  $(i,1)$  in einer Tour auftreten kann, folglich ist

$$2 \sum_{j=2}^{k-1} x_{j1} + \sum_{e \in K} x_e \leq k-1$$

eine Facette von  $\tilde{P}_T^n(E-(K \cup \{(j,1) \mid j \in \{2, \dots, k-1\}\}))$ .

Wählen wir nun eine der Variablen  $x_{ji}$ ,  $j, i \in \{3, \dots, k-1\}$ ,  $j > i$ , so kann - wie man sich leicht überlegt - eine Tour, die  $(j,i)$  enthält, entweder einen der Bögen  $(h,1)$  und höchstens  $k-4$  andere Bögen des Kreises  $K$  oder Diagonalen enthält oder sie enthält keinen Bogen  $(h,1)$  und höchstens  $k-2$  Bögen des Kreises

oder der Diagonalen von  $K$ , woraus sich ergibt, daß der Liftungskoeffizient aller dieser Variablen bei Liftung in irgendeiner Reihenfolge jeweils 1 ist. Der Liftungskoeffizient aller anderen Variablen ist 0, da eine Tour existiert, die diesen Bogen, einen Bogen  $(i,1)$  und  $k-3$  andere Bögen des Kreises bzw. Bögen des Typs  $(j,i)$ ,  $i, j \in \{3, \dots, k-1\}$ ,  $j > i$ , enthält. Folglich ergibt das Padbergsche Liftungsverfahren, daß die  $D_k^-$ -Ungleichungen Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  sind.  $\square$

Fassen wir die Resultate über die Facettialstruktur von  $\tilde{P}_T^n$  zusammen, so ergibt sich folgendes Bild.

Zusammenfassung 38.15.

(a) Die trivialen Ungleichungen

$x_{ij} \geq 0$

sind Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 3$ , für alle  $(i,j) \in E$  (Satz 33.1).

(b) Die Gradbeschränkungen

$\sum_{e \in \omega^-(v)} x_e \leq 1$  ,  $\sum_{e \in \omega^+(v)} x_e \leq 1$

sind für alle  $v \in V$  Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 3$  (Sätze 33.2, 33.3).

Damit sind alle Facetten des monotonen Zuordnungspolytopen  $\tilde{P}_Z^n$  (siehe Satz 27.1) auch Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ .

(c) Die Kurzzyklusbedingungen

$\sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1$

sind für alle  $W \subset V$ ,  $2 \leq |W| \leq n-1$ , Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 3$  (Satz 38.1).

D.h. daß fast alle Facetten des Forest Polytopen  $\tilde{Q}_{ST}^n$  (10.4), des Branching- und Antibranching Polytopen (29.6) Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  sind (siehe 38.2).

(d) Natürlich sind alle Liftungen von Primimplikantenungleichungen Facetten von  $\tilde{P}_T^n$  (siehe § 33). Wir konnten jedoch keine geschlossene Form aller Liftungen finden (siehe Bemerkung 33.6), haben aber nachgewiesen, daß alle  $D_k^-$ - und  $D_k^+$ -Ungleichungen (36.10) Liftungen von Primimplikanten und somit Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 4$ , sind (Satz 38.14).

(e) Wir konnten zeigen (Satz 38.9), daß die von den Kämmen mit drei Zinken, die nur einen Knoten im Griff haben, induzierten Kammungleichungen

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq |W_0| + \sum_{i=1}^3 (|W_i| - 1) - 2$$

Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 6$ , definieren. Wir vermuten jedoch, daß alle Kammungleichungen Facetten liefern.

(f) Von allen  $T_k$ -Ungleichungen (37.5)

$$x_{pv} + x_{pq} + x_{vq} + \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W|,$$

einem speziellen Typ der C2-Ungleichungen (36.5), konnten wir zeigen, daß sie Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 4$ , definieren (Satz 38.4).

(g) Die C3-Ungleichungen (36.8)

$$x_{i_2 i_1} + x_{i_3 i_1} + x_{i_3 i_2} + \sum_{i \in W_2} x_{i_1 i} + \sum_{e \in E(W_1)} x_e + \sum_{e \in E(W_2)} x_e \leq |W_1| + |W_2| - 1$$

definieren im Falle  $|W_2| = 2$  Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 5$  (Satz 38.12). Wir vermuten, daß alle C3-Ungleichungen Facetten definieren.

(h) Alle  $E_4$ -Ungleichungen (36.12)

$$2x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_4} + 2x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} + x_{i_4 i_2} \leq 3$$

definieren Facetten von  $\tilde{P}_T^n$ ,  $n \geq 5$  (Satz 38.13).

(i) Sei

$$\tilde{R}_T^n := \{x \in \mathbb{R}^{n^2 - n} \mid (1) x \geq 0,$$

$$(2) Ax \leq 1,$$

(3)  $x$  erfüllt die Kurzzyklusbedingungen,

(4)  $x$  erfüllt die Kammungleichungen,

(5)  $x$  erfüllt die C2-Ungleichungen,

(6)  $x$  erfüllt die C3-Ungleichungen,

(7)  $x$  erfüllt die  $E_4$ -Ungleichungen,

(8)  $x$  erfüllt die aus Liftungen von Kreisen gewonnenen Ungleichungen},

dann gilt

$$\tilde{P}_T^n \subset \tilde{R}_T^n,$$

und für größere  $n$  gilt sicherlich  $\tilde{P}_T^n \neq \tilde{R}_T^n$ . Die Ergebnisse von § 33 und § 38 besagen jedoch, daß  $\tilde{R}_T^n$  "viele" Facetten mit  $\tilde{P}_T^n$  gemeinsam hat und daher eine "recht gute" Approximation des monotonen asymmetrischen Travelling Salesman Polytopen ist.  $\square$

#### TEIL 4. DIE LÖSUNG EINES SYMMETRISCHEN 120-STÄDTE TRAVELLING SALESMAN PROBLEMS MIT LINEARER PROGRAMMIERUNG

Im vorhergehenden Teil der Arbeit ging unser Bestreben dahin, für gewisse Polytope, die in enger Beziehung zu wohlbekannten kombinatorischen Optimierungsproblemen stehen, eine vollständige oder "möglichst gute" nicht redundante lineare Charakterisierung zu finden. Abgesehen davon, daß solche Probleme von mathematisch-theoretischem Interesse sind, stellt sich natürlich die Frage, ob derartige Untersuchungen direkten praktischen Nutzen bei der Lösung von konkreten Optimierungsproblemen beziehungsweise bei der Entwicklung "effizienter" Algorithmen haben.

Wir wollen im folgenden anhand eines großen symmetrischen "real-world" Travelling Salesman Problems zeigen, wie man die durchaus noch nicht ausgeschöpften Fähigkeiten der linearen Programmierung in Verbindung mit der Kenntnis "vieler" Facetten von  $Q_T^n$  auf elementare Weise zur Lösung eines solchen Problems nutzen kann. Wir werden hier nicht darauf eingehen, welche Möglichkeiten bestehen, die Kenntnis von Facetten von  $Q_T^n$ ,  $\tilde{Q}_T^n$ ,  $P_T^n$ ,  $\tilde{P}_T^n$  beim Entwurf von Algorithmen für das TSP zu verwenden, sondern möchten dazu auf die Arbeiten von Hong [1972], Hong und Padberg [1976], sowie Miliotis [1976] verweisen, in denen auf verschiedene Arten der "Cutting Plane Approach" durch lineare Programmierung mit Branch-and-Bound Techniken verknüpft wurde.

Der "Cutting Plane Approach" von Dantzig, Fulkerson und Johnson [1954], den wir hier anwenden wollen, ist historisch eines der ersten Verfahren zur Lösung des TSP, hat jedoch aufgrund der in ihm enthaltenen interaktiven und "artistischen" Komponenten in der Folgezeit wenig Beachtung gefunden (siehe etwa [Gomory,1964]). Dennoch hat das von Dantzig, Fulkerson und Johnson gelöste 49-Städte-Problem für lange Zeit eine Größenordnungsmarke gesetzt, und selbst die heute gebräuchlichen Branch-and-Bound Verfahren haben manchmal erhebliche Schwierigkeiten, Probleme dieser Größenordnung zu lösen (Beispiel: Entfernungstabelle für 48 Städte Deutschlands im Großen Shell Atlas).

Abgesehen vom 318-Städte Problem in [Lin,Kernighan,1973], das wohl noch für längere Zeit jenseits der Fähigkeiten exakter Lösungsverfahren liegen wird, da selbst lineare Programme mit 50403 Variablen gegenwärtig nicht zu lösen sind, was hierzu aber nötig wäre, ist das durch die Entfernungstabelle zwischen 120 Städten der Bundesrepublik Deutschland (und einiger angrenzender Länder) in [Deutscher Generalatlas,1967] definierte symmetrische Travelling Salesman Problem

das größte "real-world" Problem, das wir finden konnten; die zugehörigen Daten sind auf den Seiten 287 - 296 angegeben. Aus der Literatur ist uns nicht bekannt, daß bisher ein ähnlich großes Problem optimal gelöst wurde. Daher schien uns dieses 120-Städte Problem für einen Lösungsversuch mit linearer Programmierung geeignet.

Zunächst haben wir versucht, die kürzeste Rundreise durch die 120 deutschen Städte mit den uns zur Verfügung stehenden Branch-and-Bound Verfahren zu lösen. Im allgemeinen waren durch diese Algorithmen nach kurzer Zeit so viele noch nicht ausgewertete Knoten des Verzweigungsbaumes generiert worden, daß selbst 512 Kilo-Byte Kernspeicher nicht zur Speicherung aller Daten ausreichten. Bei Auslagerung einiger Daten auf externe Speicher überstiegen dann die Rechenzeiten die zur Verfügung stehenden Möglichkeiten.

Um eine Vorstellung von der Größenordnung der Länge der optimalen Tour und eine gute Ausgangsbasislösung für unser lineares Programm zu bekommen, haben wir mehrere verschiedene Heuristiken auf das Problem angewendet. Die kürzeste der heuristisch gefundenen Touren hatte die Länge 7091 km. Durch "visuelle Analyse" der auf die Landkarte gezeichneten Tour konnte eine weitere Verbesserung auf 7011 km erreicht werden. Die so erzeugte Tour hielt allen weiteren Verkürzungsversuchen durch verschiedene Verfahren stand.

Ordnen wir jeder Kante  $\{i,j\}$  (Verbindung zwischen Stadt  $i$  und Stadt  $j$ ) des vollständigen Graphen  $K_{120} = [V,E]$  auf 120 Knoten eine Variable  $x_{ij}$  zu, und ist  $c = (c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{14}, \dots, c_{n-1,n})$  der Vektor der Entfernungen zwischen je zwei der 120 Städte, so läßt sich unser 120-Städte-TSP als das folgende lineare Programm beschreiben (siehe Bemerkungen zu Beginn von Teil 2):

$$cx = \min!$$
$$x \in Q_T^{120} .$$

Obwohl eine vollständige lineare Charakterisierung von  $Q_T^{120}$  noch nicht bekannt ist, wissen wir bereits aus Satz 23.10 (siehe auch 24.5, 25.14, 25.15), daß eine solche Beschreibung aus einer recht großen Zahl von Gleichungen und Ungleichungen bestehen muß. In der Programmiersprache FORMAC haben wir die Formel aus Satz 24.5 codiert und so die Anzahl der verschiedenen Kammgleichungen für das 120-Städte Problem berechnet. Die Anzahl der Kammgleichungen ist exakt:

53585098152126978751109237989643974799157738075537  
41560969303886591544940617254680312642341661518799  
73826918592967286837885066891296073657651070482444  
89814926065254710049127981680

(Es sei angemerkt, daß zur Berechnung dieser Zahl weitaus mehr CPU-Zeit benötigt wurde als für alle LP-Läufe zur Lösung des 120-Städte TSP zusammen.) Aus Satz 23.10 folgt, daß die Anzahl der verschiedenen Facetten von  $Q_T^{120}$ , die durch die Kammungleichungen induziert werden, genau die Hälfte dieser Zahl ist. Das bedeutet, daß  $Q_T^{120}$  mehr als  $2 \cdot 10^{179}$  verschiedene Kammfacetten besitzt. Um einen Größenordnungsvergleich zu ermöglichen, möchten wir darauf hinweisen, daß das gesamte Weltall "nur" etwa  $10^{79}$  Atome enthält [Siedentopf, 1950]; würden wir auf jedem Atom eine Facette von  $P_T^n$  speichern, bräuchten wir dazu also  $10^{100}$  Universen. Aus dieser Zahlenspielerei wird deutlich, wie gigantisch komplex ein "einfacher" Teilpolytop des Einheitswürfels im  $\mathbb{R}^{7140}$  sein kann.

Da ein derartig großes Restriktionensystem bei der Verwendung des Simplex-Verfahrens natürlich nicht explizit benutzt werden kann, bietet sich - wie Dantzig, Fulkerson und Johnson [1954] vorgeschlagen haben - folgende Vorgehensweise an:

Man relaxiere das Problem so weit wie möglich, d.h. man wähle einen Polytopen  $Q_1 \supset Q_T^{120}$  und löse das lineare Programm

$$cx = \min!$$

$$x \in Q_1.$$

Ist die Optimallösung  $x_0$  aus  $Q_T^{120}$ , das bedeutet:  $x_0$  ist Inzidenzvektor einer Tour, so ist man fertig.

Andernfalls analysiere man die Lösung  $x_0$  und füge aus der Menge der Facetten-definierenden Ungleichungen von  $Q_T^{120}$  ein solches Ungleichungssystem  $B_2 x \leq b_2$  zu  $Q_1$  hinzu, so daß  $x_0$  nicht in  $Q_2 := Q_1 \cap \{x \mid B_2 x \leq b_2\}$  enthalten ist, also abgeschnitten wird. (Die neu hinzugefügten Ungleichungen nennt man aus diesem Grunde Schnittebenen oder Cutting Planes.)

Man löse das lineare Programm

$$cx = \min!$$

$$x \in Q_2$$

und fahre auf die angegebene Weise fort.

Bei diesem Verfahren treten folgende Probleme auf:

(a) Zum einen muß das TSP, d.h. der Polytop  $Q_T^n$ , so stark relaxiert werden, d.h. es müssen so viele der Facetten-definierenden Ungleichungen weggelassen werden, daß der zur Verfügung stehende LP-Code überhaupt in der Lage ist, das angegebene lineare Programm zu lösen. Die Frage ist also, welche Relaxation ist die "beste" für das Problem?

(b) Nach den ersten  $k$ , nach unserer Erfahrung  $4 \leq k \leq 8$ , auf die angegebene Weise durchgeführten LP-Läufen findet man im allgemeinen auf Anhieb eine sehr große Zahl von verletzten Ungleichungen, d.h. Ungleichungen, die Facetten von  $Q_T^n$  definieren, die aber von der gegenwärtigen Optimallösung nicht erfüllt werden. Um das Restriktionensystem nicht "zu groß" werden zu lassen, muß entschieden werden, welche der Ungleichungen dem gegenwärtigen System hinzuzufügen, also in gewissem Sinne "vielversprechend" sind.

(c) Ab einem gewissen Punkt beginnen die Optimallösungen der relaxierten Probleme immer komplizierter zu werden, das heißt wesentlich mehr Komponenten der LP-Basislösung sind von Null verschieden und enthalten recht "krumme" Zahlen (in unserem Beispiel gab es eine Lösung, die sehr viele der Brüche  $\frac{k}{174}$ ,  $1 \leq k \leq 173$ , enthielt). Darüber hinaus wird es schwierig, überhaupt noch verletzte Ungleichungen zu finden. Tritt Fall (c) ein, so kann man das allerdings auch als einen Hinweis darauf ansehen, daß man sich bereits "sehr nahe" am Optimum befindet.

Die in (a), (b), (c) angesprochenen Probleme bilden einen Teil der "artistischen" Komponenten dieses Lösungsverfahrens, da zunächst durchaus kaum rational zu entscheiden ist, welche Ungleichungen "vielversprechend" sind und welche nicht.

In unserem Fall des 120-Städte Problems sind wir wie folgt vorgegangen:

Als grösste Relaxierung des Travelling Salesman Polytopen  $Q_T^{120}$  haben wir den Polytopen  $Q_1 := Q_{2M}^{120}$  (siehe § 12) gewählt, dessen Ecken wir ja aus 13.1 und 13.2 vollständig kennen, d.h. wir haben mit folgenden Gleichungen und Ungleichungen begonnen:

$$\sum_{e \in \omega(i)} x_e = \sum_{j < i} x_{ji} + \sum_{i < j} x_{ij} = 2 \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, \dots, 120\},$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad 1 \leq i < j \leq 120.$$

Die Optimallösung von  $cx = \min!$ ,  $x \in Q_{2M}^{120}$  ist gebrochen und hat den Ziel-funktionswert 6662.5.

Von nun an haben wir nach jedem Lauf die Optimallösung graphisch dargestellt und "vielversprechende" Schnittebenen gesucht. Diese haben wir aus der Menge der uns zur Verfügung stehenden Facetten von  $Q_T^{120}$  gewählt (siehe Satz 23.10), nämlich den Kurzzyklusbedingungen und den Kammungleichungen, und zu dem bereits vorhandenen Restriktionensystem hinzugefügt.

Zur Lösung des 120-Städte Problems benötigten wir 13 LP-Läufe, dabei mußten wir insgesamt 96 weitere Ungleichungen zu  $Q_{2M}^{120}$  hinzufügen. Die 96 Ungleichungen

gliedern sich in folgende Ungleichungstypen auf:

- 36 Kurzzyklusbedingungen,
- 60 Kammungleichungen, davon:
  - 25 2-Matching Ungleichungen,
  - 14 Chvátal-Kammungleichungen,
  - 21 neue Kammungleichungen.

Im folgenden listen wir die von uns benutzten 96 Schnittebenen vollständig auf, d.h. wir geben einen Polytopen an, der  $Q_T^{120}$  enthält und dessen Optimallösung bezüglich der durch das 120-Städte Problem definierten linearen Zielfunktion der Inzidenzvektor einer Tour ist. Dabei trennen wir jeweils nach Kurzzyklusbedingungen und Kammungleichungen. Kurzzyklusbedingungen

$\sum_{e \in E(W)} x_e = |W| - 1$  geben wir durch  $W = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ,  $RS = |W| - 1$  an,

Kammungleichungen  $\sum_{i=0}^k \sum_{e \in E(W_i)} x_e \leq s(C) = |W_0| + \sum_{i=1}^k (|W_i| - 1) - \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle$  durch

den Griff  $W_0$  und die Zinken  $W_1, \dots, W_i$  sowie die rechte Seite  $s(C)$ . Für jeden Lauf vermerken wir schließlich den Zielfunktionswert der Optimallösung.

1. Lauf:

$$\begin{matrix} =120 \\ Q \\ \cdot 2M \end{matrix}$$

Minimum: 6662.5

2. Lauf:

Kurzzyklusbedingungen:

- 1)  $W = \{100, 52, 33\}$ ,  $RS = 2$ ;
- 2)  $W = \{100, 91, 79, 68, 58, 52, 33\}$ ,  $RS = 6$ ;
- 3)  $W = \{117, 66, 31\}$ ,  $RS = 2$ ;
- 4)  $W = \{118, 49, 13\}$ ,  $RS = 2$
- 5)  $W = \{118, 49, 17, 13\}$ ,  $RS = 3$ ;
- 6)  $W = \{116, 70, 8\}$ ,  $RS = 2$ ;
- 7)  $W = \{34, 26, 4\}$ ,  $RS = 2$ ;
- 8)  $W = \{119, 115, 103, 82, 51, 23, 11, 9, 3, 2\}$ ,  $RS = 9$ ;
- 9)  $W = \{97, 95, 12\}$ ,  $RS = 2$ ;
- 10)  $W = \{67, 62, 37\}$ ,  $RS = 2$ ;
- 11)  $W = \{104, 99, 84, 36, 35, 10\}$ ,  $RS = 5$ ;
- 12)  $W = \{104, 99, 84, 36, 35, 10, 6\}$ ,  $RS = 6$ ;
- 13)  $W = \{119, 116, 115, 114, 112, 110, 109, 106, 104, 103, 102, 101, 99, 97, 95, 93, 89, 88, 84, 83, 82, 80, 77, 73, 71, 70, 67, 64, 63, 62, 57, 55, 54, 53, 51, 48, 47, 39, 37, 36, 35, 34, 27, 26, 23, 21, 12, 11, 10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2\}$ ,  $RS = 55$ .

Minimum: 6883.5

3. Lauf:

Kurzzyklusbedingungen:

- 14)  $W = \{114, 112, 110, 106, 104, 102, 101, 99, 89, 84, 83, 73, 67, 62, 57, 55, 48, 47, 37, 36, 35, 10, 6\}$ ,  $RS = 22$ ;
- 15)  $W = \{109, 97, 95, 93, 88, 77, 64, 63, 53, 39, 27, 21, 12, 5\}$ ,  $RS = 13$ ;
- 16)  $W = \{109, 97, 95, 93, 88, 77, 64, 63, 53, 39, 21, 12, 5\}$ ,  $RS = 12$ ;
- 17)  $W = \{120, 92, 32, 30, 29, 28\}$ ,  $RS = 5$ ;
- 18)  $W = \{120, 92, 32, 30, 29\}$ ,  $RS = 4$ ;
- 19)  $W = \{105, 74, 72, 40\}$ ,  $RS = 3$ ;
- 20)  $W = \{105, 72, 40\}$ ,  $RS = 2$ ;
- 21)  $W = \{117, 85, 66, 31, 22\}$ ,  $RS = 4$ ;
- 22)  $W = \{117, 85, 66, 31, 22, 18\}$ ,  $RS = 5$ ;
- 23)  $W = \{100, 91, 79, 68, 58, 52, 43, 33\}$ ,  $RS = 7$ ;

Kammungleichungen:

- 24)  $W_0 = \{85, 22, 18\}$ ,  $W_1 = \{117, 85\}$ ,  $W_2 = \{66, 22\}$ ,  $W_3 = \{19, 18\}$ ,  $s(C) = 4$ ;
- 25)  $W_0 = \{120, 92, 28\}$ ,  $W_1 = \{120, 29\}$ ,  $W_2 = \{92, 32\}$ ,  $W_3 = \{45, 28\}$ ,  $s(C) = 4$ ;
- 26)  $W_0 = \{104, 99, 10\}$ ,  $W_1 = \{104, 36\}$ ,  $W_2 = \{99, 62\}$ ,  $W_3 = \{35, 10\}$ ,  $s(C) = 4$ ;
- 27)  $W_0 = \{53, 27, 5\}$ ,  $W_1 = \{80, 27\}$ ,  $W_2 = \{64, 53\}$ ,  $W_3 = \{63, 5\}$ ,  $s(C) = 4$ ;
- 28)  $W_0 = \{89, 55, 48, 47\}$ ,  $W_1 = \{89, 55, 6\}$ ,  $W_2 = \{102, 48\}$ ,  $W_3 = \{71, 47\}$ ,  $s(C) = 6$ ;

Minimum: 6912.5

4. Lauf:

Kurzzyklusbedingungen:

- 29)  $W = \{109, 97, 95, 93, 88, 77, 64, 53, 21, 12\}$ ,  $RS = 9$ ;
- 30)  $W = \{119, 115, 114, 112, 110, 109, 106, 104, 103, 102, 101, 99, 97, 95, 93, 89, 88, 84, 83, 82, 80, 77, 73, 71, 67, 64, 63, 62, 57, 55, 53, 51, 48, 47, 39, 37, 36, 35, 27, 26, 23, 21, 12, 11, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2\}$ ,  $RS = 50$ ;
- 31)  $W = \{113, 107, 69\}$ ,  $RS = 2$ ;

Kammungleichungen:

- 32)  $W_0 = \{73, 62, 57\}$ ,  $W_1 = \{114, 73\}$ ,  $W_2 = \{83, 57\}$ ,  $W_3 = \{62, 37\}$ ,  $s(C) = 4$ ;
- 33)  $W_0 = \{118, 113, 107, 98, 69, 65, 50, 49, 46, 44, 20, 17, 13\}$ ,  $W_1 = \{98, 42\}$ ,  $W_2 = \{68, 65\}$ ,  $W_3 = \{75, 44\}$ ,  $s(C) = 14$ ;
- 34)  $W_0 = \{118, 113, 107, 69, 65, 49, 20, 17, 13\}$ ,  $W_1 = \{98, 17\}$ ,  $W_2 = \{68, 65\}$ ,  $W_3 = \{46, 20\}$ ,  $s(C) = 10$ ;
- 35)  $W_0 = \{119, 72, 40, 38, 34, 4\}$ ,  $W_1 = \{105, 72, 40\}$ ,  $W_2 = \{119, 103\}$ ,  $W_3 = \{116, 34\}$ ,  $W_4 = \{38, 7\}$ ,  $W_5 = \{26, 4\}$ ,  $s(C) = 9$ ;

Minimum: 6918.75

5. Lauf:

Kurzzyklusbedingungen:

- 36)  $W = \{93,64,53\}$ ,  $RS = 2$ ;  
37)  $W = \{118,98,49,42,17,13\}$ ,  $RS = 5$ ;  
38)  $W = \{104,99,89,84,55,36,35,10,6\}$ ,  $RS = 8$ ;  
39)  $W = \{114,112,110,106,104,99,89,84,83,73,67,62,57,55,37,36,35,10,6\}$ ,  
 $RS = 18$ ;

Kammungleichungen:

- 40)  $W_0 = \{118,98,50,49,46,42,41,20,17,13\}$ ,  $W_1 = \{50,46,44\}$ ,  $W_2 = \{56,41\}$ ,  
 $W_3 = \{107,20\}$ ,  $s(C) = 12$ ;  
41)  $W_0 = \{118,113,107,98,69,65,50,49,46,44,42,41,20,17,13\}$ ,  $W_1 = \{75,44\}$ ,  
 $W_2 = \{68,65\}$ ,  $W_3 = \{56,41\}$ ,  $s(C) = 16$ ;  
42)  $W_0 = \{119,116,103,72,71,70,54,40,38,34,26,8,4\}$ ,  $W_1 = \{119,115,103,82,$   
 $51,23,11,9,3,2\}$ ,  $W_2 = \{105,72,40\}$ ,  $W_3 = \{71,47\}$ ,  $W_4 = \{90,54\}$ ,  
 $W_5 = \{38,7\}$ ,  $s(C) = 24$ ;  
43)  $W_0 = \{119,116,105,103,72,71,70,54,40,38,34,26,8,4\}$ ,  
 $W_1 = \{119,115,109,103,97,95,93,88,82,80,77,64,63,53,51,39,27,23,21,12,$   
 $11,9,5,3,2\}$ ,  $W_2 = \{105,74\}$ ,  $W_3 = \{71,47\}$ ,  $W_4 = \{90,54\}$ ,  
 $W_5 = \{38,7\}$ ,  $s(C) = 39$ ;  
44)  $W_0 = \{71,54,8\}$ ,  $W_1 = \{116,70,8\}$ ,  $W_2 = \{71,47\}$ ,  $W_3 = \{90,54\}$ ,  $s(C) = 5$ ;

Minimum: 6928

6. Lauf:

Kurzzyklusbedingungen:

- 45)  $W = \{118,113,107,105,98,87,75,74,72,69,65,56,50,49,46,44,42,41,40,38,$   
 $20,17,14,13,7\}$ ,  $RS = 24$ ;  
46)  $W = \{120,118,117,113,108,107,105,100,98,94,92,91,87,86,85,81,79,78,76,$   
 $75,74,72,69,68,66,65,61,59,58,56,52,50,49,46,45,44,43,42,41,40,$   
 $38,33,32,31,30,29,28,25,22,20,19,18,17,16,15,14,13,7,1\}$ ,  $RS = 58$ ;

Kammungleichungen:

- 47)  $W_0 = \{68,65,13\}$ ,  $W_1 = \{91,68\}$ ,  $W_2 = \{69,65\}$ ,  $W_3 = \{49,13\}$ ,  $s(C) = 4$ ;  
48)  $W_0 = \{90,71,54,8\}$ ,  $W_1 = \{96,90,54\}$ ,  $W_2 = \{116,70,8\}$ ,  $W_3 = \{71,47\}$ ,  
 $s(C) = 7$ ;  
49)  $W_0 = \{89,55,48,47\}$ ,  $W_1 = \{104,99,89,84,55,36,35,10,6\}$ ,  $W_2 = \{102,48\}$ ,  
 $W_3 = \{71,47\}$ ,  $s(C) = 12$ ;  
50)  $W_0 = \{118,113,108,107,100,91,79,69,68,65,58,52,49,43,33,20,17,13\}$ ,  
 $W_1 = \{108,25\}$ ,  $W_2 = \{98,17\}$ ,  $W_3 = \{46,20\}$ ,  $s(C) = 19$ ;

Minimum: 6935.3

7. Lauf:

Kurzzyklushedingungen:

- 51)  $W = \{71,47,26\}$ ,  $RS = 2$ ;
- 52)  $W = \{94,86,81,78\}$ ,  $RS = 3$ ;
- 53)  $W = \{119,103,82,23,9,3\}$ ,  $RS = 5$ ;

Kammungleichungen:

- 54)  $W_0 = \{69,68,65\}$ ,  $W_1 = \{113,69\}$ ,  $W_2 = \{91,68\}$ ,  $W_3 = \{65,13\}$ ,  $s(C) = 4$ ;
- 55)  $W_0 = \{69,68,65\}$ ,  $W_1 = \{113,107,68\}$ ,  $W_2 = \{91,68\}$ ,  $W_3 = \{118,65,49,13\}$ ,  
 $s(C) = 7$ ;
- 56)  $W_0 = \{114,112,106,104,99,84,83,73,67,62,57,37,36,35,10\}$ ,  
 $W_1 = \{114,83,73,63,57,39,5\}$ ,  $W_2 = \{112,110\}$ ,  $W_3 = \{84,6\}$ ,  $s(C) = 21$ ;
- 57)  $W_0 = \{118,113,107,98,69,68,65,50,49,46,44,42,20,17,13\}$ ,  
 $W_1 = \{91,68\}$ ,  $W_2 = \{75,44\}$ ,  $W_3 = \{42,41\}$ ,  $s(C) = 16$ ;
- 58)  $W_0 = \{119,116,115,114,112,111,110,109,106,104,103,102,101,99,97,96,$   
 $95,93,90,89,88,84,83,82,80,77,73,72,71,70,67,64,63,62,60,57,55,54,53,$   
 $51,48,47,40,39,38,37,36,35,34,27,26,24,23,21,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2\}$ ,  
 $W_1 = \{105,74,72,40\}$ ,  $W_2 = \{60,16\}$ ,  $W_3 = \{56,7\}$ ,  $s(C) = 68$ ;
- 59)  $W_0 = \{115,93,21,2\}$ ,  $W_1 = \{119,115,103,82,51,23,11,9,3,2\}$ ,  
 $W_2 = \{93,64,53\}$ ,  $W_3 = \{109,21\}$ ,  $s(C) = 14$ ;

Minimum: 6937.333

8. Lauf:

Kammungleichungen:

- 60)  $W_0 = \{34,26,4\}$ ,  $W_1 = \{119,4\}$ ,  $W_2 = \{116,34\}$ ,  $W_3 = \{71,26\}$ ,  $s(C) = 4$ ;
- 61)  $W_0 = \{53,27,5\}$ ,  $W_1 = \{93,64,53\}$ ,  $W_2 = \{80,27\}$ ,  $W_3 = \{63,5\}$ ,  $s(C) = 5$ ;
- 62)  $W_0 = \{115,103,93,82,51,23,21,11,9,2\}$ ,  $W_1 = \{119,103\}$ ,  $W_2 = \{109,21\}$ ,  
 $W_3 = \{93,64,53\}$ ,  $W_4 = \{82,3\}$ ,  $W_5 = \{51,13\}$ ,  $s(C) = 13$ ;
- 63)  $W_0 = \{115,93,82,51,23,21,11,9,2\}$ ,  $W_1 = \{103,23,9\}$ ,  $W_2 = \{109,21\}$ ,  
 $W_3 = \{93,64,53\}$ ,  $W_4 = \{82,3\}$ ,  $W_5 = \{51,13\}$ ,  $s(C) = 13$ ;
- 64)  $W_0 = \{103,51,23,11,9\}$ ,  $W_1 = \{119,103\}$ ,  $W_2 = \{115,11\}$ ,  $W_3 = \{51,13\}$ ,  
 $s(C) = 6$ ;
- 65)  $W_0 = \{89,55,48,47\}$ ,  $W_1 = \{114,112,110,106,104,99,89,84,83,73,67,62,$   
 $57,55,37,36,35,10,6\}$ ,  $W_2 = \{102,48\}$ ,  $W_3 = \{71,47,26\}$ ,  $s(C) = 23$ ;
- 66)  $W_0 = \{112,106,104,99,84,67,62,37,36,35,10\}$ ,  $W_1 = \{114,106,83,73,67,$   
 $62,57,37\}$ ,  $W_2 = \{112,110\}$ ,  $W_3 = \{84,6\}$ ,  $s(C) = 18$ ;
- 67)  $W_0 = \{106,104,99,67,62,37\}$ ,  $W_1 = \{114,106,83,73,67,62,57,37\}$ ,  
 $W_2 = \{104,36\}$ ,  $W_3 = \{99,10\}$ ,  $s(C) = 13$ ;

Minimum: 6939.5

9. Lauf:

Kammungleichungen:

- 68)  $W_0 = \{72, 56, 40, 38, 7\}$ ,  $W_1 = \{105, 74, 72, 40\}$ ,  $W_2 = \{119, 103, 38\}$ ,  
 $W_3 = \{56, 41\}$ ,  $s(C) = 9$ ;
- 69)  $W_0 = \{119, 116, 105, 103, 74, 72, 70, 56, 40, 38, 34, 26, 8, 7, 4\}$ ,  
 $W_1 = \{119, 115, 103, 82, 51, 23, 11, 9, 3, 2\}$ ,  $W_2 = \{87, 74\}$ ,  $W_3 = \{71, 26\}$ ,  
 $W_4 = \{56, 41\}$ ,  $W_5 = \{54, 8\}$ ,  $s(C) = 25$ ;
- 70)  $W_0 = \{112, 110, 89, 84, 55, 48, 47, 36, 6\}$ ,  $W_1 = \{112, 106\}$ ,  $W_2 = \{104, 36\}$ ,  
 $W_3 = \{102, 48\}$ ,  $W_4 = \{84, 35\}$ ,  $W_5 = \{71, 47\}$ ,  $s(C) = 11$ ;
- 71)  $W_0 = \{112, 110, 106, 104, 99, 89, 84, 67, 62, 55, 48, 47, 37, 36, 35, 10, 6\}$ ,  
 $W_1 = \{102, 48\}$ ,  $W_2 = \{83, 67\}$ ,  $W_3 = \{71, 47\}$ ,  $s(C) = 18$ ;
- 72)  $W_0 = \{118, 117, 113, 108, 107, 100, 98, 91, 85, 79, 75, 69, 68, 66, 65, 58, 52, 50,$   
 $49, 46, 44, 43, 42, 41, 33, 31, 25, 22, 20, 19, 18, 17, 13\}$ ,  $W_1 = \{81, 22\}$ ,  
 $W_2 = \{75, 14\}$ ,  $W_3 = \{56, 41\}$ ,  $s(C) = 34$ ;

Minimum: 6940.38281

10. Lauf:

Kurzzyklusbedingungen:

- 73)  $W = \{117, 113, 108, 107, 100, 91, 85, 79, 69, 68, 66, 65, 58, 52, 43, 33, 31, 25, 22,$   
 $19, 18\}$ ,  $RS = 20$ ;

Kammungleichungen:

- 74)  $W_0 = \{116, 70, 34, 26, 8, 4\}$ ,  $W_1 = \{116, 70, 54, 8\}$ ,  $W_2 = \{119, 4\}$ ,  
 $W_3 = \{71, 26\}$ ,  $s(C) = 9$ ;
- 75)  $W_0 = \{114, 106, 83, 73, 67, 62, 57, 37\}$ ,  $W_1 = \{112, 106\}$ ,  $W_2 = \{99, 62\}$ ,  
 $W_3 = \{83, 39\}$ ,  $s(C) = 9$ ;
- 76)  $W_0 = \{118, 117, 113, 108, 107, 100, 98, 94, 91, 87, 86, 85, 81, 79, 75, 69, 68, 66, 65,$   
 $58, 56, 52, 50, 49, 46, 44, 43, 42, 41, 33, 31, 25, 22, 20, 19, 18, 17, 14, 13\}$ ,  
 $W_1 = \{120, 94, 92, 86, 81, 78, 45, 32, 30, 29, 28, 15\}$ ,  $W_2 = \{87, 74\}$ ,  
 $W_3 = \{56, 41, 7\}$ ,  $s(C) = 51$ ;

Minimum: 6940.81641

11. Lauf:

Kammungleichungen:

- 77)  $W_0 = \{108, 100, 91, 79, 69, 68, 65, 58, 52, 43, 33\}$ ,  $W_1 = \{113, 107, 69\}$ ,  
 $W_2 = \{108, 25\}$ ,  $W_3 = \{65, 13\}$ ,  $s(C) = 13$ ;
- 78)  $W_0 = \{120, 92, 76, 59, 32, 30, 29, 15\}$ ,  $W_1 = \{92, 28\}$ ,  $W_2 = \{81, 15\}$ ,  
 $W_3 = \{76, 1\}$ ,  $s(C) = 9$ ;
- 79)  $W_0 = \{94, 87, 86, 78, 75, 44, 14\}$ ,  $W_1 = \{94, 81\}$ ,  $W_2 = \{87, 74\}$ ,  $W_3 = \{78, 45\}$ ,  
 $s(C) = 8$ ;

- 80)  $W_0 = \{116, 70, 34, 26, 8, 4\}$ ,  $W_1 = \{119, 4\}$ ,  $W_2 = \{71, 47, 26\}$ ,  
 $W_3 = \{54, 8\}$ ,  $s(C) = 8$ ;
- 81)  $W_0 = \{114, 112, 106, 104, 99, 84, 83, 73, 67, 62, 57, 37, 36, 35, 10\}$ ,  
 $W_1 = \{112, 110\}$ ,  $W_2 = \{84, 6\}$ ,  $W_3 = \{83, 39\}$ ,  $s(C) = 16$ ;
- 82)  $W_0 = \{108, 100, 91, 79, 69, 68, 65, 58, 52, 43, 33, 13\}$ ,  $W_1 = \{118, 49, 13\}$ ,  
 $W_2 = \{113, 107, 69\}$ ,  $W_3 = \{108, 25\}$ ,  $s(C) = 15$ ;
- 83)  $W_0 = \{120, 92, 76, 59, 45, 32, 30, 29, 28, 15\}$ ,  $W_1 = \{81, 15\}$ ,  $W_2 = \{78, 45\}$ ,  
 $W_3 = \{76, 1\}$ ,  $s(C) = 11$ ;
- 84)  $W_0 = \{94, 87, 86, 81, 78, 75, 44, 41, 22\}$ ,  $W_1 = \{117, 85, 66, 31, 22\}$ ,  
 $W_2 = \{78, 45\}$ ,  $W_3 = \{87, 74\}$ ,  $s(C) = 13$ ;
- 85)  $W_0 = \{120, 92, 45, 32, 28\}$ ,  $W_1 = \{120, 29\}$ ,  $W_2 = \{78, 45\}$ ,  $W_3 = \{32, 30\}$ ,  
 $s(C) = 6$ ;
- 86)  $W_0 = \{116, 105, 72, 71, 70, 60, 54, 47, 40, 38, 34, 26, 24, 8, 7, 4\}$ ,  
 $W_1 = \{105, 87, 74, 72, 56, 41, 40, 38, 7\}$ ,  $W_2 = \{114, 112, 110, 106, 104, 102, 101,$   
 $99, 89, 84, 83, 73, 71, 67, 62, 57, 55, 48, 47, 37, 36, 35, 10, 6\}$ ,  $W_3 = \{96, 90, 54\}$ ,  
 $W_4 = \{60, 16\}$ ,  $W_5 = \{111, 24\}$ ,  $s(C) = 48$ ;
- 87)  $W_0 = \{73, 67, 57\}$ ,  $W_1 = \{67, 62, 37\}$ ,  $W_2 = \{114, 73\}$ ,  $W_3 = \{83, 57\}$ ,  
 $s(C) = 5$ ;
- 88)  $W_0 = \{83, 73, 67, 57\}$ ,  $W_1 = \{83, 39\}$ ,  $W_2 = \{114, 73\}$ ,  $W_3 = \{67, 37\}$ ,  
 $s(C) = 5$ ;

Minimum: 6941.18359

## 12. Lauf:

Kammungleichungen:

- 89)  $W_0 = \{105, 74, 72, 56, 40, 38, 7\}$ ,  $W_1 = \{119, 103, 38, 23, 9\}$ ,  $W_2 = \{87, 74\}$ ,  
 $W_3 = \{56, 41\}$ ,  $s(C) = 11$ ;
- 90)  $W_0 = \{118, 117, 113, 108, 107, 100, 98, 94, 91, 87, 86, 85, 81, 79, 78, 75, 69, 68, 66,$   
 $65, 58, 52, 50, 49, 46, 44, 43, 42, 41, 33, 31, 25, 22, 20, 19, 18, 17, 14, 13\}$ ,  
 $W_1 = \{87, 74\}$ ,  $W_2 = \{92, 78, 45, 28\}$ ,  $W_3 = \{56, 41\}$ ,  $s(C) = 42$ ;
- 91)  $W_0 = \{116, 71, 70, 54, 34, 26, 8, 4\}$ ,  $W_1 = \{119, 4\}$ ,  $W_2 = \{90, 54\}$ ,  
 $W_3 = \{71, 47\}$ ,  $s(C) = 9$ ;
- 92)  $W_0 = \{105, 74, 72, 56, 40, 38, 7\}$ ,  $W_1 = \{87, 74\}$ ,  $W_2 = \{56, 41\}$ ,  
 $W_3 = \{119, 103, 38, 23, 9\}$ ,  $s(C) = 11$ ;
- 93)  $W_0 = \{108, 69, 68, 65, 43, 13\}$ ,  $W_1 = \{118, 49, 13\}$ ,  $W_2 = \{113, 69\}$ ,  
 $W_3 = \{108, 25\}$ ,  $W_4 = \{91, 68\}$ ,  $W_5 = \{79, 43\}$ ,  $s(C) = 9$ ;

Minimum: 6941.5

13. Lauf:

Kammungleichungen:

$$94) W_0 = \{109,93,21\}, W_1 = \{109,88\}, W_2 = \{93,64,53\}, W_3 = \{115,21\}, \\ s(C) = 5;$$

$$95) W_0 = \{115,109,93,21,2\}, W_1 = \{119,115,103,82,51,23,11,9,3,2\}, \\ W_2 = \{109,88\}, W_3 = \{93,64,53\}, s(C) = 15;$$

$$96) W_0 = \{119,115,114,109,103,101,93,83,82,80,77,73,64,63,57,53,51,39, \\ 27,23,21,11,9,5,3,2\}, W_1 = \{114,112,110,106,104,99,89,84,83,73,67, \\ 62,57,55,37,36,35,10,6\}, W_2 = \{109,88\}, W_3 = \{102,101\}, \\ W_4 = \{95,77\}, W_5 = \{51,13\}, s(C) = 45;$$

Minimum: 6942

Die Optimallösung von Lauf 13 war der Inzidenzvektor einer Tour mit der Länge 6942 km, womit wegen  $Q_T^{120} \subset Q_{13}$  eine Lösung des 120-Städte Problems gefunden war. Diese optimale Tour ist auf Seite 288 graphisch dargestellt.

Die Abweichung der Länge der besten heuristisch gefundenen Tour (7011 km) von der Länge der optimalen Tour (6942 km) betrug also weniger als 1 %. Falls man nicht unbedingt an einer optimalen Lösung sondern nur an einer "guten" Tour, die z.B. höchstens 2 % vom Optimum abweicht, interessiert gewesen wäre, hätte man bereits nach dem zweiten Lauf (Minimum = 6883.5 km) aufhören und die heuristisch gefundene Tour als "optimal" ansehen können. Diese Tatsache spiegelt die bei einer Reihe von derartigen Experimenten mit "real-world"-Problemen gewonnene Erfahrung wieder, daß der Wert der Optimallösung in den ersten Iterationen besonders stark ansteigt, während gegen Ende des Prozesses sehr viel Mühe und Aufwand nötig sind, um einen halben Kilometer besser zu werden.

Damit man sich überhaupt an ein Problem dieser Größenordnung heranwagen kann, müssen natürlich ein leistungsfähiger LP-Code und ein angemessener Computer zur Verfügung stehen. Wir haben zur Lösung der dreizehn linearen Programme das LP-Paket MPSX der Firma IBM benutzt und alle Rechnungen auf dem IBM-Computer 370/168 des Rechenzentrums der Universität Bonn durchgeführt. Zur Arbeits erleichterung wurden noch folgende Hilfsprogramme geschrieben:

- 1) Ein Programm, das die 120 Gleichungen  $\sum_{e \in \omega(i)} x_e = 2$  und die Beschränkungen  $0 \leq x_{ij} \leq 1$  im Eingabeformat für MPSX erzeugte.
- 2) Ein Programm, das nach jedem Lauf das gesamte Restriktionensystem auf ein Band schrieb.

- 3) Ein Programm, das aus der Angabe der Knoten von Griff und Zinken (wie in unserer Auflistung) Kammungleichungen und Kurzzzyklusbedingungen im MPSX-Format erzeugte und dem bereits bestehenden Restriktionensystem hinzufügte.

Da der vollständige Graph auf 120 Knoten 7140 Kanten besitzt, mußten wir in jedem Lauf ein lineares Programm in

7140 Variablen,

120 Gleichungen,

7140 Unter- und Obergrenzen sowie weiteren

0 - 96 Ungleichungen

lösen. Die von MPSX zur Lösung dieser Programme benötigte CPU Zeit betrug zwischen 30 Sekunden und 2 Minuten, die Anzahl der Pivotoperationen lag zwischen 100 und 1000 und stieg mit wachsender Problemgröße (jedoch nicht monoton) an. Zur Verkürzung der Rechenzeiten übergaben wir beim Aufruf von MPSX die durch die beste heuristische Tour definierte partielle Basis, mit deren Hilfe von MPSX eine vollständige Basis des gegenwärtigen linearen Programms aufgebaut wurde, womit eine "gute" Anfangsbasislösung zur Verfügung stand. Durch die Angabe dieser partiellen Basis konnten die Rechenzeiten erheblich verringert werden.

Bedenkt man die recht kurzen Rechenzeiten und die Fähigkeiten von MPSX, lineare Programme bis zu etwa 16 000 Variablen lösen zu können, so halten wir es durchaus für möglich, daß Travelling Salesman Probleme auf etwa 170 Städten mit LP-Verfahren gelöst werden können.

Trotz dieses erfolgreichen Lösungsversuches gibt es natürlich auch einige berechnete praktische und theoretische Einwände gegen das hier vorgeführte Verfahren.

Von der theoretischen Seite her ist zu bemerken, daß dieses Verfahren nicht notwendig konvergiert. Hat unsere Zielfunktion  $cx$  etwa die Eigenschaft, daß  $cx \leq c_0$  eine noch nicht bekannte Facette von  $Q_T^n$  definiert, dann kann das beschriebene Iterationsverfahren niemals das Problem  $\max cx!$ ,  $x \in Q_T^n$  lösen, andernfalls wäre  $cx \leq c_0$  keine Facette von  $Q_T^n$  bzw. bereits eine äquivalente Ungleichung bekannt.

Von der praktischen Seite her beurteilt ist das hier beschriebene Verfahren sehr aufwendig. Es ist unmöglich, einem nicht geschulten Anwender ein Programmpaket mit Daten in die Hand zu drücken und ihn zu bitten, das Problem zu lösen. Das Verfahren erfordert eine gute Kenntnis der Theorie: Welche Schnittebenen sind bekannt, welche von diesen sind Facetten, also "gute"

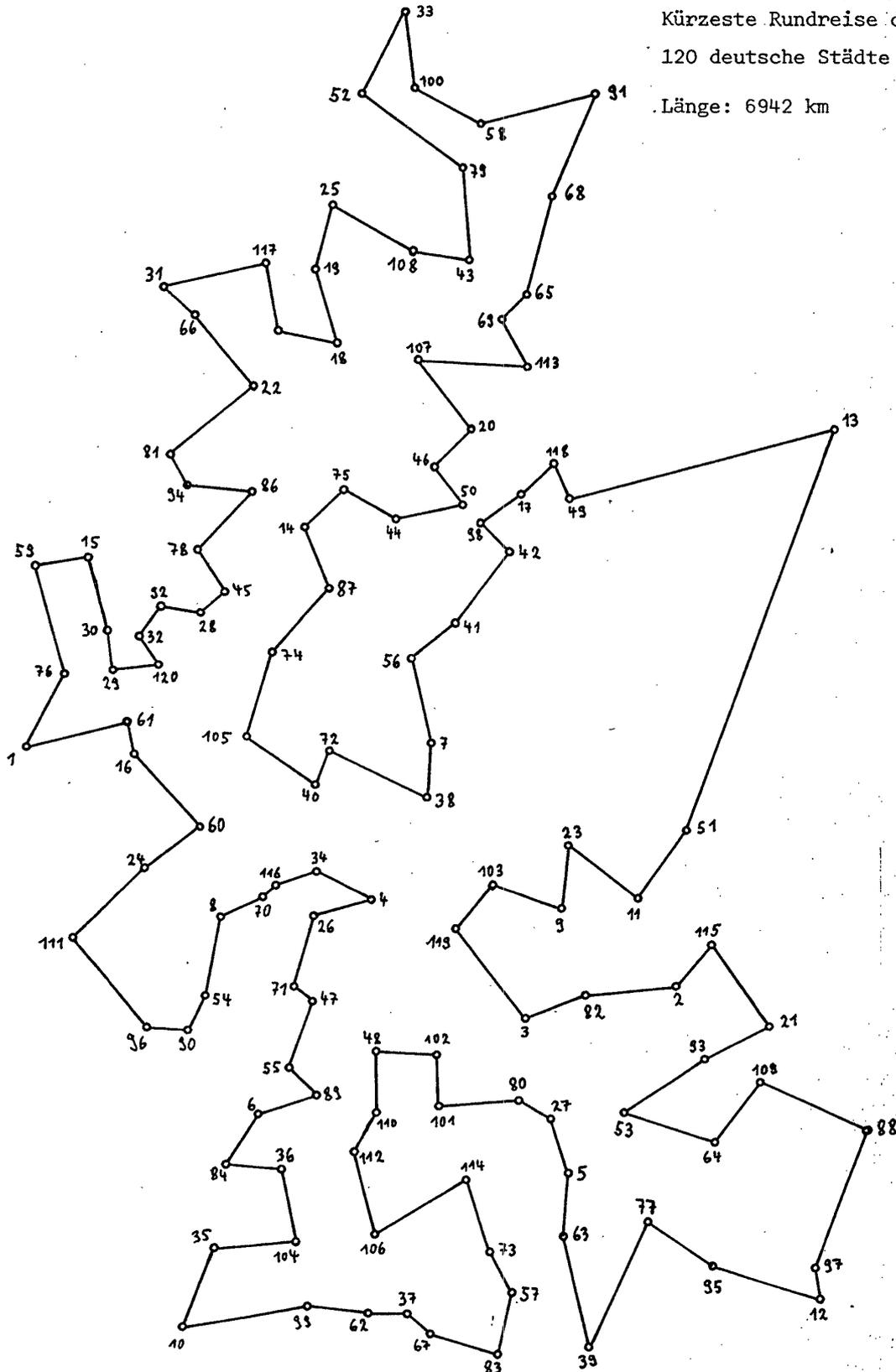
Schnittebenen, welche sind für die gegenwärtige Lösung besonders geeignet, und es erfordert einigen Zeitaufwand zur Analyse der gegenwärtigen Lösung und Generierung neuer Schnittebenen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß es nicht vernünftig ist, "kleine" Probleme, die sich mit Branch-and-Bound Verfahren lösen lassen, auf die hier beschriebene Weise anzugehen. Hat man jedoch ein "großes" Problem, das mit keinem der vorhandenen Verfahren optimal gelöst werden kann, auf dessen Lösung man jedoch großen Wert legt, so sollte man zunächst viele heuristische Lösungen erzeugen (und damit obere Schranken für die kürzeste Tour) und dann auf die vorgeschlagene Weise vorgehen. In jedem Schritt des Verfahrens hat man untere Schranken (somit eine Abschätzung für die Nähe zum Optimum) und im allgemeinen keine schlechten Aussichten, das Optimum zu finden.

Die Tabelle in [Deutscher Generalatlas, 1967] enthält die Entfernungen zwischen je zwei der folgenden 120 Städte:

1) Aachen	2) Amberg	3) Ansbach	4) Aschaffenburg
5) Augsburg	6) Baden-Baden	7) Bad Hersfeld	8) Bad Kreuznach
9) Bamberg	10) Basel	11) Bayreuth	12) Berchtesgaden
13) Berlin	14) Bielefeld	15) Bocholt	16) Bonn
17) Braunschweig	18) Bremen	19) Bremerhaven	20) Celle
21) Cham	22) Cloppenburg	23) Coburg	24) Cochem
25) Cuxhaven	26) Darmstadt	27) Donauwörth	28) Dortmund
29) Düsseldorf	30) Duisburg	31) Emden	32) Essen
33) Flensburg	34) Frankfurt	35) Freiburg	36) Freudenstadt
37) Friedrichshafen	38) Fulda	39) Garm.-Partenk.	40) Gießen
41) Göttingen	42) Goslar	43) Hamburg	44) Hameln
45) Hamm	46) Hannover	47) Heidelberg	48) Heilbronn
49) Helmstedt	50) Hildesheim	51) Hof	52) Husum
53) Ingolstadt	54) Kaiserslautern	55) Karlsruhe	56) Kassel
57) Kempten	58) Kiel	59) Kleve	60) Koblenz
61) Köln	62) Konstanz	63) Landsberg	64) Landshut
65) Lauenburg	66) Leer	67) Lindau	68) Lübeck
69) Lüneburg	70) Mainz	71) Mannheim	72) Marburg
73) Memmingen	74) Meschede	75) Minden	76) Mönchengladb.
77) München	78) Münster	79) Neumünster	80) Nördlingen
81) Nordhorn	82) Nürnberg	83) Oberstdorf	84) Offenburg
85) Oldenburg	86) Osnabrück	87) Paderborn	88) Passau
89) Pforzheim	90) Pirmasens	91) Puttgarden	92) Recklinghausen
93) Regensburg	94) Rheine	95) Rosenheim	96) Saarbrücken
97) Salzburg	98) Salzgitter, Bad	99) Schaffhausen	100) Schleswig
101) Schwäb. Gmünd	102) Schwäb. Hall	103) Schweinfurt	104) Schweningen
105) Siegen	106) Sigmaringen	107) Soltau	108) Stade
109) Straubing	110) Stuttgart	111) Trier	112) Tübingen
113) Uelzen	114) Ulm	115) Weiden	116) Wiesbaden
117) Wilhelmshaven	118) Wolfsburg	119) Würzburg	120) Wuppertal

Kürzeste Rundreise durch  
120 deutsche Städte  
Länge: 6942 km



Daten des symmetrischen 120-Städte Travelling Salesman Problems

Bezeichnen wir mit  $c_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  die Entfernung in km zwischen Stadt  $i$  und Stadt  $j$  und ordnen wir die Größen  $c_{ij}$  wie folgt:

$c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{14}, c_{24}, c_{34}, c_{15}, c_{25}, c_{35}, c_{45}, c_{16}, \dots, c_{n-2,n}, c_{n-1,n}$ ,

dann sind die Entfernungen zwischen den 120 Städten durch die folgende Tabelle gegeben:

534	434	107	294	241	148	593	190	137	374	409	351	240	190	258	332
320	232	139	494	310	232	354	261	113	372	188	208	464	124	88	171
202	328	188	284	566	508	397	347	331	171	467	345	485	552	80	127
259	234	365	249	372	61	522	802	316	336	509	222	470	588	584	392
502	386	633	432	479	552	586	723	417	621	411	874	354	738	257	641
541	407	706	522	184	391	372	679	433	915	390	187	577	477	337	636
452	375	321	507	609	595	845	572	196	91	450	357	210	509	325	248
141	380	482	468	718	661	228	158	412	624	531	384	690	506	210	408
398	663	459	892	227	169	351	383	400	752	659	512	818	634	338	536
526	791	587	1020	524	151	270	371	167	472	805	712	565	871	687	391
589	579	844	640	1073	413	257	342	443	220	57	389	665	572	425	731
547	251	449	439	704	500	933	274	146	328	360	53	112	165	610	76
183	317	192	442	396	430	202	515	141	233	492	723	653	526	700	828
881	741	340	730	630	490	789	605	394	474	582	762	643	998	444	125
185	311	223	67	139	168	806	510	152	134	217	248	370	175	330	46
527	72	438	380	359	553	426	385	513	566	426	213	569	153	447	354
207	470	280	246	113	377	437	465	715	659	345	275	98	500	488	560
477	523	428	423	511	844	751	604	910	726	430	628	618	883	679	112
407	296	381	482	259	96	39	204	920	178	605	599	269	283	190	42
332	148	169	63	213	305	301	544	582	382	312	185	365	493	546	406
359	465	259	170	585	525	157	95	232	42	257	316	355	160	330	167
254	521	638	568	441	615	743	796	656	188	721	206	438	835	274	150
539	446	299	598	414	279	283	469	571	557	807	488	112	96	120	267
255	327	244	615	195	515	237	366	274	530	80	507	414	267	566	382
305	251	437	539	525	775	572	196	88	77	351	339	411	328	583	279
483	205	450	242	498	63	130	520	427	280	579	395	318	264	450	552
538	788	543	167	59	101	322	310	382	299	596	250	496	218	412	255
511	56	25	401	791	691	551	850	666	474	535	662	823	723	1059	524
238	238	372	303	138	126	248	867	101	649	489	165	526	782	256	340
311	134	524	431	284	583	399	314	268	454	556	542	792	530	154	63
105	309	297	369	286	600	237	500	222	408	259	515	34	29	22	298
666	942	849	702	1008	824	528	726	716	981	777	1210	446	423	605	637
357	280	217	279	1018	336	703	754	194	683	933	521	605	576	416	563
259	281	188	40	364	180	142	72	211	337	299	549	555	372	302	175

338 466 519 379 357 455 257 172 558 27 272 264 232 245 516 249  
656 505 447 336 286 354 110 406 284 424 70 461 566 819 618 548  
421 602 730 783 643 538 701 466 376 822 244 353 509 478 491 762  
494 920 276 453 358 247 234 265 59 354 232 335 182 372 477 767  
566 496 369 550 678 731 591 449 649 377 324 770 192 264 458 426  
439 710 443 868 224 95 627 334 251 408 168 239 528 406 300 166  
348 331 700 740 670 504 724 852 905 765 360 823 346 504 944 366  
179 632 600 613 884 6171042 398 162 177 339 275 187 94 313 281  
45 184 143 438 204 543 458 229 382 250 255 350 436 296 351 439  
130 248 475 136 271 286 312 325 519 321 573 102 377 325 425 710  
283 254 491 117 375 611 489 319 354 351 202 679 823 753 626 807  
935 988 848 272 906 365 5871027 449 159 715 683 696 967 7001125  
481 345 337 183 430 243 353 260 113 419 235 89 133 283 392 368  
621 502 209 286 159 285 413 466 326 429 439 226 157 505 94 344  
190 216 229 500 225 603 67 331 279 453 96 536 376 520 427 280  
586 402 106 300 294 559 355 788 340 146 322 306 112 240 293 153  
596 296 281 338 332 261 511 220 322 293 376 253 430 234 498 446  
620 151 703 181 449 594 501 354 660 476 180 378 368 633 429 862  
256 206 388 420 45 204 257 101 670 260 355 537 296 335 585 304  
388 359 340 346 394 308 572 520 694 225 777 255 82 505 781 688  
541 847 663 367 565 555 820 6161049 289 262 444 476 196 119 136  
118 857 175 542 593 129 522 772 360 444 415 255 402 161 495 759  
707 881 412 964 442 269 233 322 611 518 371 677 493 197 395 372  
650 446 879 359 69 261 293 94 142 224 84 687 146 372 410 263  
352 602 177 261 232 247 219 361 325 589 537 711 242 794 272 99  
106 200 185 575 482 335 634 450 231 319 419 607 480 843 462 86  
124 156 241 226 298 218 651 166 406 273 337 310 566 40 124 95  
227 82 495 300 546 494 668 276 751 207 212 278 334 151 353 638  
545 398 704 520 224 422 412 677 473 906 282 110 292 324 61 125  
178 38 714 181 399 441 217 379 629 208 292 263 261 250 315 352  
616 564 738 269 821 299 126 82 154 46 182 324 314 191 106 275  
91 225 104 244 248 332 487 638 437 367 240 421 549 602 462 390  
520 290 238 641 64 227 329 297 310 581 314 739 95 187 135 309  
196 392 150 317 391 578 408 365 435 388 234 127 124 219 113 289  
168 215 270 254 431 606 501 431 304 485 613 666 526 310 584 232  
302 705 128 163 393 361 374 645 378 803 159 209 120 219 229 336  
214 381 455 642 472 429 499 64 447 664 571 424 730 546 250 448  
438 703 499 932 188 204 386 418 36 202 255 88 740 258 425 535  
294 405 655 302 386 357 338 344 392 378 642 590 764 295 847 325  
152 68 231 130 276 96 461 525 360 606 513 366 672 488 192 390  
380 645 441 874 273 117 299 331 46 150 203 63 682 206 367 448  
242 347 597 215 299 270 286 257 340 320 584 532 706 237 789 267  
94 58 179 48 189 31 403 467 82 605 133 180 312 287 418 264  
425 112 575 55 439 313 448 648 520 474 602 655 515 193 658 89  
517 694 354 220 610 577 591 738 595 792 352 514 425 401 219 404  
421 370 444 631 461 495 488 385 307 514 456 656 932 839 692 998  
814 518 716 706 971 7671200 444 413 595 627 347 270 200 2691008  
326 693 744 177 673 923 511 595 566 406 553 42 646 910 8581032  
5631115 593 420 384 151 351 485 305 729 793 382 330 782 573 113  
101 280 79 329 359 403 163 402 157 235 509 686 616 489 663 791  
844 704 131 769 209 486 883 322 57 578 546 559 830 563 981 320  
425 336 236 314 176 392 559 633 820 650 614 677 353 220 603 645  
210 971 293 384 274 143 319 129 262 60 314 286 402 531 675 451  
381 201 458 586 639 499 460 534 360 151 678 101 318 343 311 324  
595 328 776 132 225 173 353 233 436 187 354 428 615 445 379 472  
83 147 498 440 455 766 375 372 283 199 153 229 39 273 151 324  
196 324 441 686 485 415 288 469 597 650 510 413 568 370 241 689  
111 228 377 345 358 629 362 787 143 135 83 263 244 346 198 365  
439 626 456 413 483 54 72 509 451 377 777 300 90 330 479 386

239 545 361 65 259 253 518 314 747 378 119 276 260 150 278 331  
191 555 334 240 297 370 220 470 174 276 247 414 207 468 193 457  
405 579 110 662 140 46 120 307 126 166 164 276 340 190 132 329  
458 518 313 324 610 297 234 391 107 275 511 389 322 248 331 254  
693 723 653 526 707 835 888 748 302 806 368 487 927 349 149 615  
583 596 867 600 1025 381 239 231 77 408 106 436 603 677 864 694  
651 721 292 236 747 689 384 1015 186 336 246 562 598 874 781 634  
940 756 460 658 648 913 709 1142 370 355 537 569 289 212 197 211  
950 268 635 686 157 615 865 453 537 508 348 495 84 588 852 800  
974 505 1057 535 362 326 93 293 427 247 671 735 324 272 724 85  
913 708 719 400 957 214 604 504 364 663 479 402 348 534 636 622  
872 599 223 49 185 378 319 391 355 680 234 580 302 430 339 595  
123 115 86 287 90 632 329 575 523 697 409 780 313 349 415 471  
288 151 319 394 458 413 326 675 622 643 408 442 303 680 564 154  
401 308 161 460 276 199 78 331 433 419 669 612 298 228 63 453  
441 513 430 477 381 377 47 552 136 392 190 158 171 442 175 707  
126 372 320 494 201 577 110 291 490 546 363 226 396 191 255 488  
401 471 697 440 138 239 250 477 639 255 70 464 371 224 523 339  
262 208 394 496 482 732 567 191 121 27 346 334 406 323 540 274  
440 162 445 199 455 83 47 64 335 68 600 189 435 383 557 269  
640 173 295 383 439 256 119 287 254 378 381 294 534 590 503 268  
302 249 540 532 148 115 606 349 266 387 183 216 507 385 354 147  
363 357 715 719 649 522 703 831 884 744 375 802 400 483 923 345  
194 611 579 592 863 596 1021 377 139 154 22 447 209 432 599 673  
860 690 647 717 288 232 743 685 416 1011 262 332 242 558 103 953  
676 473 536 631 228 175 412 38 296 532 410 240 306 272 210 640  
744 674 547 728 856 909 769 233 827 286 508 948 370 80 636 604  
617 888 621 1046 402 293 261 138 351 79 457 624 698 885 715 672  
742 313 257 768 710 325 1036 117 357 267 583 69 978 701 498 561  
153 642 129 176 349 121 369 428 472 232 428 226 187 578 755 685  
558 732 860 913 773 98 838 278 555 952 391 132 647 615 628 899  
632 1050 389 465 376 260 383 161 461 628 702 889 719 683 746 422  
330 772 714 279 1040 75 430 340 587 191 982 712 509 572 275 122  
503 779 686 539 845 661 365 563 553 818 614 1047 245 260 442 474  
141 151 168 116 855 207 540 591 162 520 770 358 442 413 287 400  
201 493 757 705 879 410 962 440 267 231 44 198 332 152 576 640  
174 177 629 199 818 613 624 305 862 125 469 544 437 858 883 887  
372 762 662 522 821 637 456 506 644 794 705 1030 506 209 209 343  
285 120 108 230 838 72 631 460 147 497 753 227 311 282 29 269  
398 487 733 681 855 501 938 471 354 322 237 218 198 243 552 616  
320 268 720 388 801 566 600 396 838 330 258 413 306 834 859 870  
269 641 348 265 422 152 262 542 420 314 189 362 313 714 754 684  
557 738 866 919 779 344 837 360 518 958 380 193 646 614 627 898  
631 1056 412 185 200 23 439 165 467 634 708 895 725 682 752 323  
233 778 720 415 1046 231 367 277 593 59 988 711 508 571 45 122  
244 893 869 561 837 744 597 903 719 423 621 611 876 672 1105 311  
318 500 532 252 175 192 174 913 231 598 649 186 578 828 416 500  
471 311 458 154 551 815 763 937 468 1020 498 325 289 65 256 390  
210 634 698 287 235 687 152 876 671 682 363 920 77 527 602 495  
916 941 945 66 293 951 478 754 661 514 820 636 340 538 528 793  
589 1022 261 235 417 449 116 132 149 91 830 188 515 566 159 495  
745 333 417 388 268 375 226 468 732 680 854 385 937 415 242 206  
55 173 307 127 551 615 149 152 604 224 793 588 599 280 837 150  
444 519 412 833 858 862 25 250 868 91 247 316 223 76 360 176  
170 39 246 333 334 572 583 360 290 163 366 494 547 407 392 443  
292 133 586 37 307 252 220 233 504 237 684 34 272 220 394 146  
477 95 262 336 523 353 288 380 92 156 406 348 387 674 355 83  
139 221 377 616 317 92 177 373 398 424 521 475 408 579 496 317  
336 212 95 289 105 218 79 266 262 354 501 631 430 360 233 414

542 595 455 412 513 312 213 634 53 248 397 290 378 574 382 732  
88 201 149 323 189 406 143 310 384 571 401 358 428 21 85 454  
396 407 722 375 62 68 269 306 664 387 184 247 302 327 444 569  
545 337 627 544 70 272 382 289 142 448 264 84 162 234 421 295  
650 497 180 315 188 280 408 461 321 458 464 221 186 500 123 373  
193 245 258 544 228 598 96 360 308 482 91 565 29 142 250 437  
267 159 294 179 243 320 262 310 588 421 216 227 96 465 530 342  
139 209 461 486 490 435 526 496 493 410 124 172 575 276 199 356  
86 240 476 354 287 250 296 266 672 688 618 491 672 800 853 713  
289 771 333 452 892 314 127 580 548 561 832 565 990 346 237 205  
82 373 141 401 568 642 829 659 616 686 257 201 712 654 349 980  
165 301 211 527 35 922 645 442 505 97 56 178 827 803 66 885  
802 342 271 430 219 479 386 239 545 361 167 259 317 518 378 747  
474 83 172 149 253 235 339 230 555 228 304 263 378 220 470 79  
139 134 289 112 507 193 457 405 579 174 662 126 154 290 346 136  
621 194 276 340 288 201 393 497 518 313 324 108 562 439 199 216  
153 558 583 587 344 260 593 402 319 221 269 97 527 293 683 583  
443 742 558 238 427 426 715 487 951 352 50 232 264 131 101 174  
108 759 105 413 381 213 418 674 148 232 203 206 190 385 408 654  
602 776 283 859 248 140 168 224 41 122 72 473 537 166 89 502  
375 722 487 521 167 759 317 259 334 227 755 780 791 222 177 790  
280 197 396 466 219 724 134 54 529 429 289 588 404 327 273 459  
561 547 797 595 219 92 82 374 362 434 351 605 302 505 227 473  
264 520 119 31 43 363 58 628 254 500 448 622 334 705 238 327  
411 467 284 147 315 319 383 409 322 600 618 568 333 367 281 605  
560 84 180 53 601 626 637 465 334 636 523 440 242 312 267 570  
170 255 648 188 182 355 68 316 434 430 238 362 232 154 584 761  
691 564 738 866 919 779 177 844 284 561 958 390 100 653 621 634  
905 638 1056 395 412 323 194 389 95 467 634 708 895 725 689 752  
333 277 778 720 285 1046 81 377 287 593 125 988 718 515 578 209  
56 66 893 876 178 951 868 418 347 496 112 593 797 643 211 601  
501 361 660 476 231 345 479 633 480 869 466 74 81 182 243 189  
261 220 677 129 406 299 300 336 592 105 150 121 190 108 497 326  
572 520 694 276 777 310 204 280 336 143 37 184 391 455 278 191  
495 487 640 405 439 166 677 429 160 252 145 673 698 709 334 161  
708 392 309 314 384 196 642 99 125 173 715 568 844 751 604 910  
726 430 628 618 883 679 1112 348 325 507 539 259 182 150 181 920  
238 605 656 127 585 835 423 507 478 318 465 98 558 822 770 944  
475 1027 505 332 296 63 263 397 217 641 705 294 242 694 96 883  
678 689 370 927 30 534 609 502 923 948 952 103 300 958 56 120  
586 634 500 892 409 287 530 958 399 497 150 67 204 70 257 288  
327 155 335 164 282 516 610 540 413 587 715 768 628 216 693 201  
410 807 246 28 502 470 483 754 487 905 244 353 264 184 243 187  
316 483 557 744 574 538 601 199 135 627 569 217 895 85 292 228  
442 167 837 567 364 427 199 108 160 742 725 198 800 717 279 220  
345 132 442 646 492 128 564 807 290 680 580 440 739 555 317 424  
505 712 566 948 506 139 98 261 285 155 227 229 756 88 492 378  
266 415 671 144 176 164 140 136 424 405 651 599 773 362 856 389  
290 322 263 195 116 226 470 534 320 243 581 414 719 484 518 252  
756 356 147 331 224 752 777 788 295 111 787 319 276 393 463 275  
721 178 154 190 794 79 326 643 475 65 42 182 137 282 261 295  
65 439 85 321 437 588 518 391 565 693 746 606 141 671 111 388  
785 224 95 480 448 461 732 465 883 222 378 289 272 216 254 294  
461 535 722 552 516 579 255 169 605 547 138 873 92 325 241 420  
255 815 545 342 405 287 175 161 720 703 286 778 695 257 277 323  
220 420 624 470 167 542 785 88 621 654 341 278 435 151 319 555  
433 366 266 375 298 755 767 697 570 751 879 932 792 346 850 412  
531 971 393 193 659 627 640 911 644 1069 425 262 254 100 452 103  
480 647 721 908 738 695 765 336 280 791 733 428 1059 230 380 290

606 441001 724 521 584 122 113 235 906 882 77 964 881 421 350  
509 79 606 803 649 169 721 971 211 800 299 445 387 276 226 294  
50 346 224 364 125 410 506 759 558 488 361 542 670 723 583 478  
641 406 316 762 184 293 450 418 431 702 435 860 216 64 57 193  
317 411 271 438 512 699 529 486 556 127 149 582 524 454 850 365  
165 75 397 311 792 515 312 375 170 332 405 697 673 216 755 672  
212 141 300 276 397 594 440 352 512 762 293 591 318 355 375 765  
665 525 824 640 384 509 572 797 6331033 434 160 245 346 213 48  
59 158 841 42 559 463 98 500 756 230 314 285 90 272 326 490  
736 684 858 429 941 474 286 250 165 169 201 171 555 619 248 196  
648 316 804 569 603 324 841 258 294 416 309 837 862 873 197 72  
872 221 178 478 548 454 832 263 128 337 879 164 228 728 130 706  
885 676 268 658 558 418 717 533 231 402 419 690 480 926 420 53  
138 239 199 132 204 202 734 72 406 356 243 393 649 123 207 178  
185 165 401 383 629 577 751 276 834 367 204 236 240 109 86 140  
448 512 234 157 495 391 697 462 496 166 734 333 187 309 202 730  
755 766 272 156 765 296 253 371 441 227 699 130 68 230 772 57  
303 627 86 599 778 569 107 261 519 426 279 585 401 141 299 329  
558 390 787 422 43 200 232 211 183 294 178 595 162 316 342 333  
260 510 98 200 171 275 131 455 233 497 445 619 186 702 166 114  
248 294 67 90 142 316 380 246 159 405 445 558 353 364 76 602  
387 227 295 195 598 623 627 292 246 633 350 267 261 309 137 567  
69 82 223 633 90 357 482 176 460 646 437 197 90 710 184 271  
417 239 487 496 530 300 546 249 168 616 823 753 626 800 928 981  
841 108 906 321 6231020 459 241 715 683 696 967 7001118 457 583  
494 378 451 279 529 696 770 957 787 751 814 490 448 840 782 310  
1108 184 560 458 655 3091050 780 577 640 393 240 118 955 938 362  
1013 930 492 512 558 296 655 859 705 179 7771020 269 856 229 353  
523 941 834 695 396 291 180 177 198 53 297 175 268 218 305 410  
710 509 439 312 493 621 674 534 382 592 310 273 713 135 197 401  
369 382 653 386 811 167 157 67 215 268 315 222 389 463 650 480  
437 507 78 53 533 475 358 801 269 122 32 348 215 743 466 263  
326 206 236 309 648 624 238 706 623 163 92 251 180 348 545 391  
256 463 713 197 542 222 259 97 627 520 388 427 295 424 278 183  
308 118 302 100 354 275 442 520 715 491 421 241 498 626 679 539  
500 574 400 191 718 141 307 383 351 364 635 368 816 172 214 162  
342 273 425 227 394 468 655 485 419 512 114 151 538 480 495 806  
364 40 79 353 325 748 448 178 308 321 346 419 653 606 356 711  
628 123 93 256 290 353 527 373 366 445 718 281 524 365 369 154  
609 502 393 537 111 651 927 834 687 993 809 513 711 701 966 762  
1195 407 408 590 622 342 265 282 2641003 321 688 739 276 668 918  
506 590 561 401 548 174 641 905 8531027 5581110 588 415 379 155  
346 480 300 724 788 377 325 777 173 966 761 772 4531010 90 617  
692 585100610311035 162 3831041 96 187 669 717 583 975 492 370  
6131041 482 112 890 409 8681054 845 311 386 4401103 796 801 175  
565 472 325 624 440 311 309 495 597 583 833 504 128 76 146 283  
271 343 260 641 211 541 263 382 300 556 32 76 47 272 30 537  
290 536 484 658 318 741 222 256 320 376 193 56 224 355 419 318  
231 636 527 604 369 403 210 641 469 103 216 109 637 662 673 374  
243 672 432 349 278 423 225 606 104 164 99 679 57 439 528 112  
506 685 476 246 114 134 741 427 409 522 585 67 146 292 135 385  
371 405 175 458 147 249 499 698 628 501 675 803 856 716 57 781  
221 498 895 334 131 590 558 571 842 575 993 332 481 392 303 326  
215 404 571 645 832 662 626 689 365 261 715 657 200 983 74 435  
356 530 245 925 655 452 515 318 176 62 830 813 287 888 805 367  
387 433 232 530 734 580 120 652 895 159 731 104 289 421 816 709  
570 121 325 438 978 616 250 640 540 400 699 515 277 384 465 672  
526 908 466 99 89 221 245 178 250 220 716 96 452 338 289 375  
631 105 189 160 151 147 447 365 611 559 733 322 816 349 250 282

286 155 76 186 430 494 280 203 541 437 679 444 478 212 716 379  
138 291 184 712 737 748 318 122 747 342 299 353 423 235 681 138  
114 212 754 39 349 603 40 581 760 551 138 46 136 816 502 484  
432 96 691 717 221 251 424 137 385 503 499 307 417 301 95 653  
830 760 633 807 935 988 848 190 913 353 631 1027 459 169 722 690  
703 974 707 1125 464 481 392 246 458 117 536 703 777 964 794 758  
821 402 346 847 789 354 1115 150 446 356 662 169 1057 787 584 647  
272 125 92 962 945 228 1020 937 487 416 565 181 662 866 712 69  
784 1027 197 863 236 213 421 948 841 702 162 325 435 1110 748 154  
823 246 454 361 213 373 183 332 130 384 340 472 585 745 472 402  
237 528 656 709 569 530 555 430 167 748 171 372 364 332 345 616  
349 846 202 279 227 407 303 490 257 424 498 685 515 400 542 157  
221 568 510 525 836 429 70 144 383 390 778 429 174 289 386 411  
484 683 587 421 741 658 153 132 286 355 383 508 354 431 426 748  
346 505 395 434 219 590 483 423 630 176 65 831 390 505 465 500  
788 302 322 495 208 456 574 570 378 488 372 23 724 901 831 704  
818 1006 1059 919 203 984 424 70 11098 530 240 793 761 774 1045 778  
1196 535 552 463 317 529 188 607 774 848 1035 865 829 892 473 417  
918 860 425 1186 221 517 427 733 240 1128 858 655 718 343 196 173  
1033 1016 299 1091 1008 558 487 636 252 733 937 783 154 855 1098 268  
934 307 284 492 1019 912 773 138 396 506 1181 819 235 894 81 571  
426 596 503 356 662 478 182 380 370 635 431 864 253 183 365 397  
27 181 234 82 672 237 357 514 273 337 587 281 365 336 317 323  
371 310 574 522 696 227 779 257 84 19 210 83 255 67 393 457  
65 35 446 361 635 430 441 122 679 303 392 467 360 675 700 704  
208 299 710 266 183 338 386 252 644 267 145 388 710 257 273 559  
299 537 723 514 227 213 225 772 465 470 355 297 647 259 779 500  
850 596 575 330 377 237 179 497 375 552 100 589 407 941 709 639  
512 693 821 874 734 421 792 460 467 913 335 236 601 569 582 853  
586 1011 367 91 117 72 468 259 422 589 663 850 680 637 707 278  
221 733 675 642 1001 308 316 212 548 153 943 666 463 526 47 212  
334 848 824 95 906 823 363 292 451 156 548 745 591 268 663 913  
241 742 506 172 133 827 720 588 452 185 305 996 627 364 702 322  
370 393 665 634 910 817 670 976 792 496 694 684 949 745 1178 414  
391 573 605 325 248 185 247 986 304 671 722 162 651 901 489 573  
544 384 531 32 624 888 836 1010 541 1093 571 398 362 129 329 463  
283 707 771 360 308 760 33 949 744 755 436 983 52 600 675 568  
989 1014 1018 169 366 1024 122 194 652 700 566 958 475 353 596 1024  
465 66 873 392 85 11037 828 294 369 423 1086 779 784 142 505 961  
415 1003 814 1164 339 979 507 209 111 201 139 172 408 286 213 329  
223 351 575 620 550 423 604 732 785 645 275 703 259 384 824 202  
87 512 480 493 764 497 922 278 268 141 173 252 256 333 500 574  
761 591 548 618 138 74 644 586 276 912 144 233 143 459 156 854  
577 374 437 208 177 219 759 735 187 817 734 274 159 362 121 459  
656 502 197 574 824 59 653 147 200 208 738 631 499 328 112 222  
907 538 218 613 266 287 337 576 208 890 463 186 79 155 157 161  
251 216 167 318 206 369 558 576 506 379 553 681 734 594 262 659  
213 376 773 176 115 468 436 449 720 453 871 210 257 168 219 206  
274 282 449 523 710 540 504 567 112 48 593 535 259 861 172 195  
120 408 202 803 533 330 393 254 195 247 708 691 233 766 683 204  
133 311 167 408 612 458 215 530 773 87 609 121 246 197 694 587  
448 350 101 199 856 494 225 569 284 269 355 525 251 839 46 408  
169 105 116 242 298 131 229 57 455 118 437 468 315 451 325 341  
469 522 382 245 525 72 322 561 158 200 413 382 394 605 398 659  
155 394 305 344 86 359 228 237 311 498 328 362 355 188 160 381  
323 169 649 208 259 269 196 327 591 478 276 339 391 280 277 496  
587 358 554 471 191 211 177 292 260 369 403 283 362 561 172 448  
110 371 334 515 362 272 345 238 299 644 439 220 408 352 329 423  
313 388 627 183 137 529 389 278 310 236 127 430 308 366 125 403

447 755 642 572 445 626 754 807 667 420 725 408 400 846 268 235  
534 502 515 786 519 944 300 80 68 112 401 299 355 522 596 783  
613 570 640 211 169 666 608 456 934 307 249 225 481 193 876 599  
396 459 89 231 353 781 757 135 839 756 296 225 384 175 481 678  
524 287 596 846 240 675 320 212 84 760 653 521 471 133 238 929  
560 363 635 362 303 433 598 52 912 156 199 336 192 412 319 172  
477 293 160 154 342 450 430 680 573 228 235 108 383 371 443 360  
488 311 388 167 482 153 403 119 165 178 372 154 637 126 389 337  
511 162 594 71 207 420 476 232 136 324 209 273 418 331 482 627  
451 246 256 161 494 569 262 120 110 490 515 590 474 343 525 532  
449 127 202 74 459 96 264 187 526 182 539 375 261 353 538 329  
346 239 165 588 280 286 622 151 463 221 595 294 666 397 480 605  
391 341 287 413 529 286 231 310 177 165 430 308 319 182 328 379  
680 642 572 445 626 754 807 667 344 725 365 406 846 268 159 534  
502 515 786 519 944 300 137 106 75 370 231 355 522 596 783 613  
570 640 211 155 666 608 381 934 231 255 165 481 125 876 599 396  
459 77 155 247 781 757 89 839 756 296 225 384 99 481 678 524  
211 596 846 164 675 252 148 168 760 653 521 365 137 244 929 560  
287 635 294 309 365 598 80 912 131 177 314 87 413 434 710 617  
470 776 592 296 494 484 749 545 978 346 191 373 405 125 82 142  
47 786 145 471 522 145 451 701 289 373 344 225 331 238 424 688  
636 810 341 893 371 198 162 77 129 263 83 507 571 160 108 560  
228 749 544 555 236 793 170 400 475 368 789 814 818 76 207 824  
133 51 452 500 366 758 275 153 396 824 265 140 673 233 651 837  
628 135 210 223 886 579 584 223 305 761 241 893 614 964 139 779  
206 690 639 427 712 405 712 535 811 718 571 877 693 397 595 585  
850 6461079 336 292 474 506 226 94 76 129 887 154 572 623 75  
552 802 390 474 445 202 432 175 525 789 737 911 442 994 472 299  
263 58 230 364 184 608 672 261 209 661 160 850 645 656 337 894  
140 501 576 469 890 915 919 91 184 925 113 88 553 601 467 859  
376 176 497 925 276 110 774 242 752 938 729 123 219 324 987 680  
685 205 406 862 265 994 7151065 240 880 143 791 740 528 813 506  
813 82 630 108 191 337 165 424 416 450 220 483 188 190 540 743  
673 546 720 848 901 761 43 826 266 543 940 379 161 635 603 616  
887 6201038 877 520 431 315 371 216 449 616 690 877 707 671 734  
410 306 760 702 2411028 104 480 395 575 246 970 700 497 560 348  
177 55 875 858 299 933 850 412 432 478 233 575 779 625 121 697  
940 189 776 149 290 460 861 754 615 80 364 4741023 661 41 736  
147 550 160 692 3941006 248 270 265 393 508 317 806 907 446 252  
145 227 162 111 347 225 233 268 272 374 624 559 489 362 543 671  
724 584 346 642 279 323 763 185 161 451 419 432 703 436 861 217  
207 141 162 272 279 272 439 513 700 530 487 557 128 50 583 525  
325 851 233 172 82 398 179 793 516 313 376 175 200 273 698 674  
176 756 673 213 142 301 144 398 595 441 220 513 763 108 592 187  
223 147 677 570 438 391 51 161 846 477 289 552 289 226 360 515  
167 829 49 66 203 115 330 98 629 730 319 166 518 425 277 437  
247 336 114 448 404 536 649 749 435 365 150 590 578 650 567 594  
518 494 90 689 235 436 402 295 383 579 387 844 189 343 291 471  
295 554 247 428 627 683 500 363 531 221 285 625 538 589 834 493  
134 208 372 454 776 392 137 252 450 475 548 681 550 485 739 656  
150 196 276 419 353 471 317 495 389 746 410 468 459 498 283 553  
446 432 694 240 129 829 353 569 428 564 80 635 604 434 812 351  
333 393 367 257 373 612 713 614 290 471 313 202 252 166 99 372  
250 290 210 358 378 679 584 514 387 568 696 749 609 350 667 332  
348 788 210 165 476 444 457 728 461 886 242 156 61 135 311 276  
297 464 538 725 555 512 582 153 93 608 550 380 876 237 197 107  
423 170 818 541 338 401 147 191 277 723 699 149 781 698 238 167  
326 135 423 620 466 224 538 788 139 617 244 214 118 702 595 462  
395 67 186 871 502 293 577 293 251 364 540 128 854 80 123 260

260 76 355 70 654 755 323 39 315 442 718 625 478 784 600 304  
502 492 757 553 986 300 199 381 413 81 137 184 53 794 209 479  
530 194 459 709 297 381 352 285 339 261 432 696 644 818 349 901  
379 206 126 90 137 271 91 515 579 111 116 568 259 757 552 563  
244 801 185 408 483 376 797 822 826 60 267 832 126 35 460 508  
374 766 283 161 404 832 273 155 681 293 659 845 636 195 270 231  
894 587 592 222 313 769 301 901 622 972 108 787 229 698 647 435  
720 413 720 55 123 814 637 620 662 523 230 147 304 81 188 424  
302 235 255 174 293 596 636 566 439 620 748 801 661 265 719 281  
400 840 262 75 528 496 509 780 513 938 294 284 195 104 321 193  
349 516 590 777 607 564 634 205 149 660 602 297 928 147 249 159  
475 87 870 593 390 453 119 108 192 775 751 118 833 750 290 219  
378 52 475 672 518 139 590 840 80 669 168 131 224 754 647 515  
310 128 238 923 554 208 629 208 303 279 592 161 906 69 115 240  
160 407 84 706 807 238 92 367 87 714 566 45 139 273 228 383  
352 386 121 540 60 314 411 679 609 482 656 784 837 697 81 762  
132 479 876 315 189 571 539 552 823 556 974 313 479 390 366 307  
308 385 552 626 813 643 607 670 346 266 696 638 112 964 158 416  
342 511 335 906 636 433 496 381 266 155 811 794 380 869 786 348  
368 414 314 511 715 561 213 633 876 182 712 97 379 419 797 690  
551 189 323 456 959 597 93 672 247 486 284 628 607 942 244 218  
178 421 444 346 742 843 124 284 550 345 750 262 235 313 220 73  
371 187 168 43 243 344 331 583 581 348 278 151 364 492 545 405  
389 431 289 137 584 48 304 240 208 221 492 225 682 32 283 231  
405 144 488 93 260 334 521 351 276 378 103 167 404 346 384 672  
352 95 150 219 388 614 305 94 165 384 409 421 519 463 419 577  
494 12 92 122 353 219 384 230 429 302 584 276 381 254 432 223  
466 359 259 489 174 135 667 266 364 341 498 165 569 336 374 650  
285 215 188 307 115 307 450 551 409 224 154 249 458 301 345 432  
822 722 582 881 697 441 566 629 854 690 1090 491 217 302 403 270  
105 69 215 898 99 616 520 108 557 813 287 371 342 77 329 383  
547 793 741 915 486 998 531 343 307 222 226 258 228 612 676 305  
253 705 373 861 626 660 381 898 315 351 473 366 894 99 930 254  
66 929 278 235 535 605 511 863 320 185 394 936 221 285 785 177  
763 942 733 57 164 254 998 684 666 368 303 873 195 1005 647 1076  
284 884 351 795 751 572 817 403 817 192 145 819 734 610 759 252  
811 854 523 435 653 560 413 719 535 239 437 427 692 488 921 220  
192 374 406 29 190 243 64 729 246 414 523 282 394 644 290 374  
345 326 332 380 367 631 579 753 284 836 314 141 78 219 123 264  
84 450 514 34 75 503 370 692 487 498 179 736 312 401 476 369  
732 757 761 137 308 767 275 112 395 443 309 701 276 154 397 767  
266 282 616 308 594 780 571 236 222 234 829 522 527 365 306 704  
268 836 557 907 56 722 348 633 582 370 655 406 655 148 249 749  
572 613 597 77 649 685 393 293 369 167 79 77 205 259 153 190  
97 416 185 435 537 482 412 286 459 587 640 500 243 555 111 283  
679 119 163 375 343 356 626 360 777 116 355 266 305 108 322 189  
356 429 616 446 411 473 149 121 499 441 238 767 206 220 230 315  
288 709 439 237 300 352 243 275 614 587 319 672 589 152 172 218  
253 315 518 364 281 436 679 135 515 108 332 295 600 493 355 343  
199 260 762 401 218 475 350 290 421 431 349 745 144 98 39 297  
248 275 545 646 263 164 354 221 553 201 199 149 657 488 121 511  
418 271 570 386 309 255 441 543 529 779 518 142 99 84 297 285  
357 274 587 225 487 209 396 246 502 35 29 42 286 36 551 236  
482 430 604 316 687 220 268 334 390 207 70 238 301 365 332 245  
581 541 550 315 349 222 587 483 126 162 55 583 608 619 388 257  
618 446 363 224 294 249 552 104 178 60 625 96 453 474 175 452  
631 422 260 153 146 687 373 355 536 47 562 135 694 336 765 311  
573 519 484 440 386 506 169 506 319 520 607 423 299 448 327 500  
543 212 317 320 347

*Literaturverzeichnis*

- Balas, E. [1975]: Facets of the Knapsack Polytope. *Mathematical Programming* 8,146-164 (1975).
- Balas, E.; Zemel, E. [1975]: All the Facets of Zero-One Programming Polytopes with Positive Coefficients. *Management Sciences Research Report No. 374*, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1975.
- Balinski, M.L.; Russakoff, A. [1974]: On the Assignment Polytope. *SIAM Review* 16,516-525 (1974).
- Barnard, S.; Child, J.M. [1952]: *Higher Algebra*. Macmillan and Co., London 1952.
- Berge, C. [1973]: *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam London 1973.
- Bondy, J.A. [1972]: Variations of the Hamiltonian Theme. *Canad. Math. Bull.* Vol. 15(1),57-62 (1972).
- Chvátal, V. [1973a]: Edmonds Polytopes and Weakly Hamiltonian Graphs. *Mathematical Programming* 5,29-40 (1973).
- Chvátal, V. [1973b]: Flip-Flops in Hypohamiltonian Graphs. *Canad. Math. Bull.* Vol. 16(1),33-41 (1973).
- Cook, S.A. [1971]: The Complexity of Theorem Proving Procedures. In: *Proceedings of the Third ACM Symposium on the Theory of Computing*,151-158, New York: ACM 1971.
- Dantzig, G.B.; Fulkerson, D.R.; Johnson, S.M. [1954]: Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem. *Operations Research* 2, 393-410 (1954).
- Deutscher General Atlas [1967], Mairs Geographischer Verlag, Stuttgart 1967/68.
- Dirac, G.A. [1967]: Minimally 2-connected Graphs. *J. f. Reine und Angewandte Mathematik* 228,204-216 (1967).
- Doyen, J.; van Diest, V. [1975]: New Families of Hypohamiltonian Graphs. *Mathematical Programming* 13,225-236 (1975).
- Edmonds, J. [1965]: Maximum Matching and a Polyhedron with 0,1 Vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Sect. B* 69,125-130 (1965).
- Edmonds, J. [1965a]: Paths, Trees, and Flowers. *Canadian Journal of Mathematics* 17,449-467 (1965).
- Edmonds, J. [1967]: An Introduction to Matching. Lecture Note given in Ann Arbor, 1967.
- Edmonds, J. [1968]: Optimum Branchings. In: G.B. Dantzig, A.F. Veinott (eds.): *Mathematics of the Decision Sciences, Part 1*, 346-361. American Mathematical Society, Providence 1968.
- Edmonds, J. [1970]: Submodular Functions, Matroids, and Certain Polyhedra. In: R. Guy; H. Hanani; N. Sauer; J. Schonheim (eds.): *Combinatorial Structures and their Applications*,69-87. Gordon and Breach, New York 1970.
- Edmonds, J. [1971]: Matroids and the Greedy Algorithm. *Mathematical Programming* 1,127-136 (1971).

- Edmonds, J.; Johnson, E.L. [1970]: Matching: A Well-Solved Class of Integer Linear Programs. In: R.K. Guy; H. Hanani; N. Sauer; J. Schonheim (eds.): Combinatorial Structures and their Applications, 89-92. Gordon and Breach, New York 1970.
- Giles, R. [1975]: Submodular Functions, Graphs and Integer Polyhedra. Doctoral Theses, University of Waterloo, Waterloo, Canada 1975.
- Giles, R. [1976]: Facets and other Faces of Branching Polyhedra. CORE Discussion Paper No. 7621, Heverlee, Belgium 1976.
- Gomory, R.E. [1964]: The Traveling Salesman Problem. Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, IBM Data Processing Division, White Plains, New York 1964.
- Grötschel, M.; Padberg, M.W. [1974]: Lineare Charakterisierungen von Travelling Salesman Problemen. Report No. 7416-OR, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Bonn 1974.
- Grötschel, M.; Padberg, M.W. [1974a]: Zur Oberflächenstruktur des Travelling Salesman Polytopen. In: H.J. Zimmermann; A. Schub; H. Späth; J. Stoer (eds.): Proceedings in Operations Research 4, 207-211, Physica-Verlag, Würzburg 1974.
- Grötschel, M.; Padberg, M.W. [1975]: Partial Linear Characterizations of the Asymmetric Travelling Salesman Polytope. Mathematical Programming 8, 378-381 (1975).
- Grötschel, M.; Padberg, M.W. [1975a]: On the Symmetric Travelling Salesman Problem. Report No. 7536-OR, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Bonn 1975.
- Grünbaum, B. [1967]: Convex Polytopes. Wiley, London 1967.
- Grünbaum, B. [1973]: Vertices missed by Longest Paths or Circuits. Preprint, University of Washington, Seattle 1973.
- Hammer, P.L.; Johnson, E.L.; Peled, U.N. [1974]: Regular 0-1 Programs. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationnelle 16, 267-276 (1974).
- Hammer, P.L.; Johnson, E.L.; Peled, U.N. [1975]: Facets of Regular 0-1 Polytopes. Mathematical Programming 8, 179-206 (1975).
- Hammer, P.L.; Rudeanu, S. [1968]: Boolean Methods in Operations Research and Related Areas. Springer, Berlin Heidelberg New York 1968.
- Harary, F. [1972]: Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, 1972.
- Held, M.; Karp, R.M. [1970]: The Traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees. Operations Research 18, 1138-1162 (1970).
- Held, M.; Karp, R.M. [1971]: The Traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees: Part II. Mathematical Programming 1, 6-25 (1971).
- Heller, I. [1953]: On the Problem of Shortest Paths between Points, I and II. (Abstract), Bulletin of the American Mathematical Society 59, 551-552 (1953).
- Herz, J.-C.; Gaudin, Th.; Rossi, Ph. [1964]: Solution du problème no. 29. Revue Francaise de Recherche Operationnelle 8, 214-218 (1964).

- Herz, J.-C.; Duby, J.-J.; Vigué, F. [1967]: Recherche systématique des graphes hypohamiltoniens. In: Centre International de Calcul (ed.): Theory of Graphs, International Symposium Rome 1966, 153-159, Dunod, Paris 1967.
- Hong, S. [1972]: A Linear Programming Approach for the Traveling Salesman Problem. Doctoral Theses, Johns Hopkins University, Baltimore 1972.
- Hong, S.; Padberg, M.W. [1976]: On the Solution of Travelling Salesman Problems. Paper presented at the 9. International Symposium on Mathematical Programming, Budapest 1976.
- Kantorovich, L.V. [1960]: Mathematical Methods of Organizing and Planning Production (translated from Russian). Management Science 6, 366-422 (1960).
- Kapoor, S.F.; Kronk, H.V.; Lick, D.R. [1968]: On Detours in Graphs. Canadian Math. Bull. 11(2), 195-201 (1968).
- Karp, R.M. [1972]: Reducibility among Combinatorial Problems. In: R.E. Miller; J.W. Thatcher (eds.): Complexity of Computer Computations, 85-103, Plenum Press, New York 1972.
- Kastning, C. [1976]: Integer Programming and Related Areas, a Classified Bibliography. Springer, Berlin 1976.
- Klee, V.; Witzgall, C. [1968]: Facets and Vertices of Transportation Polytopes. In: G.B. Dantzig; A.F. Veinott (eds.): Mathematics of the Decision Sciences, Part 1, 257-282, American Mathematical Society, Providence 1968.
- Korte, B.; Hausmann, D. [1976]: An Analysis of the Greedy Heuristic for Independence Systems. Report No. 7645-OR. Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Bonn 1976.
- Kruskal, J.B. [1956]: On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. Proceedings of the American Mathematical Society 7, 48-50 (1956).
- Kuhn, H.W. [1955]: The Hungarian Method for the Assignment Problem. Naval Research Logistics Quarterly 3, 253-258 (1956).
- Kuhn, H.W. [1955a]: On Certain Convex Polyhedra. Bulletin of the American Mathematical Society 61, 557-558 (1955).
- Lawler, E. [1975]: Matroid Intersection Algorithms. Mathematical Programming 9, 31-56 (1975).
- Lawler, E. [1976]: Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Holt, Rinehart, Winston, New York 1976.
- Lenstra, J.K.; Rinnooy Kan, A.H.G. [1975]: Some Simple Applications of the Travelling Salesman Problem. Operational Research Quarterly 26, 717-733 (1975).
- Lin, S.; Kernighan, B.W. [1973]: An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem. Operations Research 21, 498-516 (1973).
- Lindgren, W.F. [1967]: An Infinite Class of Hypohamiltonian Graphs. Amer. Math. Monthly 74, 1087-1089 (1967).

- Maurras, J.F. [1975]: Some Results on the Convex Hull of the Hamiltonian Cycles of Symmetric Complete Graphs. In: Roy, B. (ed.): *Combinat. Progr.: Methods and Appl.*, Reidel, Dordrecht 1975.
- Mendelson, E. [1970]: *Boolean Algebra and Switching Circuits*. Mc Graw-Hill, New York 1970.
- Miliotis, P. [1976]: Integer Programming Approaches to the Travelling Salesman Problem. *Mathematical Programming* 10, 367-378 (1976).
- Nemhauser, G.L.; Trotter, L.E. [1974]: Properties of Vertex Packing and Independence System Polyhedra. *Mathematical Programming* 6, 48-61 (1974).
- Neumann, K. [1975]: *Operations Research Verfahren Band 3: Graphentheorie und Netzplantechnik*. Hanser, München 1975.
- Noltemeier, H. [1976]: *Graphentheorie mit Algorithmen und Anwendungen*. de Gruyter, Berlin 1976.
- Padberg, M.W. [1973]: On the Facial Structure of Set Packing Polyhedra. *Mathematical Programming* 5, 199-215 (1973).
- Padberg, M.W. [1975]: A Note on Zero-One Programming. *Operations Research* 23, 833-837 (1975).
- Padberg, M.W. [1976]: On the Complexity of Set Packing Polyhedra. Paper presented at the 9. International Symposium on Mathematical Programming, Budapest 1976.
- Padberg, M.W.; Rao, M.R. [1974]: The Travelling Salesman Problem and a Class of Polyhedra of Diameter Two. *Mathematical Programming* 7, 32-45 (1974).
- Peled, U.N. [1975a]: Unfixed Variables, Self Facets and Chow Parameters. Working Paper presented at the Workshop on Integer Programming, Bonn 1975.
- Peled, U.N. [1975b]: Regular Boolean Functions and their Polytopes. Doctoral Thesis, University of Waterloo, Waterloo 1975.
- Plummer, M.D. [1968]: On Minimal Blocks. *Trans. Am. Math. Soc.* 134, 555-567 (1968).
- Prim, R.C. [1957]: Shortest Connection Networks and Some Generalizations. *Bell System Technical Journal* 36, 1389-1401 (1957).
- Pulleyblank, W. [1973]: Faces of Matching Polyhedra. Doctoral Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Canada 1973.
- Randow, R. von [1975]: *Introduction to the Theory of Matroids*. Springer, Berlin Heidelberg New York 1975.
- Rockafellar, R.T. [1972]: *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1972.
- Robbins, H.E. [1939]: A Theorem on Graphs with an Application to a Problem in Traffic Control. *Am. Math. Monthly* 46, 281-283 (1939).
- Siedentopf, H. [1950]: *Einführung in die Atomphysik*. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1950.
- Stoer, J.; Witzgall, C. [1970]: *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*. Springer, Berlin 1970.
- Tarjan, R. [1972]: Depth-First Search and Linear Graphs Algorithms. *SIAM Journal on Computing* 2, 146-160 (1972).

- Thomassen, C. [1974a]: Hypohamiltonian and Hypotractable Graphs. *Discrete Mathematics* 9, 91-96 (1974).
- Thomassen, C. [1974b]: On Hypohamiltonian Graphs. *Discrete Mathematics* 10, 383-390 (1974).
- Thomassen, C. [1976]: Planar and Infinite Hypohamiltonian and Hypotractable Graphs. *Discrete Mathematics* 14, 377-389 (1976).
- Wagner, K. [1970]: *Graphentheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.
- Whitney, H. [1935]: On the Abstract Properties of Linear Dependence. *Amer. J. Math.* 57, 509-533 (1935).
- Wolsey, L.A. [1975]: Faces of a Linear Inequality in 0-1 Variables. *Mathematical Programming* 8, 165-178 (1975).
- Zemel, E. [1974]: Lifting the Facets of 0-1 Polytopes. Management Sciences Research Report No. 354, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1974.

*Symbole und Abkürzungen*

aff(S)	13	$P_S(I)$	21
$\beta(F)$	36	$P_T^n$	167, 259
cl(S)	25	$P_T^4$	248
conv(S)	13	$\tilde{P}_T^n$	167, 273
$\Delta$	153	$P_Z^n$	172
d(v)	9, 11	$\tilde{P}_Z^n$	172
$d^+(v)$	11	$Q_{2M}^n$	3, 52
$d^-(v)$	11	$\tilde{Q}_{2M}^n$	3, 52
dim P	13, 14	$Q_{2M}^n$	4, 52
E(W)	9, 12	$Q_S^n$	67
$G = [V, E]$	9	$Q_{ST}^n$	45
$G = (V, E)$	11	$\tilde{Q}_{ST}^n$	2, 45
$G - v$	10, 12	$Q_{T4}^n$	2, 44, 143
$G - e$	10, 12	$Q_T^4$	76
$G + e$	10, 12	$Q_T^5$	77
$\langle k \rangle$	126	$Q_T^6$	145
lin(S)	13	$Q_T^7$	145
$M^+$	169	$\tilde{Q}_{T4}^n$	2, 44, 147
$M^-$	169	$Q_T^4$	77
$M_F$	26	r(S)	25
$M \cdot S$	37	$r^S(F)$	37
$N(v)$	9, 11	$T_n$	2, 43, 167
$N^+(v)$	11	$\tilde{T}_n$	2, 44, 167
$N^-(v)$	11	V(E)	10, 12
$\omega(W)$	9, 11	$V^+$	186
$\omega^+(W)$	11	$V^-$	186
$\omega^-(W)$	11	$V_-$	192
$P_{B^+}$	191	$\overset{o}{W}_1$	79, 95
$P_{B^-}$	191	W	79, 95
$\tilde{P}_{B^+}$	185	Z	171
$\tilde{P}_{B^-}$	185	$\tilde{Z}$	171
$P_E$	35		
$P_M$	30		
$P_{M^+}$	170		
$P_{M^-}$	170		
$\tilde{P}_{M^+}$	170		
$\tilde{P}_{M^-}$	170		

*Sachverzeichnis*

- abgeschlossen 25  
abhängig 25  
adjazent 9  
affin unabhängig 13  
Anfangsknoten 11  
Antiarboreszenz 184  
Antibranching 184  
Antibranching Polytop 185, 189  
antiparallel 11  
Antiwurzel 184  
äquivalente Ungleichung 15  
Arboreszenz 12, 184  
Artikulationsknoten 10  
asymmetrisches Travelling Salesman  
  Problem 167  
asymmetrischer Travelling Salesman  
  Polytop 167, 257, 259  
Ausnahmetour 201  
Außengrad 11  
  
Basis 13, 25  
Baum 11  
Block 10, 175  
Bogen 11  
Boolesche Funktion 18  
Boolescher Ausdruck 18  
Branching 12, 184  
Branching Polytop 185, 189  
  
C2-Kamm 235  
C2-Kammungleichung 236  
C3-Kamm 237  
C3-Kammungleichung 237  
Chvátal Kamm 126  
Clique 11, 12  
Cokreis 12, 175  
Consensus Methode 19  
Cutting Plane 276  
  
 $D_K^+$ -Ungleichung 238  
 $D_K^-$ -Ungleichung 238  
Digraph 11  
Dimension 13  
Disjunktion 18  
dominierte Ungleichung 16, 126  
  
 $E_4$ -Ungleichung 240  
Ecke 16  
Eigenschaft  $\Delta$  153  
Eins-Baum 66  
Endknoten 9, 11  
  
Facette 15  
Forest Matroid 45  
Forest Polytop 46, 47  
Forest Problem 45  
  
Grad 9  
Gradbeschränkung 72  
Graph 9  
Greedy Algorithmus 30  
Griff 126, 130, 234  
gültige Ungleichung 14  
  
Halbraum 14  
Hamilton-Kreis 12  
Hamilton-Weg 12  
Hamilton-Zyklus 10  
hamiltonsch 151  
Hyperebene 14  
hypohamiltonsch 152  
hypohamiltonsche Ungleichung 158  
hypokettenhamiltonsch 152  
hypokettenhamiltonsche Ungleichung 158  
  
Implikant 19  
Innengrad 11  
inseparabel 26

- inzident 9
- Inzidenzvektor 30
- irredundant 19
  
- Kamm 130, 234
- Kammungleichung 126, 130, 234
- Kante 9
- Kette 10
- kettenhamiltonsch 151
- Knoten 9
- Komponente 10
- Konjunktion 18
- Kontraktionsgraph 48
- Kontraktionsmatroid 37
- konvexe Hülle 13
- Konvexkombination 13
- Kreis 12
- Kurzzyklusbedingung 73
  
- Länge 10
- Liftungskoeffizient 22
- linear unabhängig 13
- Linearkombination 13
- Literal 18
- Loop Constraints 133
  
- Matching 50
- b-Matching 50
- 2-Matching Polytop 52, 65
- 2-Matching Ungleichung 54
- Matroid 26
- Matroid Polytop 31, 33
- maximal 10
- maximal hypohamiltonsch 159
- maximal hypokettenhamiltonsch 159
- maximal inseparabel 28
- minimal 10
- minimale Separation 35
- minimaler starker Block 175
- minimal trennend 28
  
- monoton 19, 20
- monotoner asymmetrischer Travelling  
Salesman Polytop 167, 272, 273
- monotoner 2-Matching Polytop 52, 59
- monotoner symmetrischer Travelling  
Salesman Polytop 2, 44, 147
- monotoner Zuordnungspolytop 172
- Monotonisierung 23
  
- Nachbar 9, 11
- Nachfolger 11
- normal 25
  
- Ohrendekomposition 176
  
- parallel 9
- Partitions Matroid 169
- perfektes Matching 50
- perfektes b-Matching 50
- perfekte Zuordnung 171
- Polyeder 14
- Polytop 14
- Polytop der Antiarboreszenzen 191
- Polytop der Arboreszenzen 191
- Polytop der Basen 35, 41
- Primimplikant 19
- Primimplikanten-Ungleichung 23
  
- quasi-stark zusammenhängend 192
  
- Rangfunktion 25
- Reduktionsmatroid 26
- redundante Ungleichung 16
- Resolvente 20
- Ringschift 203
- Ringschiftverfahren 200
  
- Schlinge 11
- Schnittebene 276
- Seitenfläche 14
- separabel 26

Separation 35  
sequentielle Liftung 22  
spannender Baum 11, 45  
Spanning Tree Polytop 46, 49  
Spanning Tree Problem 45  
stark zusammenhängend 12, 175  
starker Block 175  
subadditiv 25  
submodular 26  
Subtour-Elimination-Constraints 73  
symmetrischer Travelling Salesman  
Polytop 2, 44, 143  
symmetrisches Travelling Salesman  
Problem 43  
  
Tour 10, 12  
trennend 26  
  
unabhängig 25  
Unabhängigkeitssystem 25  
Untergraph 10  
  
vollständig 11, 12  
Vorgänger 11  
  
Wald 11  
Weg 12  
Wurzel 12  
  
Zinke 126, 130, 234  
Zirkuit 25  
Zuordnung 171  
Zuordnungspolytop 172  
Zuordnungsproblem 168  
zusammenhängend 10, 26, 28  
zweifach zusammenhängend 10  
Zyklus 10